

## 4.4 Lastra con asola

Si è studiato il comportamento in regime di tensioni piane di una lastra di calcestruzzo rettangolare al centro della quale è praticato un foro asolato (Figura 4.43). Anche in questo caso sui lati verticali dell'elemento sono applicate due distribuzioni di spostamenti costanti, al fine di simulare lo stato di trazione uniassiale.

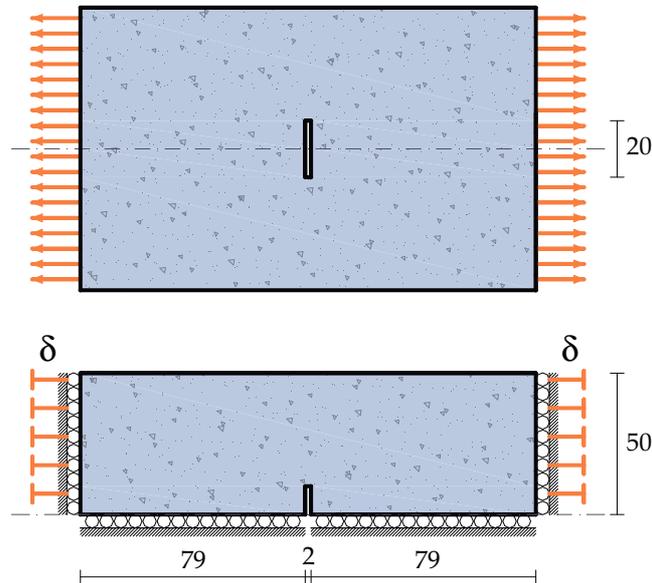


Figura 4.43: Lastra con asola e modello di calcolo. Dimensioni in millimetri.

Per i parametri costitutivi sono stati assunti gli stessi valori scelti per l'applicazione discussa al paragrafo precedente.

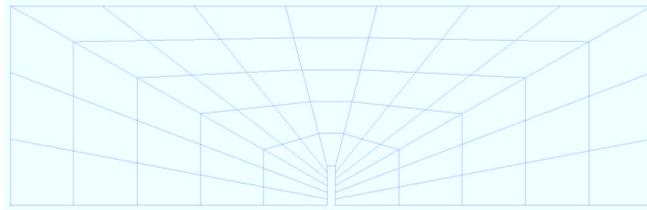
Nella Tabella 4.8 sono riportati a confronto i risultati delle analisi condotte con le tre discretizzazioni schematizzate nella Figura 4.44, utilizzando elementi bilineari con salto costante ( $4L/\text{cost}$ ) ed elementi biquadratici a salto lineare ( $8Q/\text{lin}$ ).

Nelle Figure 4.45(a) e 4.45(b) sono riportati a confronto rispettivamente gli andamenti della risultante delle trazioni e dello spostamento trasversale ottenuti attraverso le analisi condotte con le diverse discretizzazioni ed elementi bilineari con salto costante. Un confronto analogo è riportato nelle Figure 4.46(a) e 4.46(b) per gli elementi biquadratici con salto lineare. In tal caso le curve relative alle mesh A

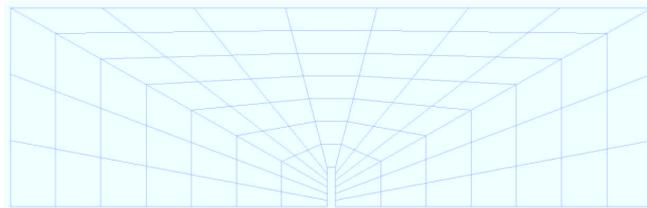
Tabella 4.8: Lastra con asola.

Analisi	Elem/ Salto	Nodi	Tempo [sec]	$\delta_p$ [mm]	$F_p$ [N]	$\mathcal{E}_u$ [Nmm]
LmeshA	4L/cost	84	1155	0.0082	138	0
LmeshB	4L/cost	112	1659	0.0082	136	0
LmeshC	4L/cost	140	2294	0.0082	135	0
QmeshA	8Q/lin	232	4118	0.0081	126	0
QmeshB	8Q/lin	314	7159	0.0081	126	0

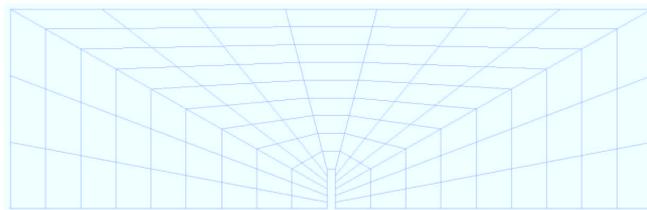
e mesh B risultano coincidenti. Non si è ritenuto pertanto necessario condurre l'analisi anche con la mesh C. Tali confronti non mettono in evidenza significative differenze al variare della mesh, riconfermando il carattere mesh-independency del metodo, ma, come si evince dalla Figura 4.47(a) e dalla Tabella 4.8, i modelli con salto costante conducono ancora una volta ad una sovrastima del carico di picco dell'8% circa rispetto al corrispondente modello con salto lineare. Nelle Figure 4.49 e 4.50 sono riportate le configurazioni deformate al variare della discretizzazione e del tipo di elementi utilizzati.



(a)

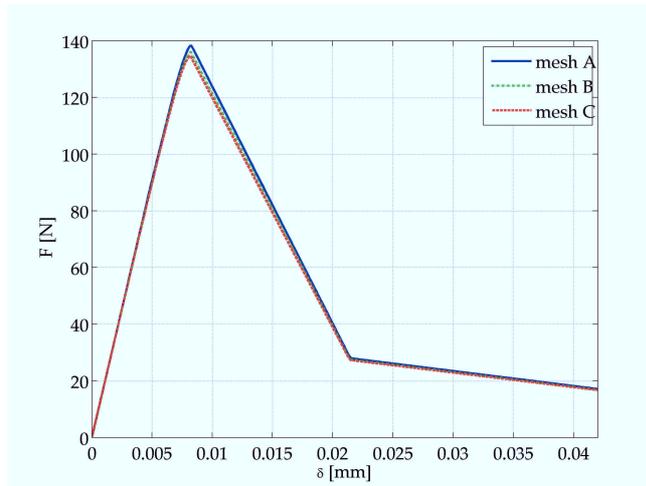


(b)

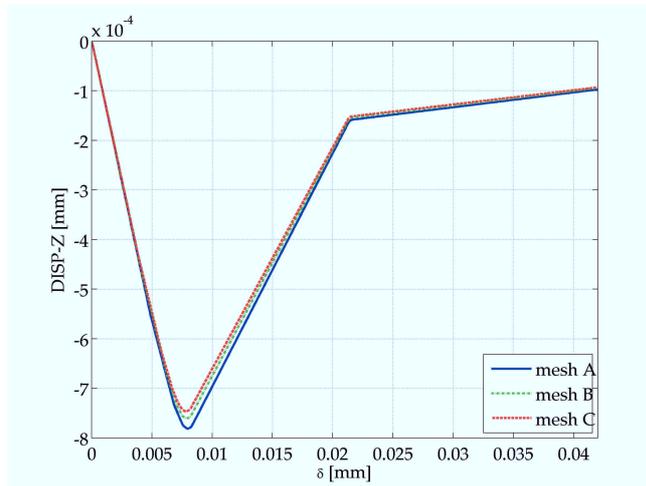


(c)

Figura 4.44: Lastra con asola. Discretizzazioni adottate: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C.

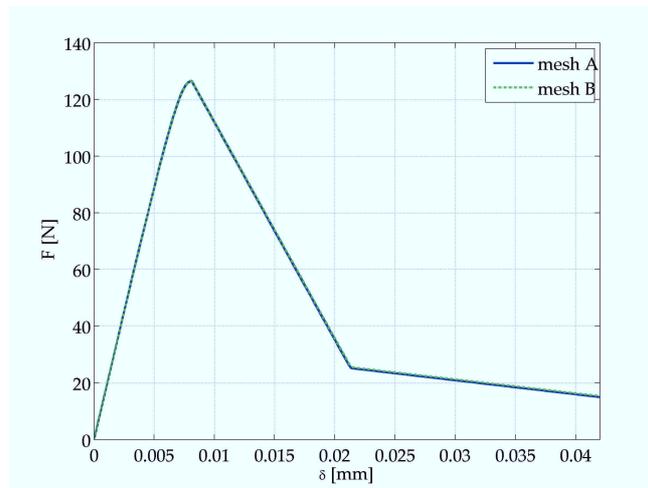


(a)

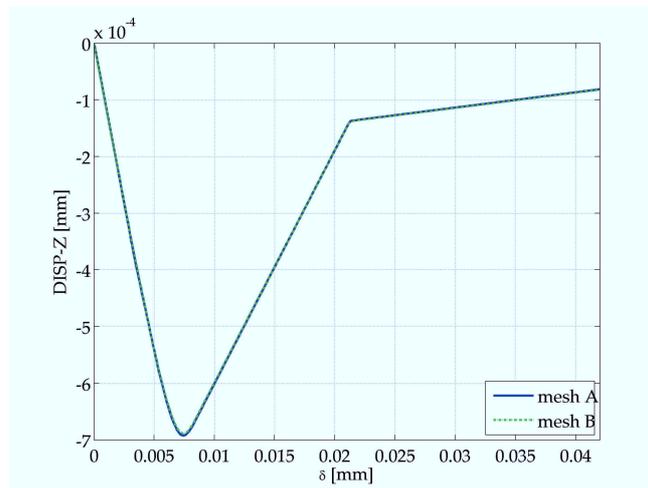


(b)

Figura 4.45: Lastra con asola. Elemento 4L/cost. Confronti tra le discretizzazioni mesh A, mesh B e mesh C: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale.

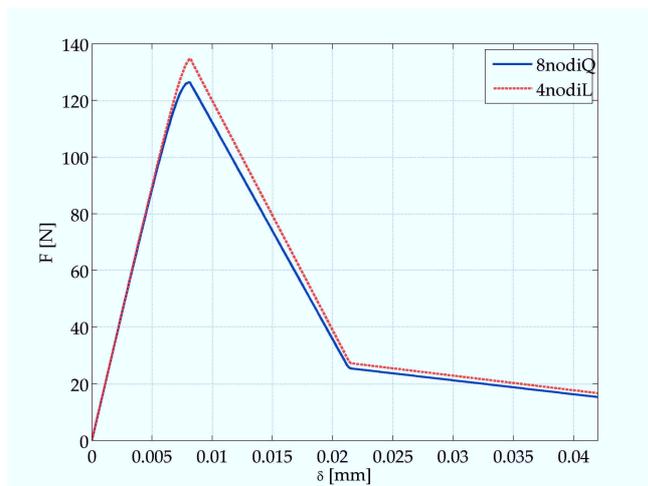


(a)

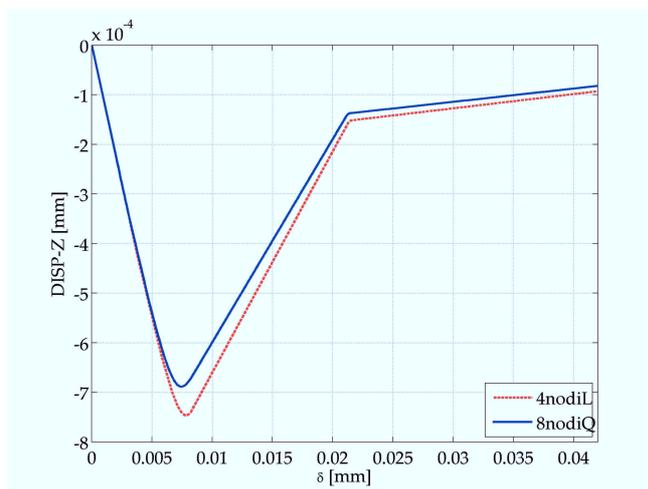


(b)

Figura 4.46: Lastra con asola. Elemento 8Q/lin. Confronti tra le discretizzazioni mesh A, mesh B e mesh C: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale.

