

NOTA: anche questa pagina bianca fa parte
del blocco di pagine della tesi

NOTA: tagliare il blocco di pagine della tesi (stampata fronte-retro)
lungo le due linee qui tracciate prima di effettuare la rilegatura

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale

Davide Rapticavoli

**L'USO DELLE FUNZIONI GENERALIZZATE PER
LA FORMULAZIONE DI ELEMENTI FINITI DI
TRAVI NON OMOGENE ED INELASTICHE**

*Tesi di dottorato in
Ingegneria strutturale e geotecnica*

Supervisore:

Prof. Ing. Ivo Calìo

Coordinatore del Dottorato:

Prof. Ing. G. Oliveto

Gruppo di Tesi

Prof. Ing. Salvatore Caddemi

Dott. Ing. Francesco Cannizzaro

Dott. Ing. Bartolomeo Pantò

Anno Accademico 2011-2012

INDICE

Introduzione	5
Capitolo 1.....	10
APPROCCI DI MODELLAZIONE DELLA TRAVE	
INELASTICA.....	10
1.1 Premessa.....	10
1.2 Introduzione	10
1.2.1 Elementi finiti a plasticità concentrata	11
1.2.2 Elementi finiti a plasticità diffusa	15
1.3 Elementi finiti a plasticità diffusa: formulazione generale	22
1.3.1 Richiami generali sulla risoluzione delle strutture	22
1.3.2 Definizione del modello	24
1.3.3 L'elemento finito trave a plasticità diffusa nella formulazione DB 28	
1.3.3.1 Ipotesi cinematica.....	28
1.3.3.2 Matrice di rigidezza.....	29
1.3.3.3 Matrice di rigidezza della sezione	31
1.3.3.4 Forze nodali reattive (resisting forces)	34
1.3.3.5 Determinazione dello stato dell'elemento (Element State Determination).....	35
1.3.3.6 Determinazione dello stato della sezione	36
1.3.4 L'elemento finito trave a plasticità diffusa nella formulazione FB 39	
1.3.4.1 Relazioni fondamentali	41

1.3.4.2 Determinazione dello stato dell'elemento secondo Spacone et al. (1996)	43
1.3.4.3 Determinazione dello stato dell'elemento senza iterazioni	47
1.4 Bibliografia	49
Capitolo 2.....	55
MODELLI DI TRAVE CON DISCONTINUITÀ MULTIPLE	55
2.1 Premessa.....	55
2.2 La trave di Eulero Bernoulli con una discontinuità	56
2.2.1 La trave di Eulero Bernoulli con una discontinuità nella rigidezza flessionale di tipo <i>Heaviside</i>	58
2.2.1.1 Esempio numerico	59
2.2.2 La trave di Eulero Bernoulli con una discontinuità nella rigidezza flessionale di tipo <i>Delta di Dirac</i>	62
2.2.2.1 Trave semplicemente appoggiata con singola discontinuità nelle rotazioni	66
2.3 La trave di Eulero Bernoulli con discontinuità multiple.....	69
2.5 Soluzione della trave di Eulero-Bernoulli con discontinuità multiple negli spostamenti assiali.....	75
2.6 Bibliografia	80
Capitolo 3.....	83
LA TRAVE DI TIMOSHENKO CON DISCONTINUITÀ MULTIPLE	83
3.1 Introduzione	83
3.2 Il modello trave in presenza di discontinuità	85
3.3 Soluzione in forma chiusa della trave con discontinuità	88
3.4 Funzioni di forma	93
3.5 Matrice di rigidezza.....	96
3.6 Matrice di massa coerente.....	96
3.7 Analisi statica lineare di un telaio piano	98
3.8 Bibliografia	103

Capitolo 4.....	105
UN NUOVO ELEMENTO FINITO TRAVE A PLASTICITÀ DIFFUSA (GDB).....	105
4.1 Premessa.....	105
4.2 Forze e spostamenti nodali	106
4.3 Ipotesi cinematiche.....	107
4.3.1 Le funzioni di forma generalizzate adottate nella discretizzazione.....	108
4.3.1.1 La definizione della trave non omogenea equivalente.....	108
4.4 Campo di deformazione	112
4.6 Campo di tensione	114
4.7 Matrice di rigidezza.....	115
4.8 Forze nodali reattive	117
4.9 Determinazione dello stato dell'elemento.....	119
 Capitolo 5.....	 125
APPLICAZIONI NUMERICHE	125
5.1 Premessa.....	125
5.2 Trave a mensola	126
5.2.1 ADINA – modelli DB.....	126
5.2.2 SeismoStruct – modelli DB e FB.....	129
5.2.3 OpenSees – modello FB.....	132
5.2.4 Elemento finito GDB.....	133
5.2.5 Curve di capacità.....	139
5.3 Telaio piano (legame costitutivo EPP).....	141
5.3.1 ADINA – modelli DB.....	142
5.3.2 SeismoStruct – modelli DB e FB.....	145
5.3.3 OpenSees – modello FB.....	149
5.3.4 Elemento finito proposto GDB	150
5.3.5 Analisi limite	155
5.3.6 Curve di capacità.....	156
5.4 Telaio piano (legame costitutivo incrudente).....	158