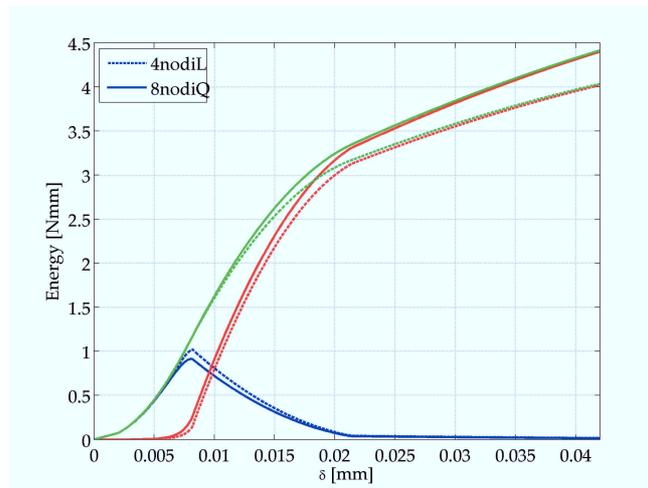


(a)

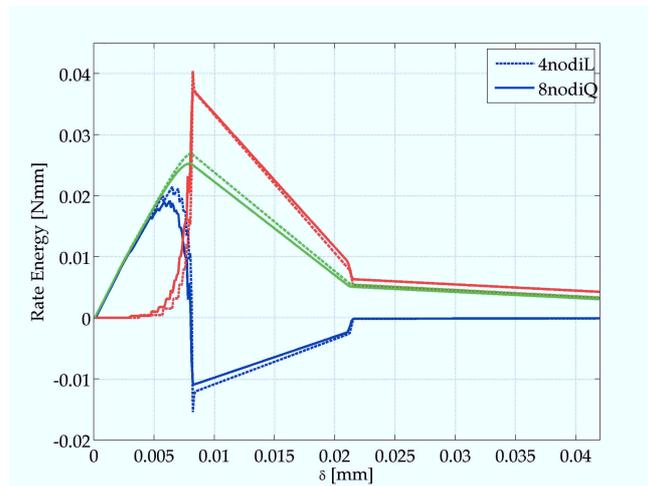


(b)

Figura 4.47: Lastra con asola. Confronto tra elementi 4L/cost (mesh C) e 8Q/lin (mesh B): (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale.



(a)



(b)

Figura 4.48: Lastra con asola. Confronto tra elementi 4L/cost (mesh C) e 8Q/lin (mesh B). Bilancio energetico: (a) in termini totali (b) in termini incrementali.

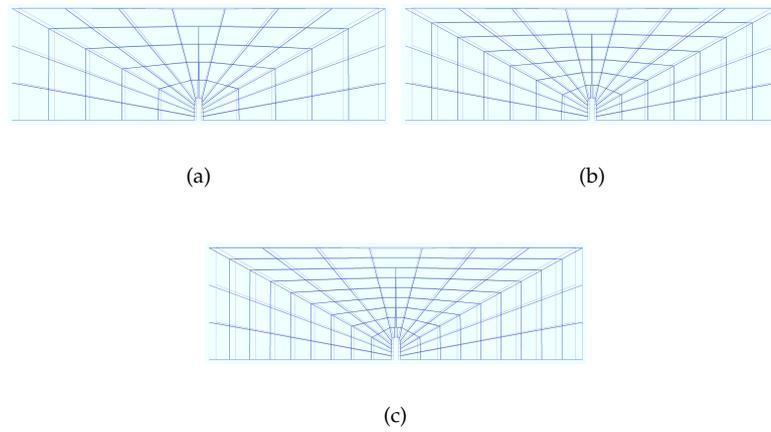


Figura 4.49: Lastra con asola. Elemento 4L/cost. Configurazione deformata. Discretizzazione: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C.

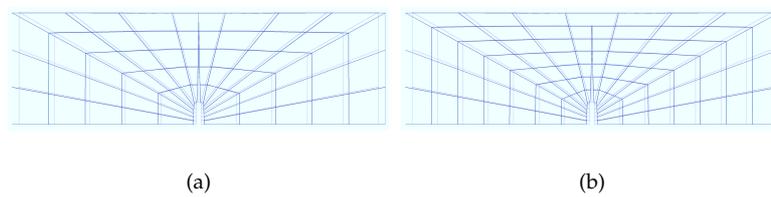


Figura 4.50: Lastra con asola. Elemento 8Q/lin. Configurazione deformata. Discretizzazione: (a) mesh A e (b) mesh B.

## 4.5 Lastra con intaglio circolare

Si è studiato il comportamento in regime di tensioni piane di una lastra di calcestruzzo rettangolare nella quale è praticato un intaglio circolare in corrispondenza della mezzeria del bordo inferiore (Figura 4.51). Sui lati verticali dell'elemento sono applicate due distribuzioni di spostamenti lineari.

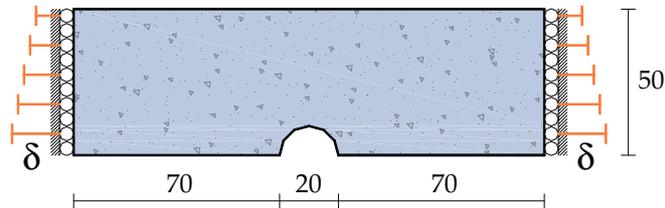


Figura 4.51: Lastra con intaglio circolare. Dimensioni in millimetri.

Per i parametri costitutivi dei materiali sono stati assunti gli stessi valori scelti per l'applicazione discussa al paragrafo 4.3.

Nella Tabella 4.9 sono riportati a confronto i risultati delle analisi condotte con le tre discretizzazioni schematizzate nelle Figure 4.36, utilizzando elementi bilineari con salto costante (4L/cost) ed elementi biquadratici a salto lineare (8Q/lin).

Tabella 4.9: Lastra con intaglio circolare.

Analisi	Elem/ Salto	Nodi	Tempo [sec]	$\delta_p$ [mm]	$F_p$ [N]	$\mathcal{E}_u$ [Nmm]
LmeshA	4L/cost	84	1226	0.0082	138	0.296
LmeshB	4L/cost	112	1819	0.0085	133	0.238
LmeshC	4L/cost	180	3407	0.0086	130	0.192
QmeshA	8Q/lin	232	4548	0.0071	109	0
QmeshB	8Q/lin	314	7854	0.0074	109	0
QmeshC	8Q/lin	512	22400	0.0075	109	0

Nelle Figure 4.52(a) e 4.52(b) sono riportati a confronto rispettivamente gli andamenti della risultante delle trazioni e dello spostamento trasversale ottenuti attraverso le analisi condotte con le diverse discretizzazioni ed elementi bilineari con salto costante. Da tali figure e dalla Tabella 4.9 si notano differenze fino al 6% nella stima del carico di picco. Inoltre, per valori dello spostamento impresso  $\delta$  maggiori di 0.02 mm,

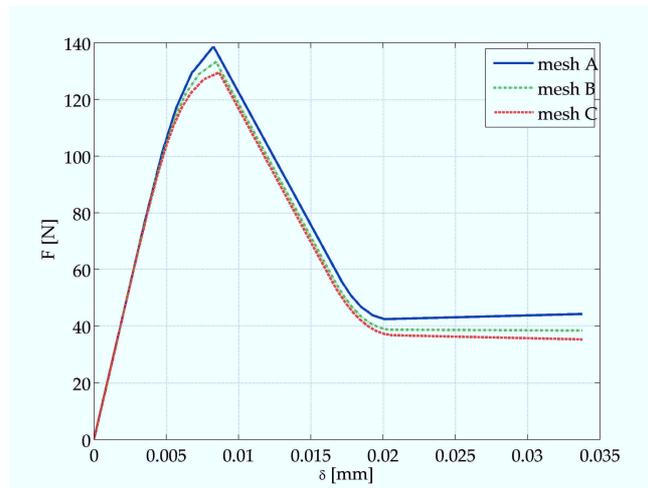
l'analisi condotta utilizzando la mesh A predice una fase post picco in-crudente, in totale disaccordo con il legame softening dell'interfaccia. Tale effetto è mitigato adottando discretizzazioni più fitte quali la mesh B e la mesh C.

Un confronto analogo è riportato nelle Figure 4.53(a) e 4.53(b) per gli elementi biquadratici con salto lineare, dal quale invece non si apprezzano significative differenze al variare della mesh, confermando la mesh-independency del metodo.

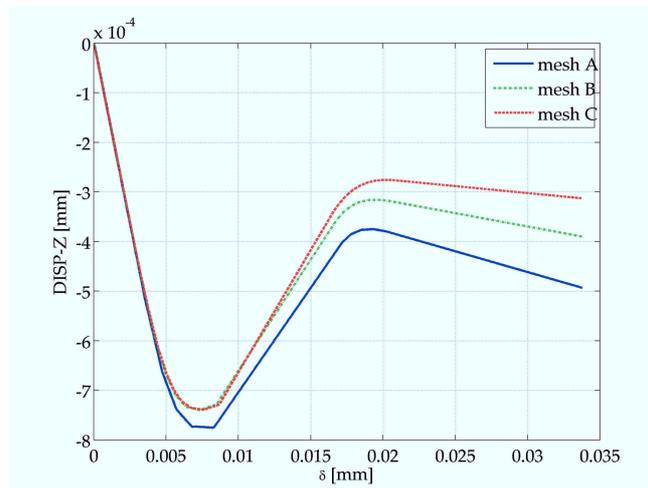
Dalla Figura 4.54(a) e dalla Tabella 4.9 si evince che i modelli con salto costante conducono ad una sovrastima del carico di picco del 20% circa rispetto al corrispondente modello con salto lineare.

Nelle Figure 4.55(a) e 4.55(b) è riportato, rispettivamente in termini totali ed in termini incrementali, il bilancio energetico in corrispondenza dei diversi istanti delle analisi condotte con la discretizzazione mesh C, utilizzando elementi bilineari con salto costante (curve tratteggiate) e biquadratici con salto lineare (curve continue). Dal confronto si evince la presenza del fenomeno dello shear locking nel caso di elementi con salto costante, assente nel caso di elementi con salto lineare. Si nota inoltre che il modello con elementi a quattro nodi con salto costante sottostima l'energia dissipata attraverso l'interfaccia e sovrastima l'energia di deformazione accumulata nel continuo rispetto al modello con elementi a otto nodo con salto lineare.

Nelle Figure 4.56 e 4.57 sono riportate le configurazioni deformate al variare della discretizzazione e del tipo di elementi utilizzati.

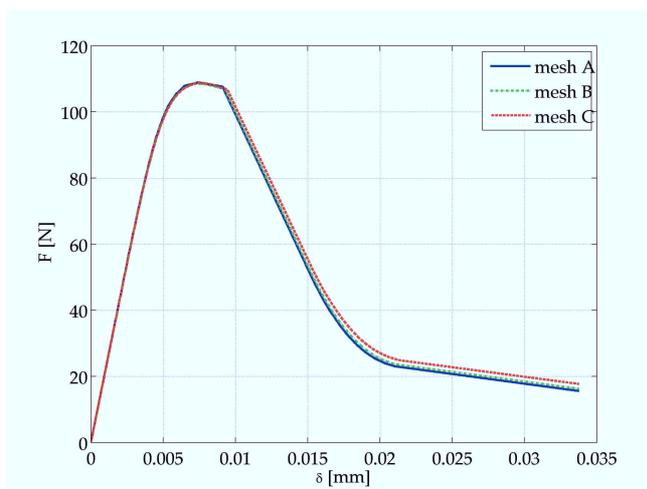


(a)

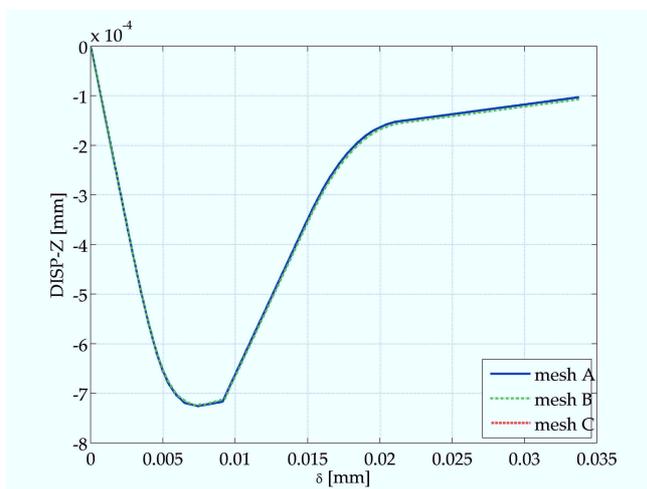


(b)

Figura 4.52: Lastra con intaglio circolare. Elemento 4L/cost. Confronti tra le discretizzazioni mesh A, mesh B e mesh C: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale.