5.4.1 Elemento finito proposto GDB	158
5.4.2 SeismoStruct – modelli DB e FB.....	165
5.4.3 Curve di capacità	167
5.5 Bibliografia	168
Appendice.....	169
Appendice A: L'algoritmo di Newton-Raphson.....	169
Appendice B: Soluzione in forma chiusa della matrice di rigidezza	174
Appendice C: Soluzione in forma chiusa della matrice di massa coerente	176

Introduzione

Nell'ambito degli elementi finiti trave esiste un'enorme letteratura sia in ambito lineare che in presenza di nonlinearità geometriche e/o costitutive. Nonostante gli enormi progressi ottenuti vi sono ancora molti ambiti suscettibili di ulteriori sviluppi che possono determinare ulteriori miglioramenti sia in termini di accuratezza della soluzione, soprattutto in ambito nonlineare, che in termini di facilità di implementazione e di costi computazionali. Tra gli argomenti di maggiore interesse vi sono:

- studi orientati alla modellazioni di sistemi intelaiati di travi con discontinuità che possono essere rappresentative della presenza di danni concentrati e/o diffusi. L'analisi del problema diretto costituisce il primo passo verso una più agevole formulazione dei problemi inversi per l'identificazione dell'intensità e della posizione del danno.
- ricerche rivolte alla definizione e al confronto di modelli di trave inelastica per l'analisi della risposta non lineare, statica e dinamica, di strutture intelaiate.

Queste sono le tematiche di ricerca in cui si collocano gli studi riportati nella presente tesi. In particolare, si propone l'uso di *funzioni di forma generalizzate per la formulazione di elementi finiti trave sia in ambito lineare che nonlineare*. In particolare tali funzioni, qualche volta definite arricchite, possono essere utilizzate sia per la modellazione di sistemi di travi non-omogene e/o in presenza di danni concentrati o distribuiti che nel più generale ambito delle travi inelastiche per le quali si propone un approccio agli spostamenti, a plasticità diffusa, coerente con funzioni di forma discontinue variabili in relazione alla risposta dell'elemento. Le due formulazioni, apparentemente disgiunte, sono in realtà strettamen-

te legate essendo l'elemento relativo alla trave inelastica basato sui risultati ottenuti in ambito lineare per la trave con discontinuità.

Entrambe le formulazioni prendono spunto dalla determinazione della soluzione flessionale esatta esplicita di una trave di Timoshenko con discontinuità concentrate e diffuse, che presenta l'enorme vantaggio di dipendere, nel piano, soltanto da quattro costanti d'integrazione, come per la trave omogenea, indipendentemente dal numero e dalla natura delle discontinuità presenti. Tale circostanza consente una facile determinazione delle funzioni di forma che risulteranno generalizzate, nella natura algebrica, contentendo al loro interno una parte continua ed una discontinua che tiene conto di tutte le discontinuità presenti nell'elemento trave. E' importante ribadire che per modellare la natura discontinua dell'elemento non è necessario aggiungere gradi di libertà in corrispondenza delle discontinuità siano esse concentrate o distribuite.

La tesi è organizzata in 6 capitoli i cui contenuti sono riassunti nel seguito:

Il capitolo 1 riporta una panoramica degli approcci di modellazione agli elementi finiti per la trave inelastica. L'attenzione è principalmente rivolta agli approcci a plasticità diffusa.

Il capitolo 2 considera lo stato dell'arte relativo alla definizione di elementi finiti di travi in presenza di discontinuità in ambito elastico lineare attualmente limitato alla sola trave di Eulero.

Il capitolo 3 è relativo alla formulazione in regime elastico lineare di un nuovo elemento finito relativo alla trave di Timoshenko in presenza di discontinuità concentrate e diffuse. Tale elemento è funzione dei soli gradi di libertà nodali qualunque sia il numero e la natura delle discontinuità. Oltre alla matrice di rigidezza è stata determinata la matrice di massa coerente con le funzioni di forma discontinue e sono stati effettuati alcuni confronti con risultati di letteratura ottenuti con diversi approcci.

Il capitolo 4 si rivolge alle travi inelastiche a plasticità diffusa, e considera la formulazione di un nuovo elemento finito di trave inelastica con approccio agli spostamenti basato sull'uso di funzioni di forma generalizzate e variabili nel passo. La procedura proposta permette di aggiornare la distribuzione delle discontinuità flessionali di ciascun elemento finito, in maniera coerente con la rigidezza flessionale delle sezioni di controllo adottate nell'integrazione numerica alla Gauss-Lobatto. Tale procedura permette di cogliere all'interno di ciascun elemento finito distribuzioni non lineari nelle curvature causate dalla formazione e dalla diffusione delle deformazioni plastiche. Ciò è possibile operando con un solo elemento finito grazie alla capacità dell'elemento di cogliere le variazioni di discontinuità all suo interno e tradurle in un aggiornamento delle funzioni di forma che dipendono dai soli gradi di libertà nodali dell'elemento.