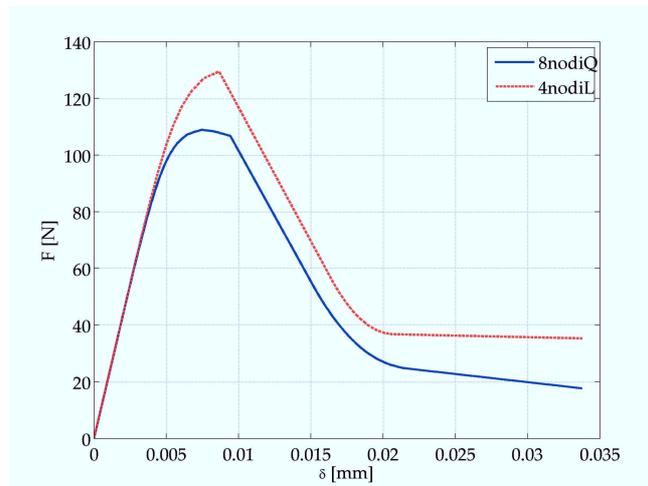


(a)

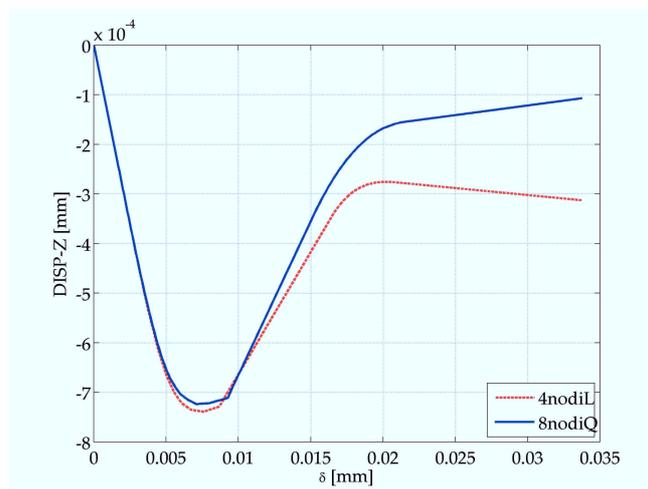


(b)

Figura 4.53: Lastra con intaglio circolare. Elemento 8Q/lin. Confronti tra le discretizzazioni mesh A, mesh B e mesh C: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale.

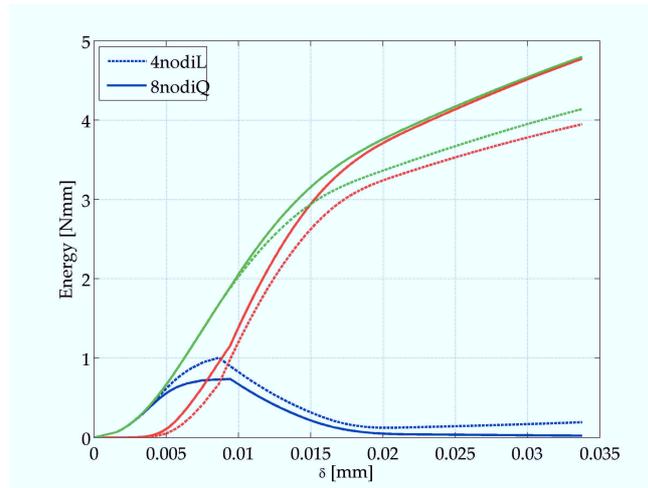


(a)

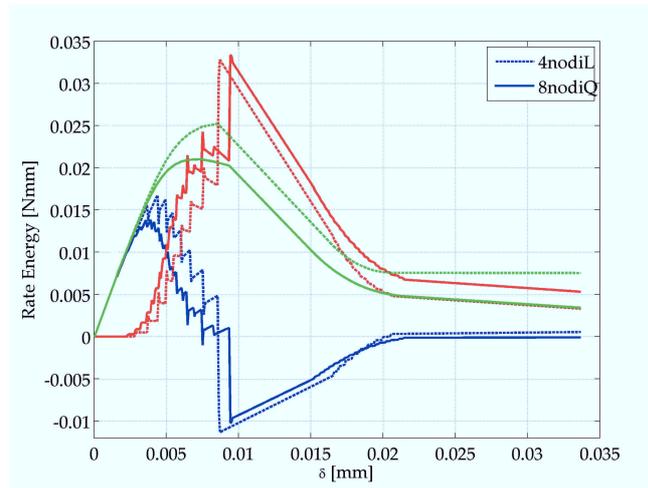


(b)

Figura 4.54: Lastra con intaglio circolare. Mesh C. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale.



(a)



(b)

Figura 4.55: Lastra con intaglio circolare. Mesh C. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin. Bilancio energetico: (a) in termini totali (b) in termini incrementali.

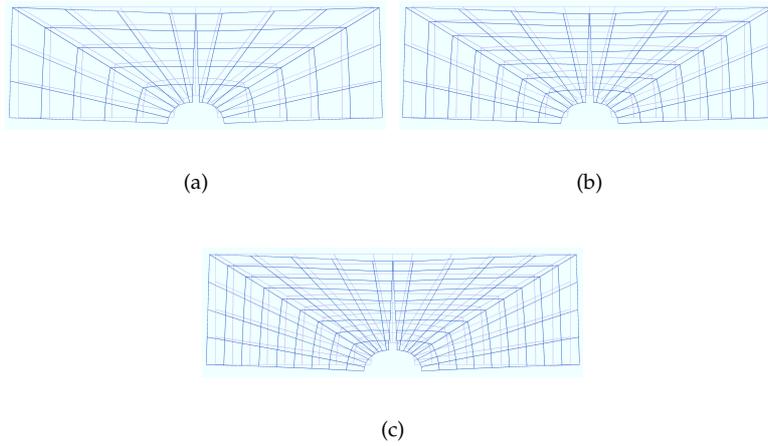


Figura 4.56: Lastra con intaglio circolare. Elemento 4L/cost. Configurazione deformata. Discretizzazione: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C.

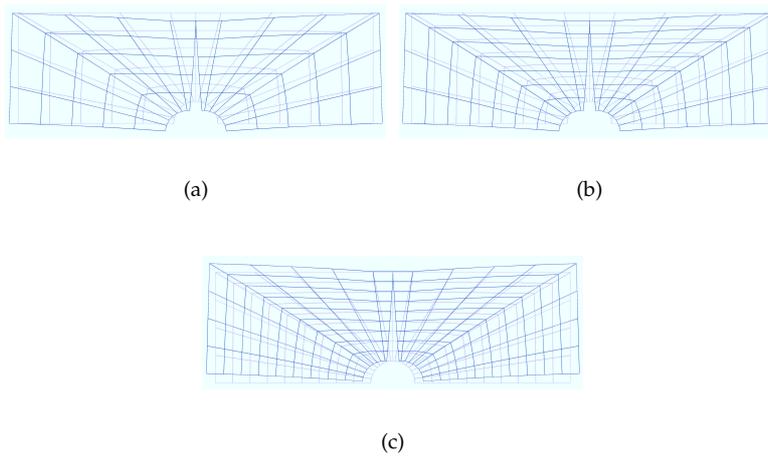


Figura 4.57: Lastra con intaglio circolare. Elemento 8Q/lin. Configurazione deformata. Discretizzazione: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C.

## 4.6 Lastra con intaglio ad asola

Si è studiato il comportamento in regime di tensioni piane di una lastra di calcestruzzo rettangolare nella quale è praticato un intaglio ad asola in corrispondenza della mezzeria del bordo inferiore (Figura 4.58). Sui lati verticali dell'elemento sono applicate due distribuzioni di spostamenti lineari.

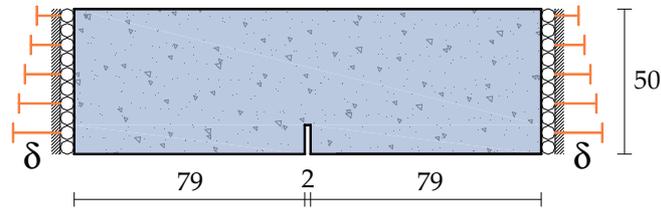


Figura 4.58: Lastra con intaglio ad asola. Dimensioni in millimetri.

Per i parametri costitutivi dei materiali sono stati assunti gli stessi valori scelti per l'applicazione discussa al paragrafo 4.3.

Nella Tabella 4.10 sono riportati a confronto i risultati delle analisi condotte con le tre discretizzazioni schematizzate nelle Figure 4.44, utilizzando elementi bilineari con salto costante ed elementi biquadratici a salto lineare.

Tabella 4.10: Lastra con intaglio ad asola.

Analisi	Elem/ Salto	Nodi	Tempo [sec]	$\delta_p$ [mm]	$F_p$ [N]	$\mathcal{E}_u$ [Nmm]
LmeshA	4L/cost	84	1181	0.0083	143	0.321
LmeshB	4L/cost	112	1790	0.0084	136	0.253
LmeshC	4L/cost	140	2492	0.0085	133	0.221
QmeshA	8Q/lin	232	4537	0.0073	108	0
QmeshB	8Q/lin	314	7887	0.0070	108	0
QmeshC	8Q/lin	396	12851	0.0075	108	0

Nelle Figure 4.59(a) e 4.59(b) sono riportati a confronto rispettivamente gli andamenti della risultante delle trazioni e dello spostamento trasversale ottenuti attraverso le analisi condotte con le diverse discretizzazioni ed elementi bilineari con salto costante. Da tali Figure e dalla Tabella 4.10 si notano differenze fino all'8% nella stima del carico di picco. Inoltre anche in questo caso, per valori dello spostamento im-

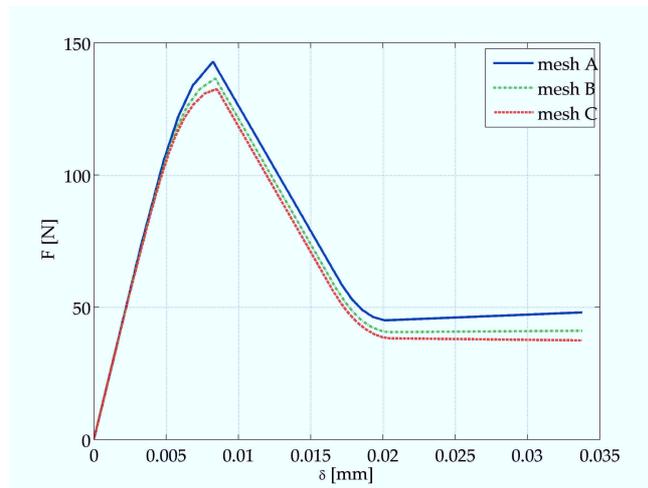
presso  $\delta$  maggiori di 0.02 mm, l'analisi condotta utilizzando la mesh A predice una fase post picco inrudente, in totale disaccordo con il legame softening dell'interfaccia. Tale effetto viene mitigato adottando discretizzazioni più fitte.

Un confronto analogo è riportato nelle Figure 4.60(a) e 4.60(b) per gli elementi biquadratici con salto lineare, dal quale invece non si apprezzano significative differenze al variare della mesh.

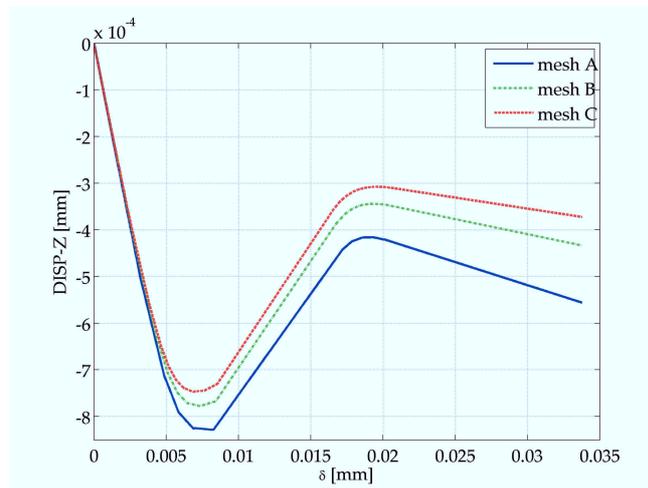
Dalla Figura 4.61(a) e dalla Tabella 4.10 si evince che i modelli con salto costante conducono ad una sovrastima del carico di picco del 23% circa rispetto al corrispondente modello con salto lineare.

Nelle Figure 4.62(a) e 4.62(b) è riportato, rispettivamente in termini totali ed in termini incrementali, il bilancio energetico in corrispondenza dei diversi istanti delle analisi condotte con la discretizzazione mesh C, utilizzando elementi bilineari con salto costante (curve tratteggiate) e biquadratici con salto lineare (curve continue). Il confronto evidenzia anche in questo caso la presenza del fenomeno dello shear locking nel caso di elementi con salto costante, assente nel caso di elementi con salto lineare. Si nota inoltre che il modello con elementi a quattro nodi con salto costante sottostima l'energia dissipata attraverso l'interfaccia e sovrastima l'energia di deformazione accumulata nel continuo rispetto al modello con elementi a otto nodo con salto lineare.

Nelle Figure 4.63 e 4.64 sono riportate le configurazioni deformate al variare della discretizzazione e del tipo di elementi utilizzati.

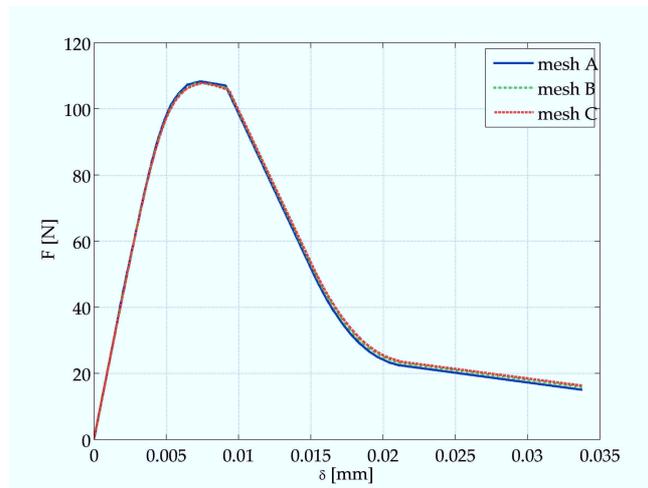


(a)

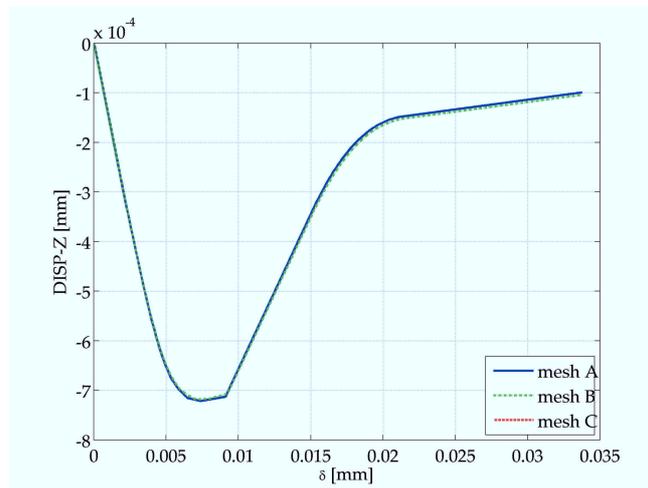


(b)

Figura 4.59: Lastra con intaglio ad asola. Elemento 4L/cost. Confronti tra le discretizzazioni mesh A, mesh B e mesh C: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale.

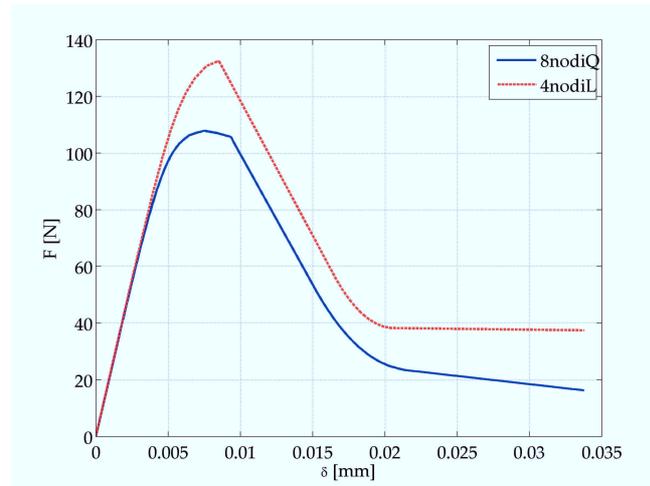


(a)

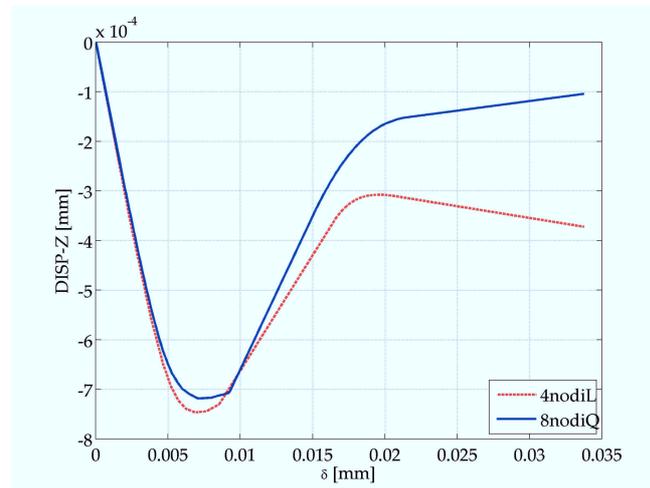


(b)

Figura 4.60: Lastra con intaglio ad asola. Elemento 8Q/lin. Confronti tra le discretizzazioni mesh A, mesh B e mesh C: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale.

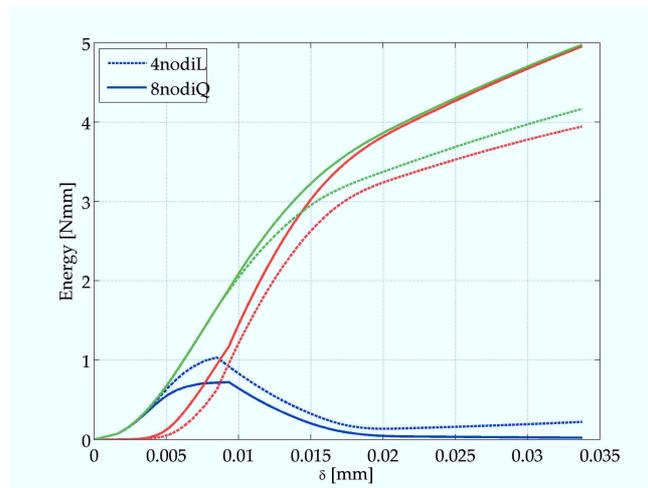


(a)

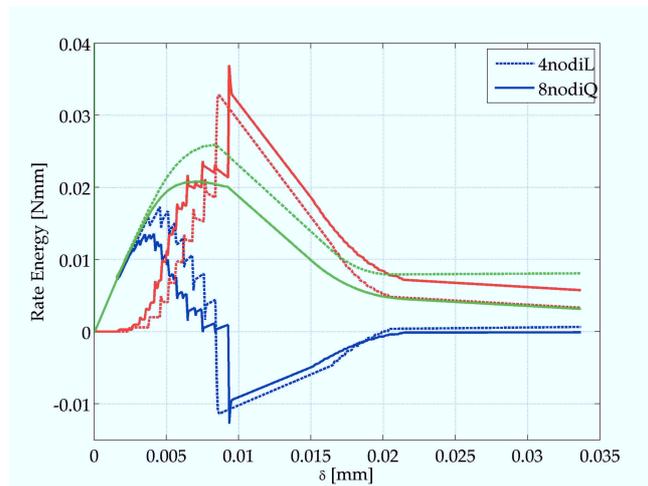


(b)

Figura 4.61: Lastra con intaglio ad asola. Mesh C. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin: (a) curva carico spostamento (b) spostamento trasversale.



(a)



(b)

Figura 4.62: Lastra con intaglio ad asola. Mesh C. Confronto tra elementi 4L/cost e 8Q/lin. Bilancio energetico: (a) in termini totali (b) in termini incrementali.

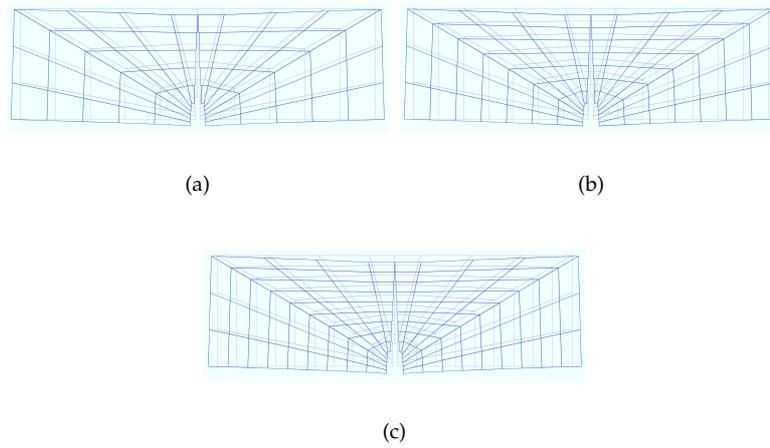


Figura 4.63: Lastra con intaglio ad asola. Elemento 4L/cost. Configurazione deformata. Discretizzazione: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C.

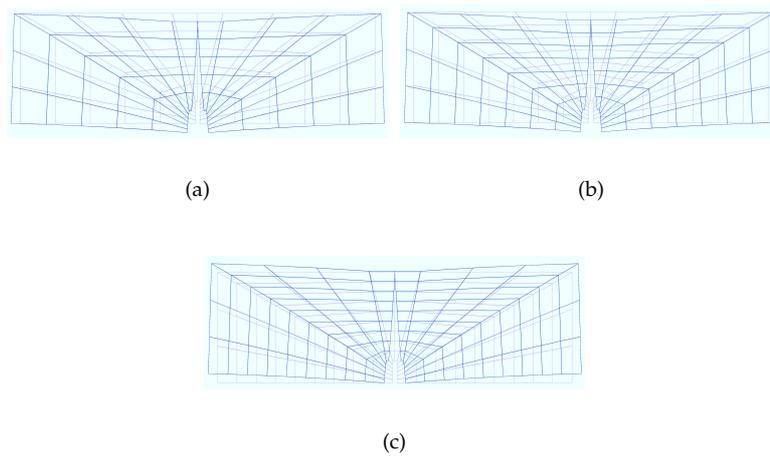


Figura 4.64: Lastra con intaglio ad asola. Elemento 8Q/lin. Configurazione deformata. Discretizzazione: (a) mesh A, (b) mesh B e (c) mesh C.