Il capitolo 5 riporta una validazione numerica dell'elemento inelastico proposto attraverso il confronto con i risultati ottenuti da altre formulazioni a plasticità diffusa implementate nei software OpenSees, SeismoStruct e ADINA. Alla fine del capitolo vengono illustrati i vantaggi e gli svantaggi della formulazione proposta rispetto agli altri approcci esistenti.

I risultati relativi all'elemento finito proposto sono stati ottenuti attraverso un codice di calcolo agli elementi finiti, attualmente implementato in ambiente MATLAB, con cui è possibile eseguire analisi statiche lineari e non lineari di strutture intelaiate. E' in corso d'implementazione la parte di codice necessaria per l'esecuzione di analisi dinamiche.

[Questa pagina è volontariamente lasciata in bianco]

Capitolo 1

APPROCCI DI MODELLAZIONE DELLA TRAVE INELASTICA

1.1 Premessa

In questo capitolo si riporta una breve panoramica dei principali approcci di modellazione agli elementi finiti proposti da diversi autori per la valutazione della risposta non lineare di strutture intelaiate. Esiste ormai una vastissima letteratura su tale argomento, quanto nel seguito riportato vuole costituire soltanto un inquadramento generale orientato alla formulazione di base dei diversi approcci attualmente utilizzati sia in ambito accademico che professionale.

1.2 Introduzione

Seguendo un ordine cronologico dapprima si accennerà ai modelli a plasticità concentrata, ancora largamente utilizzati nella pratica professionale ed implementati in numerosi software strutturali. Successivamente verranno illustrati gli approcci a plasticità diffusa, agli spostamenti e agli sforzi, con particolare riferimento alle formulazioni utilizzate nei software più diffusi in ambito accademico e professionale. In conclusione si riporteranno alcune considerazioni sui pregi e difetti di ciascuna formulazione e sugli ambiti ritenuti suscettibili di ulteriori sviluppi. La trattazione è limitata all'ambito dei piccoli spostamenti.

1.2.1 Elementi finiti a plasticità concentrata

I modelli di trave a plasticità concentrata sono stati inizialmente proposti per lo studio della risposta inelastica dei pilastri snelli (Clough & Jonston 1966, Giberson 1967). Nelle diverse formulazioni proposte si ipotizza che il comportamento inelastico della trave sia equivalente a quello di un elemento elastico monodimensionale alle cui estremità sono presenti due molle rotazionali rigido-plastiche il cui legame isteretico è prestabilito: in fase elastica il comportamento delle molle è rigido al fine di ripristinare la congruenza negli spostamenti senza che si determinino spostamenti e/o rotazioni plastiche nelle molle stesse; in fase plastica la rigidità delle molle assume un valore finito e risulta funzione del legame inelastico attribuito alla sezione della trave che si intende modellare. In generale tali modelli ammettono che le deformazioni inelastiche possano svilupparsi solamente in corrispondenza delle estremità della trave: tali zone sono note anche come “plastic hinge region”, ossia zone dove potenzialmente possono svilupparsi cerniere plastiche.

Le motivazioni che hanno spinto la ricerca scientifica di quegli anni verso questi tipi di modelli sono dovute al presupposto che i momenti flettenti, sotto la combinazione delle azioni sismiche e dei carichi di esercizio, sono maggiori in corrispondenza delle sezioni di estremità degli elementi. Sebbene tale ipotesi sia generalmente riscontrabile nei pilastri, non è sempre verificata nelle travi, in particolare in quelle dei piani più alti dell'edificio, dove le cerniere plastiche possono formarsi in zone differenti da quelle di estremità della trave. Inoltre, poiché si assume che il comportamento inelastico della trave viene completamente condensato nelle molle non lineari di estremità, non è possibile riprodurre tutti quei fenomeni associati alla diffusione del danneggiamento nelle vicinanze delle sezioni di estremità della trave per effetto dello sviluppo di deformazioni plastiche.

Un'altra limitazione sull'uso di modelli a plasticità concentrata è dovuta al fatto che è possibile assumere un unico e prestabilito tipo di legame isteretico che descrive il comportamento sotto carico ciclico delle molle non lineari: la scelta dei valori numerici da assegnare ai parametri che

caratterizzano il legame isteretico richiede una considerevole esperienza e, in genere, viene fatta su formule di origini semi-empiriche.

Il principale vantaggio è il loro limitato onere computazionale richiesto nell'esecuzione delle analisi e la possibilità di tenere in conto diverse caratteristiche, tra cui è possibile citare la degradazione della rigidezza sia a flessione che a taglio, del pinching per effetto dei carichi ciclici, fixed end rotations per simulare il fenomeno dello sfilamento delle armature (bar pull-out). Inoltre questi modelli sono in grado di seguire un prestabilito legame momento-curvatura (che richiede comunque una ulteriore analisi a livello sezionale da eseguire), mentre l'iterazione tra il momento flettente e lo sforzo normale è solo approssimativamente rappresentata. In letteratura è possibile reperire ampie descrizioni di queste formulazioni come, ad esempio, in Carr (2007) e Filippou & Fennes (2004). Il modello proposto da Clough and Johnston (1967), detto anche parallel-component-element, è stato suggerito per lo studio di strutture intelaiate caratterizzate da travi aventi un legame costitutivo momento-rotazione bilineare: il modello è composto da due sub-elementi disposti in parallelo caratterizzati, il primo, da un legame elastico perfettamente plastico per rappresentare la fase di snervamento ed, il secondo, da un legame indefinitamente elastico per rappresentare la fase di incrudimento. Nel parallel-component-element la matrice di rigidezza è data dalla somma delle rigidezze possedute dai suoi componenti..

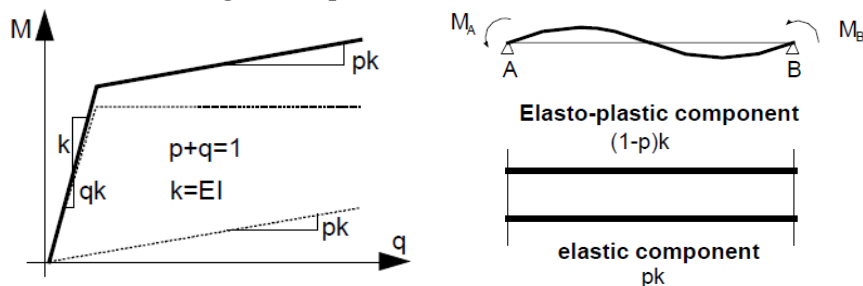


Figura 1 – Il modello a plasticità concentrata “parallel component”
(Clough & Johnston 1967)

Il modello proposto da Giberson (1967), noto anche sotto il nome di *one-component-element*, è composto da sub-elementi disposti in serie e consi-

ste in un elemento elastico monodimensionale alle cui estremità sono presenti due molle rotazionali non lineari. Lo schema di questo modello è riportato in Figura 2.

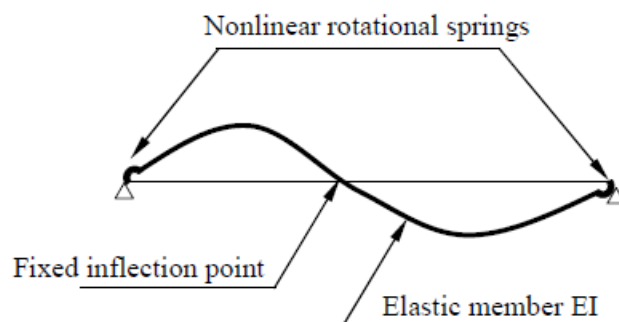


Figura 2 – Il modello a plasticità concentrata “one-component-element” (Giberson, 1967)

Il legame inelastico momento-rotazione di ciascuna molla è calcolato ipotizzando che il punto di inflessione della trave coincida sempre con la mezzeria. Uno dei principali vantaggi del modello di Giberson è che la risposta di ciascuna molla è indipendente da quella degli altri elementi della trave.

Suko & Adams (1971) propongono un modello analogo a quello di Giberson, in cui il punto di inflessione non coincide con la mezzeria della trave ma si localizza nel punto in cui si manifesta inizialmente nella fase di carico elastica. La posizione del punto di inflessione si assume fissa nel corso dell'analisi non lineare.

I modelli di Giberson (1967) e di Suko & Adams (1971) non sono utilizzabili laddove si determina una diversa posizione del punto di inflessione durante la storia di carico. Se infatti, in una estremità della trave, si sviluppa una cerniera plastica, avviene una ridistribuzione dei carichi che, in genere, determina una diversa distribuzione delle curvature e, quindi, una diversa posizione del punto di inflessione. Al contempo si determina, nei pressi della sezione critica dove si è formata la cerniera plastica, un notevole incremento delle deformazioni plastiche. Pertanto l'ipotesi che prevede un punto di inflessione fisso appare contraddittoria.

Takizawa (1976) ha esteso il modello di Clough and Johnston (1967) introducendo il multi-component-element, ossia un elemento finito trave

composto da più sub-elementi disposti in parallelo e caratterizzati da distinti legami costitutivi, adatto per poter descrivere la risposta di travi caratterizzate da un legame momento-rotazione di tipo multilineare.