## 4.7 Prova di flessione su tre punti di una trave con intaglio centrale

In questo paragrafo vengono descritti i risultati delle analisi numeriche condotte al fine di modellare una delle prove di laboratorio eseguite per misurare sperimentalmente l'energia di frattura del calcestruzzo (Figura 4.65). Le modalità della prova sono regolamentate dalle Raccomandazioni RILEM [9, 57].

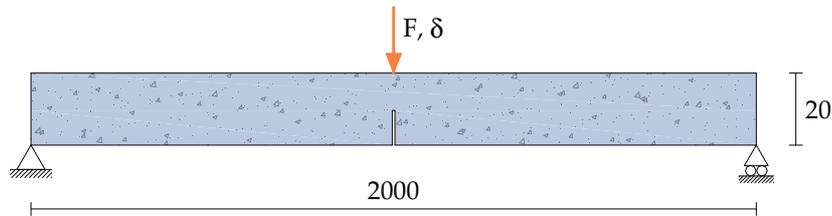


Figura 4.65: Schema della prova a flessione su tre punti.

Si tratta di una trave in calcestruzzo di lunghezza 2000 mm, appoggiata alle estremità, con sezione rettangolare 50x200 mm, in corrispondenza della cui mezzeria è praticato un intaglio profondo 100 mm. La prova consiste nell'imporre lo spostamento in corrispondenza della sezione dove è stato praticato l'intaglio e misurare la forza corrispondente [1].

I valori dei parametri costitutivi adottati per il continuo sono [1]:

- modulo elastico  $E = 30000 \text{ [N/mm}^2\text{]}$
- coefficiente di Poisson  $\nu = 0.2$

mentre per l'interfaccia con softening bilineare:

- resistenza a trazione  $f_0 = 2.6 \text{ [N/mm}^2\text{]}$ ; il valore della resistenza a trazione è stata ridotta del 20% in accordo a quanto previsto in [54]
- energia di frattura  $G_f = 0.115 \text{ [N/mm]}$
- modulo di softening del primo ramo  $H_{S1} = -66.6 \text{ [N/mm}^3\text{]}$
- modulo di softening del secondo ramo  $H_{S2} = -6.0 \text{ [N/mm}^3\text{]}$
- apertura critica  $w_{cr} = 0.15 \text{ [mm]}$ .

La funzione di attivazione, corrispondente al criterio della massima tensione normale di Rankine è del tipo:

$$g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = \mathbf{t}_S^T \mathbf{n} - f_0 - \chi_S.$$

Sono state condotte tre analisi numeriche, impiegando elementi bilineari con salto costante ed elementi biquadratici con salto lineare, adottando le discretizzazioni rappresentate nelle Figure 4.66.

Nel seguito le diverse simulazioni numeriche saranno contrassegnate dalle sigle:

- **L5elem**, sono impiegati elementi bilineari a quattro nodi con salto costante, adottando la discretizzazione di Figura 4.66(a).
- **L14elem**, sono impiegati elementi bilineari a quattro nodi con salto costante, adottando la discretizzazione di Figura 4.66(c).
- **Q5elem**, sono impiegati elementi biquadratici a otto nodi con salto lineare, adottando la discretizzazione di Figura 4.66(b).

Dalla Figura 4.67, dove vengono confrontati i dati sperimentali riportati in [1] ed i risultati ottenuti dalle analisi numeriche condotte con il codice FracSDA8, e dalla Tabella 4.11 si evince che tutte le analisi colgono qualitativamente il comportamento della trave con l'intaglio. I modelli L5elem e L14elem, che utilizzano elementi bilineari a quattro nodi con salto costante, sovrastimano il carico di picco rispettivamente del 33% e dell'8%, e presentano un ramo incrudente per valori dello spostamento impresso  $\delta$  maggiori di 0.55 mm, dovuto al fenomeno dello shear locking. Il modello Q5elem, che utilizza elementi biquadratici a otto nodi con salto lineare, coglie bene il comportamento della trave: la stima del carico di picco differisce dal valore misurato sperimentalmente meno del 2%.

Tabella 4.11: Prova di flessione su tre punti.

Analisi	Elem/ Salto	Nodi	Tempo [sec]	$\delta_p$ [mm]	$F_p$ [N]
L5elem	4L/cost	176	2616	0.3968	955
L14elem	4L/cost	380	13512	0.3407	780
Q5elem	8Q/lin	400	5432	0.3259	732
exper	-	-	-	0.34	720

La mancanza di convergenza mostrata in Figura 4.67 per l'analisi condotta utilizzando elementi biquadratici a otto nodi con appros-

simazione lineare del salto ( $8Q/\text{lin}$ ) è probabilmente da attribuire alla presenza di tensioni tangenziali. Infatti, come visto nel caso delle applicazioni di lastra con intaglio circolare e lastra con intaglio ad asola, illustrate rispettivamente nei paragrafi 4.5 e 4.6, in assenza di tensioni tangenziali la convergenza è assicurata anche in presenza di discretizzazioni non particolarmente fitte.

Nelle Figure 4.68(a) e 4.68(b) è riportato, rispettivamente in termini totali ed in termini incrementali, il bilancio energetico in corrispondenza dei diversi istanti delle analisi condotte con i modelli L14elem (linea tratteggiata) e Q5elem (linea continua). Il confronto mostra la presenza del fenomeno dello shear locking nel caso di elementi con salto costante, assente nel caso di elementi con salto lineare. Si nota inoltre che il modello con elementi a quattro nodi con salto costante sottostima l'energia dissipata attraverso l'interfaccia e sovrastima l'energia di deformazione accumulata nel continuo rispetto al modello con elementi a otto nodo con salto lineare.

Dalle Figure 4.69 e 4.70, dove viene riportata la configurazione deformata della trave, si può osservare l'innesco dell'interfaccia, che avviene in corrispondenza dell'intaglio, e la successiva propagazione dell'interfaccia, collineare alla direzione dell'intaglio.

Dal confronto tra la deformata del modello L5elem (Figura 4.71) e la deformata del modello Q5elem (Figura 4.72) si osserva che l'elemento con salto lineare approssima meglio la geometria dell'interfaccia negli istanti successivi alla sua apertura, in quanto i salti presenti lungo l'interfaccia stessa risultano di ampiezza minore.

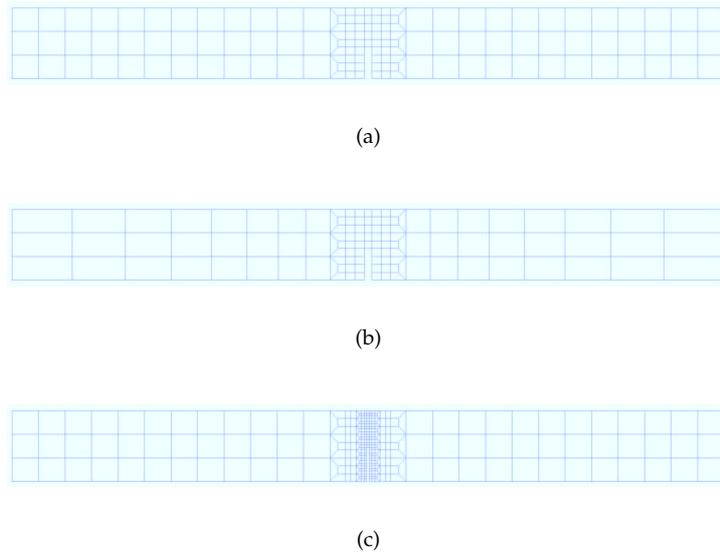


Figura 4.66: Mesh utilizzate per discretizzare la prova di flessione su tre punti: (a) L5elem, (b) Q5elem e (c) L14elem.

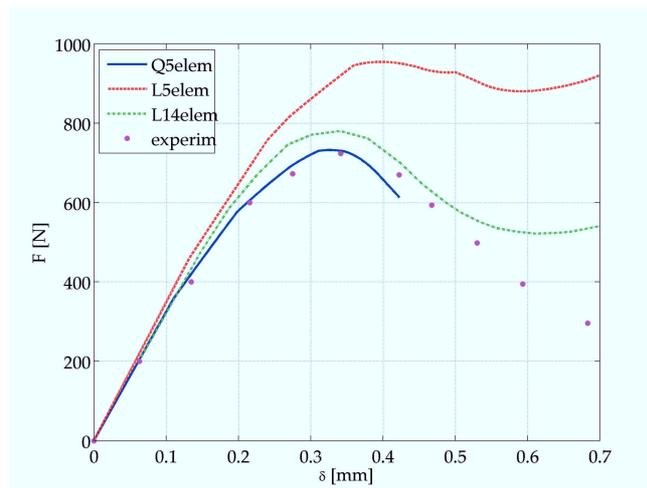
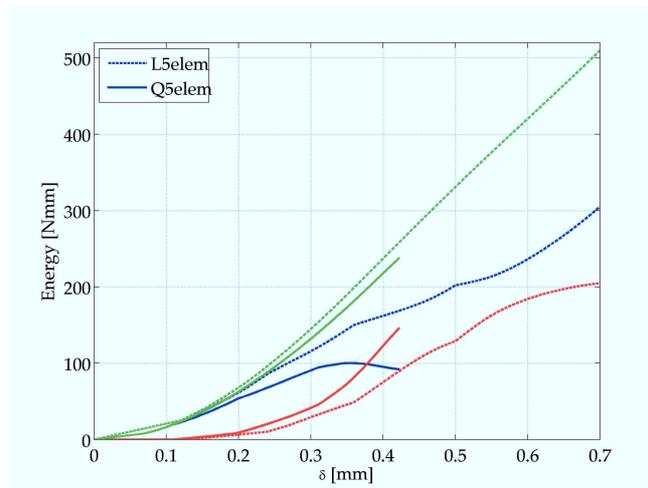
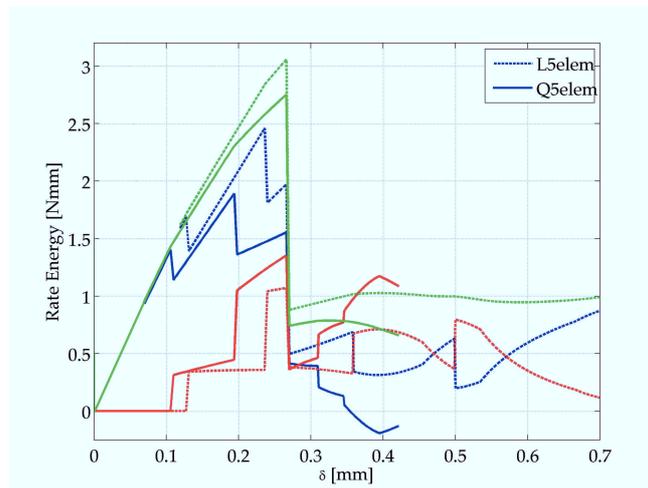


Figura 4.67: Prova di flessione su tre punti. Confronto tra le analisi numeriche L5elem, L14elem, Q5elem e i risultati sperimentali. Curva carico spostamento.



(a)



(b)

Figura 4.68: Prova di flessione su tre punti. Confronto tra le analisi numeriche L14elem e Q5elem. Bilancio energetico: (a) in termini totali (b) in termini incrementali.