Un elenco esteso di modelli a plasticità concentrata è riportato in Zeris (1986) e Taucer (1991). Tra gli altri è possibile ricordare i modelli a plasticità concentrata che includono il degrado di rigidezza flessionale e a taglio sotto carichi ciclici (Clough and Benuska 1966, Takeda et al. 1970, Brancaleoni et al. 1983), il degrado per pinching (Banon et al. 1981, Brancaleoni et al. 1983, D'Ambrisi and Filippou 1999), rotazioni rigide nelle interfacce dei nodi trave-colonna per modellare il fenomeno dello sfilamento delle armature (bar pull-out) (Otani 1974, Filippou and Issa 1988, D'Ambrisi and Filippou 1999). In questi modelli in genere viene trascurata l'interazione momento-sforzo normale. Il modello proposto da Ozdemir (1981) è basato su legami isteretici con leggi costitutive continue per la definizione del comportamento non lineare delle molle di estremità. Un estesa trattazione dei legami costitutivi utilizzabili in questi modelli è fornita da Iwan (1978).

Il modello di Lai et al. (1984), proposto per lo studio di travi prismatiche in c.a. a sezione rettangolare, permette di valutare la risposta inelastica delle sezioni di estremità attraverso un approccio a fibre. È composto da un elemento elastico tipo trave alle cui estremità sono presenti due elementi di interfaccia inelastici, aventi lunghezza nulla, posti rispettivamente alle estremità di un elemento elastico. Ciascun elemento di interfaccia è composto al suo interno da quattro molle non lineari, poste in corrispondenza dei quattro angoli dell'elemento e da una molla centrale reagente solo a compressione. Le armature longitudinali sono modellate tramite le molle d'angolo mentre la molla centrale modella il comportamento della sezione in calcestruzzo.

Lo sviluppo degli elementi finiti a plasticità concentrata ha raggiunto il suo apice in termini di popolarità e diffusione, almeno qui in Italia, negli anni appena successivi all'introduzione della nuova norma sismica (OPCM. 3274/2003). Tuttavia tale filone di ricerca oggi appare molto ridimensionato di fronte ai progressi compiuti dagli elementi finiti a non linearità diffusa.

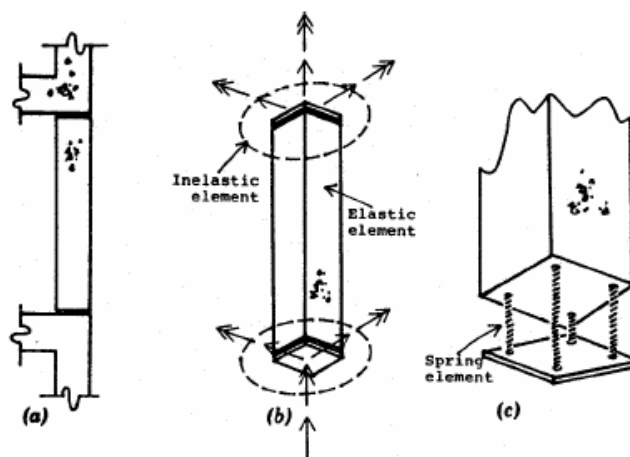


Figura 3 – Il modello a plasticità concentrata con cerniere a fibre (Lai et al, 1984)

1.2.2 Elementi finiti a plasticità diffusa

Gli elementi finiti trave a plasticità diffusa sono stati sviluppati tra gli anni 70-80 (J. T. Oden, 1969, 1972; P. V. Marcal, 1967; H. D. Hibbitt P. V. Marcal and J. R. Rice, 1970; P. K. Larsen, 1971; J. F. McNamara, 1972; K.J. Bathe and H. Ozdemir, 1976; K.J. Bathe and E. L. Wilson, 1976; Bathe & Bolourchi, 1979) e descrivono in maniera più accurata il comportamento inelastico delle travi. In questi elementi le deformazioni plastiche possono diffondersi all'interno dell'elemento. Il comportamento non lineare viene introdotto mediante legami costitutivi non lineari a livello di sezione che possono essere espressi in termini di caratteristiche della sollecitazione (N, M, V) e deformazioni generalizzate ($\varepsilon, \chi, \gamma$) in accordo alla teoria classica della plasticità, ovvero derivati esplicitamente secondo una modellazione a fibre della sezione. In quest'ultimo caso viene assegnata a ciascuna fibra un legame costitutivo monoassiale non lineare espresso in genere in termini di tensioni e deformazioni ($\sigma - \varepsilon$). L'approccio adottato in questi elementi prevede la valutazione della risposta tramite integrazione numerica. Ciò implica la suddivisione dell'elemento in un numero finito di conci. Per ciascun concio si definisce una sezione di controllo, che si assume essere rappresentativa del comportamento inelastico delle altre sezioni del concio. La lunghezza dei

conci e la posizione delle rispettive sezioni di controllo dipendono esclusivamente dal metodo di integrazione numerica adottato.

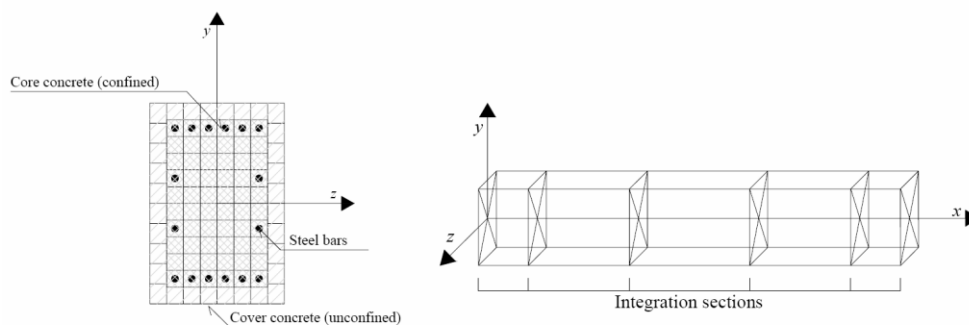


Figura 4 - Elemento finito a plasticità diffusa con sezioni di controllo “modellate a fibre”

Un importante vantaggio di questi tipi di modelli è dovuto al fatto che le zone potenzialmente plasticizzabili non sono più confinate alle sole sezioni di estremità della trave poiché tutte le sezioni di controllo possono avere escursioni in campo plastico. Inoltre nel caso in cui le sezioni di controllo siano modellate secondo l'approccio “a fibre” non è necessario ricorrere a tecniche di calibrazione dei parametri che regolano il legame costitutivo isteretico momento-curvatura delle sezioni di controllo e, pertanto, non è necessario ricorrere a formule empiriche di dubbia validità. L'approccio di modellazione a fibre presenta numerosi vantaggi che possono essere riassunti nel seguente:

- nessun obbligo di svolgere, per gli elementi, un'analisi propedeutica momento-curvatura;
- nessun bisogno di introdurre alcun tipo di comportamento isteretico associato agli elementi (dal momento che tale comportamento è implicitamente definito dai legami costitutivi dei materiali associati alle fibre);
- modellazione diretta dell'interazione tra lo sforzo normale ed i momenti flettenti (sia in termini di resistenza che di rigidezza),
- rappresentazione diretta del carico biassiale;
- interazione tra le resistenze flessionali nelle direzioni ortogonali.

I primi modelli a plasticità diffusa erano molto semplici e poco efficaci, non consideravano l'interazione tra il momento e lo sforzo normale (Otani 1974, Soleimani et al. 1979, Meyer et al. 1983) tuttavia ben presto si evolsero. Il modello proposto da **Otani (1974)** è composto da due elementi a mensola, disposti in serie, connessi rigidamente tra loro in corrispondenza del punto di inversione della curvatura (cfr. Figura 5). Tale punto si assume fisso durante la storia di carico. Nelle sezioni di estremità sono presenti due molle inelastiche le cui rotazioni dipendono dalla distribuzione delle curvature nell'elemento.

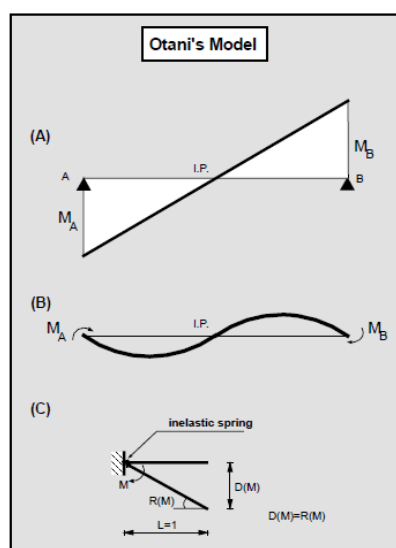


Figura 5 – Modello di Otani (1974):

A) distribuzione del momento,
 B) distribuzione della curvatura,
 C) molle rotazionali inelastiche equivalenti,
 I.P. punto di inversione della curvatura.

Tratto da Taucer et al (1991)

Il modello proposto da **Soleimani et al. (1979)** è composto da un elemento finito trave elastico i cui concetti di estremità sono plasticizzabili. Ciascun concetto di estremità ha una lunghezza variabile e dipendente dal livello di sollecitazione. Il modello di trave proposto da **Meyer et al. (1983)** è simile a quello di Soleimani et al. (1979) e si distingue per la procedura di calcolo adottata nella valutazione della rigidezza delle zone inelastiche nelle fasi di carico ciclico e nel legame isteretico momento-curvatura che viene adottato secondo il modello di Takeda (1970) per la caratterizzazione della rigidezza flessionale dell'elemento. Questo modello è stato successivamente esteso da **Roufaiel e Meyer (1987)**, per

includere gli effetti dello sforzo normale e dello sforzo taglio sulla risposta flessionale dell'elemento tramite l'introduzione di regole empiriche. La risposta assiale dell'elemento risulta comunque indipendente da quella flessionale.