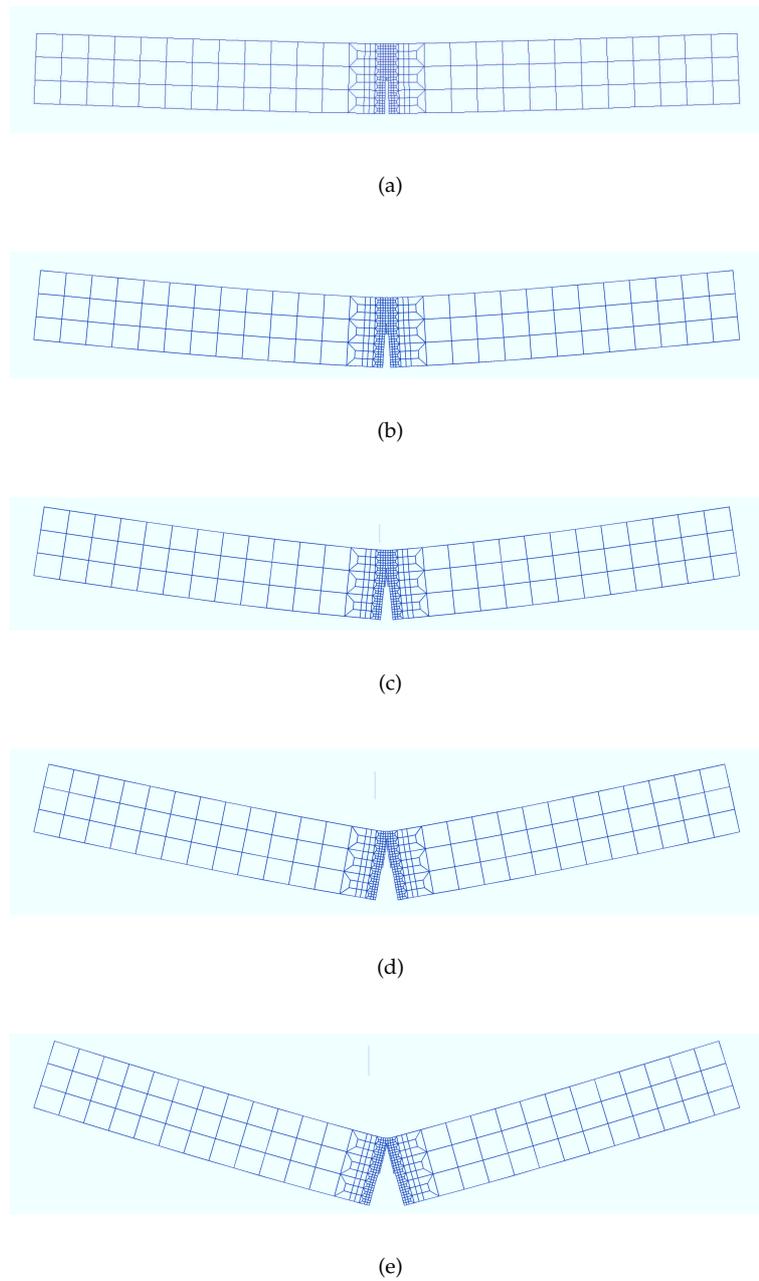


Figura 4.69: Prova di flessione su tre punti. Elementi 4L/cost. Mesh L14elem. Configurazione deformata. Istanti: (a) 5 ( $\delta=0.06$  mm), (b) 39 ( $\delta=0.17$  mm), (c) 92 ( $\delta=0.31$  mm), (d) 254 ( $\delta=0.47$  mm) e (e) 463 ( $\delta=0.7$  mm).

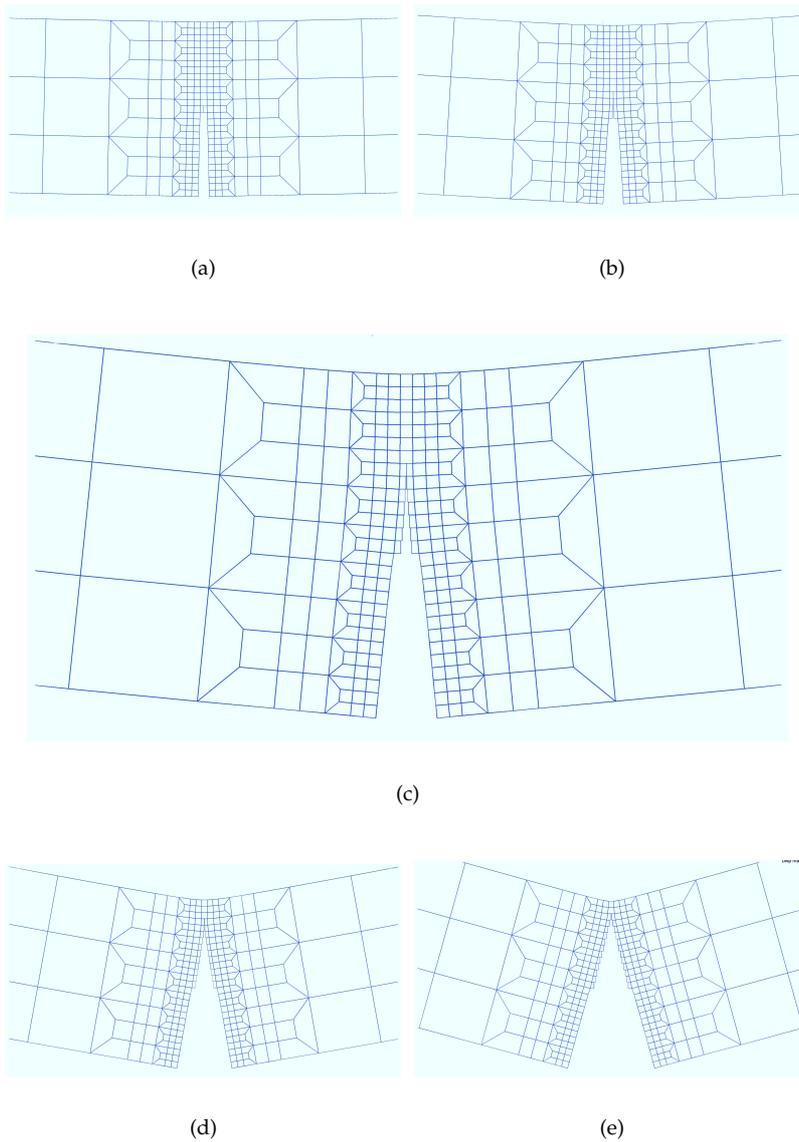
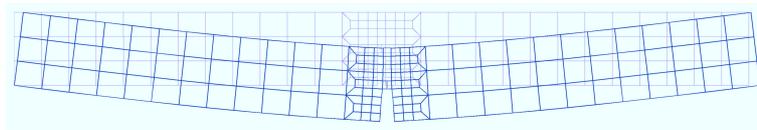
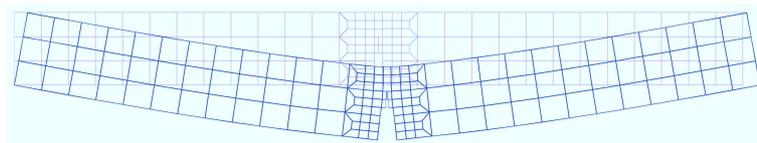


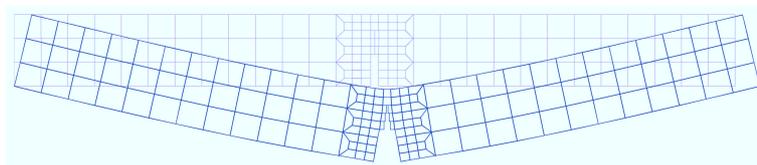
Figura 4.70: Prova di flessione su tre punti. Elementi 4L/cost. Mesh L14elem. Particolare della configurazione deformata. Istanti: (a) 5 ( $\delta=0.06$  mm), (b) 39 ( $\delta=0.17$  mm), (c) 92 ( $\delta=0.31$  mm), (d) 254 ( $\delta=0.47$  mm) e (e) 463 ( $\delta=0.7$  mm).



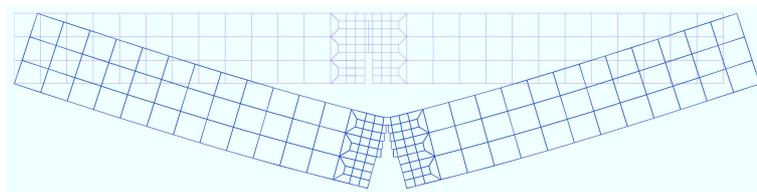
(a)



(b)

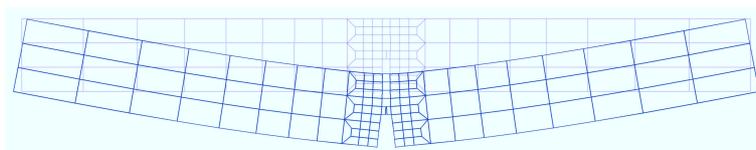


(c)

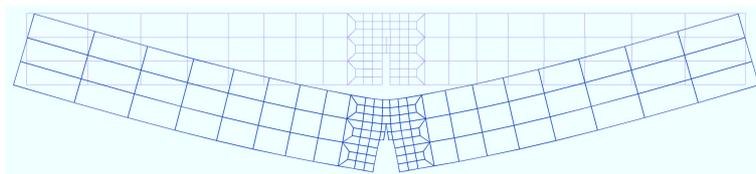


(d)

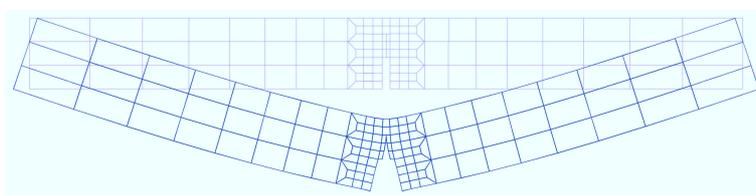
Figura 4.71: Prova di flessione su tre punti. Elementi 4L/cost. Mesh L5elem. Configurazione deformata. Istanti: (a) 32 ( $\delta=0.22$  mm), (b) 122 ( $\delta=0.35$  mm), (c) 252 ( $\delta=0.49$  mm) e (d) 443 ( $\delta=0.7$  mm).



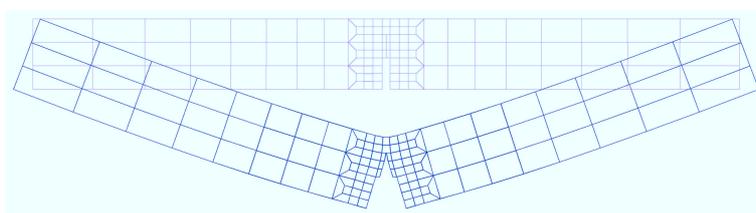
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 4.72: Prova di flessione su tre punti. Elementi 8Q/lin. Mesh Q5elem. Configurazione deformata. Istanti: (a) 32 ( $\delta=0.22$  mm), (b) 82 ( $\delta=0.3$  mm), (c) 132 ( $\delta=0.35$  mm) e (d) 192 ( $\delta=0.42$  mm).

## 4.8 Prova di trazione e taglio su un provino con doppio intaglio

In questo paragrafo viene presentato un esempio di propagazione delle interfacce su traiettorie curve. Si tratta della simulazione di una delle prove di trazione e taglio sul provino con doppio intaglio condotte nel 1992 da Nooru-Mohamed [42, 54].

Lo schema della prova è riportato in Figura 4.73(a), dal quale si evince che le facce del provino sono fissate a due elementi a L in acciaio: sull'elemento superiore, libero di traslare in entrambe le direzioni ma non di ruotare, vengono applicati i carichi mentre quello inferiore, fisso, funge da contrasto. Il provino è costituito da una lastra in calcestruzzo quadrata di spessore 50 mm, il cui lato misura 200 mm, nella quale sono praticati due intagli simmetrici di profondità pari a 25 mm.