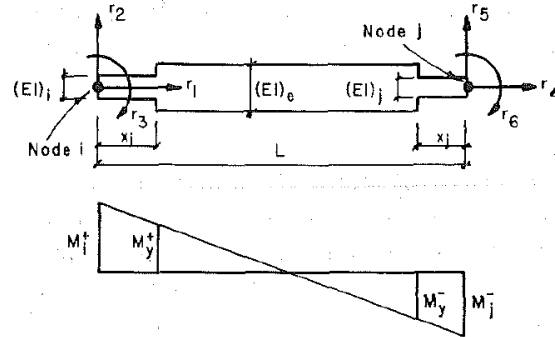


Figura 6 – Modello di Roufaiel e Meyer (1987)

Darvall and Mendis (1985) proposero un modello simile a quello di Roufaiel e Meyer (1987) in cui il legame momento curvatura adottato è trilineare.

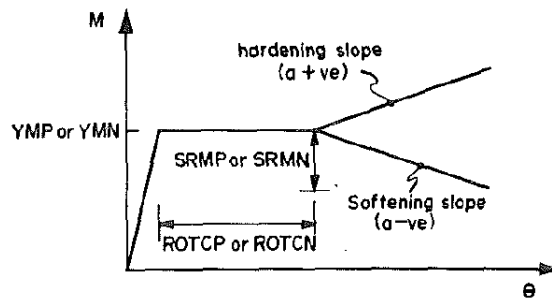


Figura 7 – Legame costitutivo trilineare (Darvall and Mendis, 1985)

Il modello di **Takayanagi and Schnobrich (1979)**, noto anche sotto il nome di *multiple spring model*, è stato proposto inizialmente per lo studio della risposta sismica di strutture intelaiate accoppiate a pareti di taglio. In questo modello la trave viene suddivisa in numero finito di conci. Ciascun concio viene modellato mediante una molla rotazionale non lineare ubicata nella mezzeria del concio stesso (cfr. Figura 8). Le molle non lineari sono caratterizzate da una superficie di snervamento tridimensionale ($N-M_y-M_z$) attraverso cui è possibile valutare

l'interazione tra lo sforzo normale e i momenti flettenti nelle due direzioni.

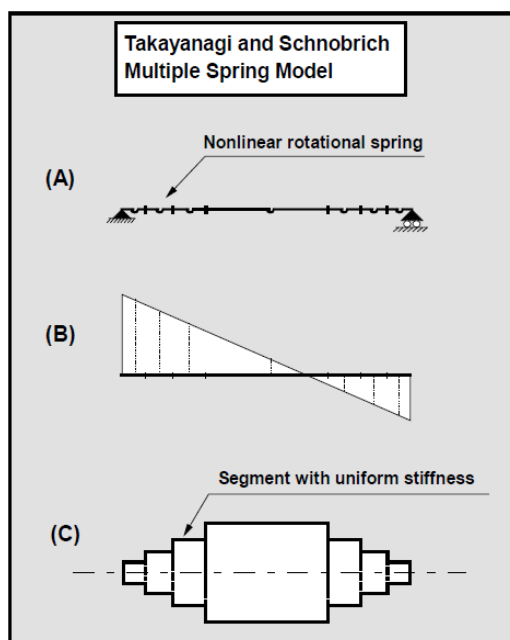


Figura 8 – Multiple spring model (Takayanagi and Schnobrich, 1979)

I primi elementi a plasticità diffusa venivano risolti con la classica procedura in termini di rigidezza in cui si assume che il campo degli spostamenti sia ottenuto mediante l'uso di funzioni di forma, quali ad esempio le funzioni di Hermite (Hellesland & Scordelis, 1981; Mari & Scordelis, 1984). In questi elementi la matrice di rigidezza e le forze nodali (resisting forces), sono ottenute mediante integrazione numerica attraverso l'applicazione del principio dei lavori virtuali (PLV), imponendo l'equilibrio in forma debole. I principali vantaggi derivanti dall'uso degli elementi finiti formulati in termini di spostamento possono essere riassunti nei seguenti punti:

- possibilità di descrivere la diffusione della plasticizzazione nell'elemento;
- la plasticizzazione non è vincolata alla definizione di sezioni critiche;

- estrema semplicità di implementazione nell'ambito dell'algoritmo di Newton Raphson;
- il campo degli spostamenti dell'elemento finito è sempre noto tramite l'uso di funzioni di forma negli spostamenti.

Tuttavia tali elementi presentano diversi svantaggi:

- la costrizione cinematica associata all'uso delle funzioni di forma con curvatura lineare introduce notevoli errori e per ottenere risultati accurati occorre discretizzare la trave in più elementi;
- nel caso di softening non è possibile determinare una soluzione in quanto la rigidità flessionale della trave non può assumere valori negativi;
- l'equilibrio tra le forze nodali e le tensioni interne è imposto in forma debole;
- l'approccio di integrazione determina una dipendenza dei risultati dal numero di sezioni di Gauss.