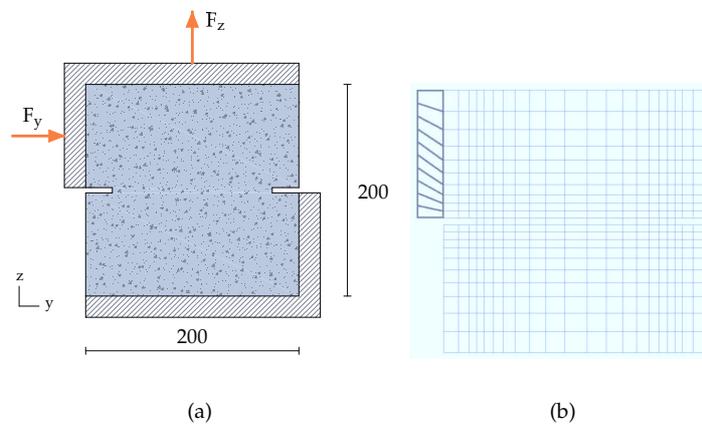


Figura 4.73: (a) Schema della prova di trazione e taglio su un provino con doppio intaglio. (b) Mesh adottata per la simulazione numerica.

Il percorso di carico è articolato in due fasi. Durante la prima fase, il provino viene caricato incrementando la forza di taglio  $F_y$ , mantenendo bloccata la rotazione e la traslazione verticale del piatto superiore. Una volta raggiunto il valore di 5 kN, inizia la seconda fase di carico, durante la quale la forza di taglio  $F_y$  viene mantenuta costante e viene incrementato lo spostamento verticale del piatto superiore, misurando la forza normale  $F_z$ .

I parametri costitutivi dei materiali sono stati dedotti dai dati sperimentali forniti in [42] e riportati in [54]: resistenza a compressione cubica  $R_c=46.19$  MPa, resistenza a trazione ottenuta da prova di trazione indiretta pari a  $f_s=3.67$  MPa, modulo elastico assunto pari a 29000 MPa. Il valore della resistenza a trazione  $f_t$ , valutato con la formula empirica  $f_t = 0.8f_s$  [54], è assunto pari a 3 MPa. Per l'energia di frattura  $G_f$  si è considerato lo stesso valore adottato in [54], pari a 110 J/m<sup>2</sup>.

Si assume inoltre il valore 0.2 per il coefficiente di contrazione trasversale o di Poisson. Per l'interfaccia infine si considera una legge costitutiva con softening bilineare, assumendo  $H_{S1} = -60.0$  N/mm<sup>3</sup>,  $H_{S2} = -6.0$  N/mm<sup>3</sup> e  $w_{cr} = 0.15$  mm. La funzione di attivazione, corrispondente al criterio della massima tensione normale di Rankine è del tipo:

$$g_S(\mathbf{t}_S, \chi_S) = \mathbf{t}_S^T \mathbf{n} - f_0 - \chi_S$$

Nella Figura 4.73(b) è schematizzata la discretizzazione adottata per condurre l'analisi numerica, eseguita utilizzando elementi bilineari a quattro nodi con salto costante.

Dai confronti di Figura 4.74, dove vengono confrontati i dati sperimentali riportati in [42, 54] ed i risultati ottenuti dall'analisi numeriche condotte con il codice FracSDA8 e di Tabella 4.12 si evince che l'analisi numerica coglie bene il comportamento del provino, sovrastimando il carico di picco del 13% circa. Tuttavia la simulazione numerica non rie-

Tabella 4.12: Prova di trazione e taglio.

Analisi	Elem/ Salto	Nodi	Tempo [sec]	$\delta_p$ [mm]	$F_p$ [N]
numer	4L/cost	495	16610	0.0153	16213
exper	-	-	-	0.0178	14300

sce a cogliere la risposta del sistema per spostamenti impressi maggiori di 0.027 mm. Probabilmente tale problematica potrebbe essere risolta adottando una discretizzazione più fitta del dominio. Inoltre per l'interfaccia si potrebbe impiegare un legame costitutivo e una funzione di attivazione dell'interfaccia capaci di modellare gli scorrimenti che avvengono lungo la direzione l'interfaccia stessa.

Dalla Figura 4.75, dove è riportato il bilancio energetico in termini totali in corrispondenza dei diversi istanti delle analisi condotta, si evince per spostamenti maggiori di 0.02 mm un incremento dell'energia di deformazione, indice della presenza di shear locking.

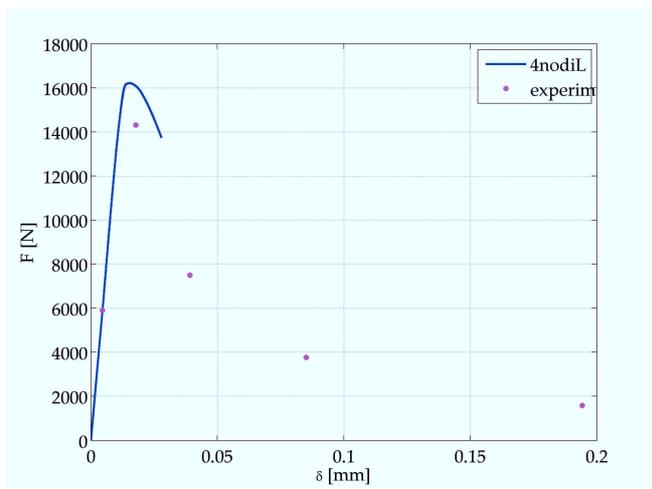


Figura 4.74: Prova di trazione e taglio. Confronto tra l'analisi numerica e i risultati sperimentali: curva carico spostamento.

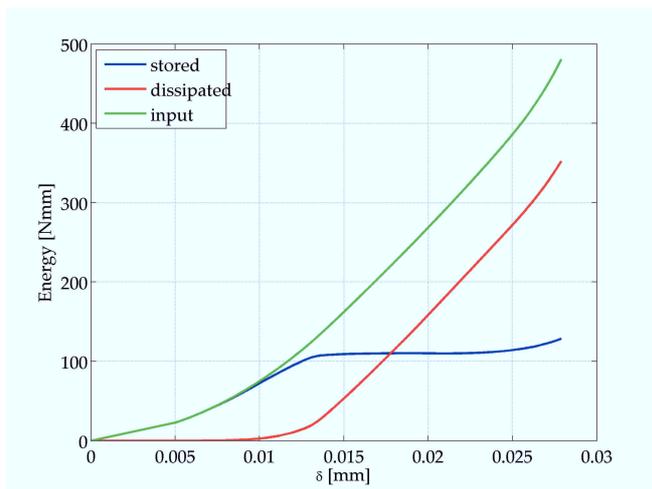


Figura 4.75: Prova di trazione e taglio. Analisi numerica: bilancio energetico in termini totali.

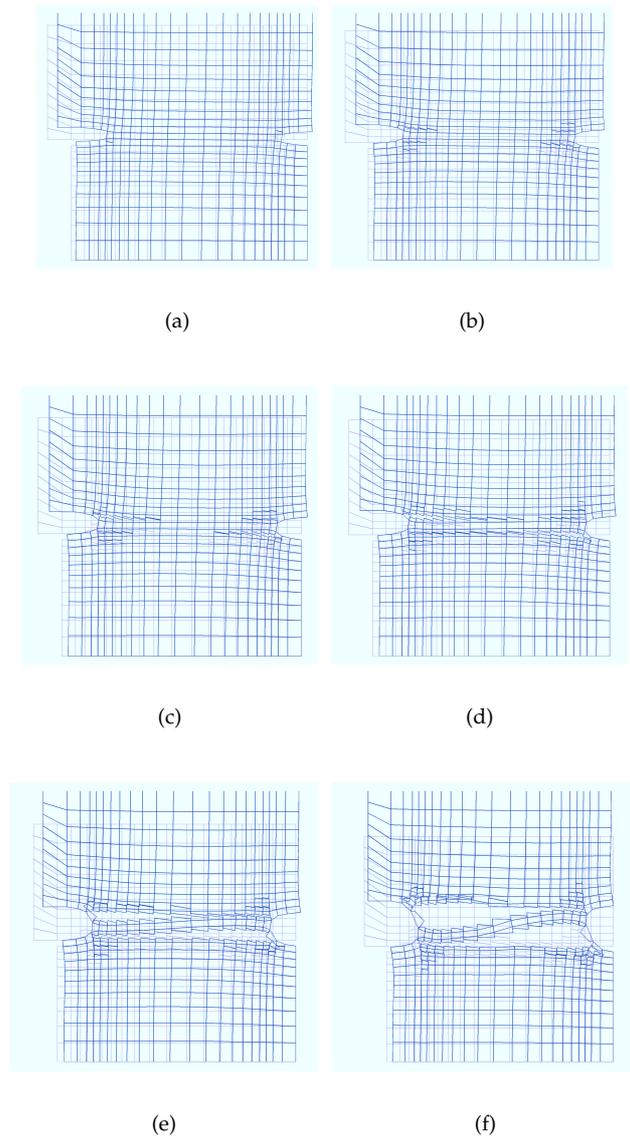
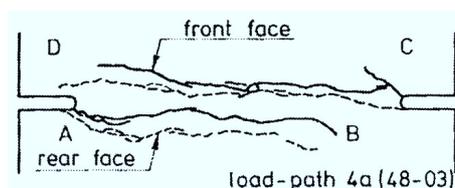


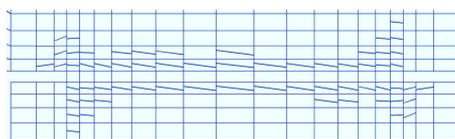
Figura 4.76: Prova di trazione e taglio. Analisi numerica. Configurazione deformata. Istanti: (a) 32 ( $\delta=0.0070$  mm), (b) 82 ( $\delta=0.0106$  mm), (c) 112 ( $\delta=0.0127$  mm), (d) 132 ( $\delta=0.0141$  mm), (e) 202 ( $\delta=0.0190$  mm) e (f) 322 ( $\delta=0.0274$  mm).

Dalla Figura 4.76, dove viene riportata la configurazione deformata del provino, si può osservare l'innesco delle interfacce, che avviene in corrispondenza degli intagli, e la successiva propagazione.

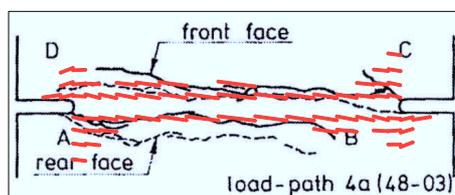
Nelle Figure 4.77(b) e 4.77(a) sono riportati rispettivamente la posizione delle interfacce predetta dal modello numerico ed i rilievi sperimentali [42, 54]. Dal confronto di Figura 4.77(c) si nota buon accordo tra risultati numerici e dati sperimentali pur avendo adottato una discretizzazione piuttosto rada.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.77: Prova di trazione e taglio. Posizione delle interfacce: (a) rilievi sperimentali [42, 54], (b) stima numerica ( $\delta=0.0274$  mm) e (c) confronti.

# Conclusioni

La metodologia proposta per l'analisi del continuo in presenza di discontinuità nel campo di spostamento si è mostrata idonea ad accogliere modelli costitutivi per il continuo e per le interfacce di qualsivoglia tipologia, allorchè esse siano inglobate variazionalmente nella struttura del funzionale energetico.

Modelli con danno ed equazioni di flusso per fasi diverse possono essere introdotti senza alterare lo schema algoritmico, che risulta solido e, nella sua forma complessiva, analogo a quello ben noto e consolidato dei modelli di plasticità. Ciò implica una agevole trasposizione dello schema all'interno di codici di calcolo agli elementi finiti per l'analisi incrementale di problemi con non linearità materiali.

Le applicazioni strutturali ed i confronti dei risultati con test di riferimento hanno mostrato la validità dell'algoritmo e la sua capacità di prevedere lo stato di sforzo e la posizione delle interfacce.

Il modello è destinato ad essere ampliato, introducendo leggi trazione separazione per l'interfaccia che tengono conto delle azioni tangenziali, al fine di poter estendere il suo campo di applicabilità, e conseguentemente algoritmi di tracciamento della direzione di apertura delle fessure, che darà luogo ad una determinazione univoca della stessa.

I casi studiati di elemento finiti bilineari a quattro nodi con salto costante ( $4L/\text{cost}$ ) e biquadratici a otto nodi con salto lineare ( $8Q/\text{lin}$ ) costituiscono situazioni estreme, all'interno delle quali si collocano altri possibili elementi finiti, quali ad esempio l'elemento bilineari a quattro nodi con salto lineare ( $4L/\text{lin}$ ), che saranno oggetto di ulteriori sviluppi.



# Bibliografia

- [1] J. Alfaiate, A. Simone, e L. Sluys. Non-homogeneous displacement jumps in strong embedded discontinuities. *Int. J. Solids Struct.*, 40:5799–5817, 2003.
- [2] F. Armero e R. De Borst. Numerical aspects of cohesive-zone models. *Engng. Fract. Mech.*, 70(14):1743–1757, 2003.
- [3] Z.P. Bažant e B.H. Oh. Crack band theory of concrete. *Mater. Struct.*, 16:155–177, 1983.
- [4] Z.P. Bažant e G. Pijaudier-Cabot. Nonlocal continuum damage localization instability and convergence. *J. Appl. Mech.*, 55:287–293, 1988.
- [5] T. Belytschko, N. Moës, S. Usui, e C. Parimi. Arbitrary discontinuities in finite elements. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 50:993–1013, 2001.
- [6] A. Bocca, A. Carpinteri, e S. Valente. Mixed mode fracture of concrete. *Internat. J. Solids Structures*, 27:1139–1153, 1986.
- [7] G. Bolzon. Formulation of a triangular finite element with an embedded interface via isoparametric mapping. *Comput. Mech.*, 27:463–473, 2001.
- [8] C. Callari, F. Armero, e A. Abati. Strong discontinuities in partially saturated poroplastic solids. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199:1513–1535, 2010.
- [9] A. Carpinteri. *Meccanica dei Materiali e della Frattura*. Pitagora Editrice, Bologna, 1992.

- [10] E.W.V. Chaves. *A three dimensional setting for strong discontinuities modeling in failure mechanics*. Tesi di Dottorato di Ricerca, Università Politècnica de Catalunya. Escola Tècnica superior d'enginyers de camins, canal i ports, 2003.
- [11] D. Ciancio, C. López, I. Carol, e M. Cuomo. New results in mesomechanical modeling of concrete using fracture-based zero-thickness interface elements. *Comp. Mod. Concrete Struct.*, -:171–177, 2003.
- [12] L. Contrafatto e M. Cuomo. A new thermodynamically consistent continuum model for hardening plasticity coupled with damage. *International Journal of Solid and Structures*, 39:6241–6271, 2002.
- [13] L. Contrafatto e M. Cuomo. A globally convergent numerical algorithm for damaging elasto-plasticity based on the multiplier method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 63:1089–1125, 2005.
- [14] L. Contrafatto e M. Cuomo. A variational formulation of the equilibrium problem of a damaging continuum in the context of the strong discontinuities approach. In *7th EUROMECH Solid Mechanics Conference, ESMC 2009*, Lisbon, Portugal, 2009. full text on CD ROM.
- [15] L. Contrafatto e M. Cuomo. Finite element implementation of an enhanced strong discontinuities approach formulation vs. smeared crack models. In *IV European Conference on Computational Mechanics, ECCM 2010*, Paris, France, 2010. full text on CD ROM.
- [16] A.L.G.A. Coutinho, M.A.D. Martins, R.M. Sydenstricker, J.L.D. Alves, e L. Landau. Simple zero thickness kinematically consistent interface elements. *Computes and Geotechnics*, 30:347–374, 2003.
- [17] M. Cuomo e Ventura G. A complementary energy formulation for no tension masonry-like solids. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 189:313–339, 2000.
- [18] D. Dias-da Costa, J. Alfaiate, L.J. Sluys, e E. Júlio. A comparative study on the modeling of discontinuous fracture by means of enriched nodal and element techniques and interface elements. *Int. J. Fract.*, 161:97–119, 2010.

- [19] E.N. Dvorkin, A.M. Cuitino, e G. Goia. Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30:541–564, 1990.
- [20] R.A. Eve, B.D. Reddy, e R.T. Rockafellar. An internal variable theory of elastoplasticity based on the maximum plastic work inequality. *Quart. Appl. Math.*, 48:59–83, 1990.
- [21] A. Ferrara e A. Pandolfi. Numerical modeling of fracture in human arteries. *Computer Method in Biomechanics and Biomedical Engineering*, 11(5):553–567, 2008.
- [22] R.E. Goodman, R.L. Taylor, e T.L. Brekke. A model for the mechanics of jointed rock. *J. Soil. Mech. Found. Div.*, 99:637–659, 1968.
- [23] B. Halphen e Q.S. Nguyen. Sur les matériaux standards généralisés. *Journal de Mécanique*, 14:39–63, 1975.
- [24] A. Hillerborg, M. Modeer, e P.E. Peterson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite element. *Cem. Concr. Res.*, 6(6):773–781, 1976.
- [25] M.M. Iordache e K.J. William. Localized failure analysis in elastoplastic Cosserat continua. *COMMA4*, 151:559–586, 1998.
- [26] M. Jirásek. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 188:307–330, 2000.
- [27] M. Jirásek e T. Zimmermann. Rotating crack model with transition to scalar damage. *Journ. Engrg. Mech.*, 124(3):277–284, 1998.
- [28] M. Jirásek e T. Zimmermann. Embedded crack model: Part i: Basic formulation. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 50:1269–1290, 2001.
- [29] M. Klisinski, K. Runesson, e S. Sture. Finite element with inner softening band. *J. Eng. Mech.*, 117(3):575–587, 1991.
- [30] R. Larsson e K. Runesson. Element-embedded localization band based on regularized displacement discontinuity. *J. Eng. Mech.*, 122:402–411, 1996.
- [31] C. Linder e F. Armero. Finite elements with embedded strong discontinuities for the modeling of failure in solids. *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, 72:1391–1433, 2007.

- [32] J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller, e E. Oñate. A plastic damage model for concrete. *Internat. J. Solids Structures*, 25(3):299–326, 1989.
- [33] G. Meschke, R. Lackner, e H.A. Mang. An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 42:703–727, 1998.
- [34] M. L. Micciché. *Modeling of cohesive fracture processes through embedded discontinuities*. Tesi di Dottorato di Ricerca, Università di Catania, Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale, 2006.
- [35] N. Moës, I. Dolbow, e T. Belytschko. A finite element method for crack growth without remeshing. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 46:131–150, 1999.
- [36] J. Mosler. On the modelling of highly localized deformations induced by material failure: the strong discontinuity approach. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 11:389–446, 2004.
- [37] J. Mosler. A novel algorithmic framework for the numerical implementation of locally embedded strong discontinuities. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 194:4731–4757, 2005.
- [38] J. Mosler. On the efficient implementation of an elasto-plastic damage model for large scale analyses of material failure: A multiscale approach. *Computers Structures*, 83:369–382, 2005.
- [39] J. Mosler e O.T. Bruhns. A 3D anisotropic elastoplastic-damage model using discontinuous displacement fields. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 60:923–948, 2004.
- [40] J. Mosler e G. Meschke. 3d modeling of strong discontinuities in elastoplastic solids: Fixed and rotating localization formulations. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 57:1553–1576, 2003.
- [41] J. Mosler e G. Meschke. Embedded crack vs. smeared crack models: a comparison of elementwise discontinuous crack path approaches with emphasis on mesh bias. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 193:3351–3375, 2004.
- [42] M.B. Nooru-Mohamed. *Mixed-mode fracture of concrete: An experimental approach*. Tesi di Dottorato di Ricerca, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 1992.

- [43] A.E. Oliver, J. and Huespe. Continuum approach to material failure in strong discontinuity. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 193:3195–3220, 2003.
- [44] J. Oliver. A consistent characteristic length for smeared cracking models. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 28:461–474, 1989.
- [45] J. Oliver. Modelling of strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 1: Fundamental. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 39(21):3575–3600, 1996.
- [46] J. Oliver. Modelling of strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. part 2: Numerical simulation. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 39(21):3601–3623, 1996.
- [47] J. Oliver, M. Cervera, e O. Manzoli. Strong discontinuities and continuum plasticity models: The strong discontinuity approach. *Int.J. Plasticity*, 15:319–351, 1999.
- [48] J. Oliver e A.E. Huespe. Theoretical and computational issues in modelling material failure in strong discontinuity scenarios. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 193:2987–3014, 2004.
- [49] J. Oliver, A.E. Huespe, S. Blanco, e D.L. Linero. Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure with the strong discontinuity approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195:7093–7114, 2006.
- [50] J. Oliver, A.E. Huespe, e P.J. Sánchez. A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-fem vs. x-fem. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 195:4732–4752, 2006.
- [51] J. Oliver, D.L. Linero, A.E. Huespe, e O.L. Manzoli. Two-dimensional modeling of material failure in reinforced concrete by means of a continuum strong discontinuity approach. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197:332–348, 2008.
- [52] M. Ortiz, Y. Leroy, e A. Needleman. A finite element method for localized failure analysis. *Comp. Meth. App. Mech. Eng.*, 61:189–214, 1987.
- [53] E. Papa e A. Taliercio. Anisotropic damage model for the multiaxial static and fatigue behaviour of plain concrete. *Engrg. Fract. Mech.*, 55(2):163–179, 1996.

- [54] B. Patzák e M. Jirásek. Adaptive resolution of localized damage in quasi-brittle materials. *Journal of Engineering Mechanics*, 130(6):720–732, 2004.
- [55] J.N. Reddy. *An introduction to the finite element method, third edition*. McGraw-Hill International Edition, New York, USA, 2006.
- [56] L. Resende. A damage mechanics constitutive theory for the inelastic behaviour of concrete. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 60:57–93, 1987.
- [57] Technical Committee TC-50 on Fracture Mechanics of Concrete RILEM. Determination of the fracture energy of mortar and concrete by means of three-point bend tests on notched beams. *Draft recommendation, Material and Structures*, 18, 1985.
- [58] R.T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.
- [59] A. Sellier e B. Bary. Coupled damage tensors and weakest link theory for the description of crack induced anisotropy in concrete. *Engrg. Fract. Mech.*, 69:1925–1939, 2002.
- [60] J. Simo, J. Oliver, e F. Armero. An analysis of strong discontinuities induced by strain softening in rate independent inelastic solids. *Computat. Mech.*, 12:277–296, 1993.
- [61] J.C. Simo e R.L. Taylor. Consistent tangent operators for rate-independent elasto-plasticity. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 48:101–118, 1985.
- [62] A. Simone. Partition of unity-based discontinuous elements for interface phenomena: computational issue. *Commun. Numer. Methods Engrg*, 20:465–478, 2004.
- [63] G. Ventura, J.X. Xu, e T. Belytschko. A vector level set method and new discontinuity approximations for crack growth by efg. 2002, 54:923–944, *Int. J. Num. Meth. Eng.*
- [64] K. Washizu. *Variational methods in elasticity & plasticity*. Pergamon press, Oxford, England, 1982.
- [65] K.J. William. *Encyclopedia of Physical Science & Tecnology, Third Edition, Volume 3*. Academic Press, 2002.

- [66] R.C. Yu, G. Ruiz, e E.W.V. Chaves. A comparative study between discrete and continuum models to simulate concrete fracture. *Engng. Fract. Mech.*, 75:117–127, 2008.
- [67] G. Zi e T. Belytschko. New crack tip elements for xfem and application to cohesive crack. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 57:2221–2240, 2003.
- [68] O.C. Zienkiewicz e R.L. Taylor. *The finite element method, fifth edition*. Butterworth-Heinemann, Oxford, England, 2000.