La maggiore limitazione dell'approccio in termini di spostamenti è dovuta all'ipotesi cinematica basata sull'uso di funzioni di forma cubiche, che determinano una distribuzione delle curvature lineare lungo l'elemento. Questa ipotesi porta a risultati soddisfacenti solo nel caso in cui la risposta dell'elemento sia lineare o quasi lineare. Tuttavia, quando le escursioni in campo plastico divengono significative, la distribuzione delle curvature diventa altamente non lineare, specialmente in strutture soggette a carichi ciclici, poiché le funzioni di forma utilizzate non si adattano allo stato inelastico in cui si trova l'elemento e pertanto non sono in grado di riprodurre l'effettiva distribuzione delle deformazioni (Neuenhofer & Filippou, 1997). Per superare tali problemi si ricorre in genere ad una opportuna discretizzazione della trave in una mesh di elementi finiti. Tuttavia l'utilizzo di questi elementi finiti può determinare problemi di convergenza e stabilità numerica.

Alcuni autori proposero nei primi anni '80 diverse strategie di soluzione alternative mediante l'introduzione di *funzioni di forma variabili* (Mahasurevachai, 1982; Zeris & Mahin, 1988). Tuttavia tali approcci non riscossero successo proprio perché non riuscirono a dare una chiara

e stabile procedura per la loro implementazione in un programma generale agli elementi finiti (Zeris & Mahin, 1988), o non convinsero perché utilizzavano solo parzialmente questa strategia (Menegotto & Pinto, 1977).

Una soluzione definitiva e decisiva a tali problemi venne fornita da Ciampi & Carlesimo (1986). Gli autori proposero una originale procedura iterativa per la valutazione dello stato dell'elemento (Element State Determination) capace di soddisfare, al contempo, le condizioni di equilibrio, indefinite ed al contorno, con le relazioni costitutive di sezione, tramite l'uso di funzioni di forma nelle forze, imponendo la congruenza del campo degli spostamenti tramite l'applicazione del principio dei lavori virtuali in forma debole. Tale procedura, nota anche come formulazione in termini di forze (FB - force based), ha aperto la strada ad un importante filone di ricerca, in seguito sviluppata da numerosi ricercatori che l'hanno resa sempre più chiara ed efficace (Taucer et al., 1991, Spacone et al., 1996; Petrangeli & Ciampi, 1997). La procedura proposta da Neuenhofer & Filippou (1997) non richiede iterazioni interne alla fase di valutazione dello stato dell'elemento, sebbene si ammetta il soddisfacimento delle equazioni indefinite di equilibrio soltanto al raggiungimento della convergenza della soluzione.

Negli ultimi anni diversi ricercatori hanno cercato di ampliare le potenzialità dell'elemento finito formulato in termini di forze, al fine di poter considerare anche l'influenza di altri fattori nella risposta inelastica della trave, quali il taglio, lo sfilamento delle armature delle travi in c.a.. Un elenco esteso di modelli FB che considerano l'influenza del taglio nella risposta è riportato in Ceresa et al (2008). Tra gli altri è possibile ricordare:

- i modelli che utilizzano schemi di tirante puntone (Guedes et al., 1994, 1997; Martinelli, 1998; Ranzo & Petrangeli, 1998);
- i modelli che utilizzano legami di fibra di tipo *microplane* (Petrangeli et al., 1999);
- i modelli che utilizzano i legami di fibra MCTF o *smeared crack* (Vecchio & Collins, 1998; Gregori et al., 2007; Ceresa et al., 2009)

- i modelli che utilizzano l'approccio proposto da Vecchio & Collins (1988) noto come Dual Section Method (Tortolini, 2011)

1.3 Elementi finiti a plasticità diffusa: formulazione generale

In questo paragrafo vengono analizzati alcuni tradizionali modelli di elementi finiti trave a plasticità diffusa. Al fine di rendere chiara la simbologia adottata vengono inizialmente richiamate le equazioni fondamentali per la risoluzione delle strutture secondo il noto approccio del Direct Stiffness Method. Successivamente vengono analizzati gli elementi finiti formulati in termini di spostamenti (DB) e di forze (FB) evidenziandone vantaggi e limiti.

1.3.1 Richiami generali sulla risoluzione delle strutture

La risoluzione delle strutture secondo il Direct Stiffness Method prevede la definizione delle seguenti equazioni:

- equazione di congruenza;
- equazione di equilibrio;
- equazione costitutiva.

L'equazione di congruenza mette in relazione il vettore degli spostamenti dei gradi di libertà della struttura, $\mathbf{U}$, con il vettore degli spostamenti dei gradi di libertà dell'elemento finito, $\mathbf{q}$,

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{L}_{R,e} \mathbf{L}_e \mathbf{U} \quad (1.1)$$

essendo $\mathbf{L}_e$ la matrice di connettività ed $\mathbf{L}_{R,e}$ la matrice di rotazione che opera la trasformazione delle coordinate dal sistema di riferimento globale (rispetto a cui sono definite le componenti del vettore $\mathbf{U}$) a quello locale dell'elemento finito (rispetto a cui sono definite le componenti del vettore $\mathbf{q}$).

L'equazione di equilibrio può essere ottenuta applicando il principio dei lavori virtuali. Siano $\mathbf{P}$ e $\hat{\mathbf{U}}$ rispettivamente i vettori delle forze e degli spostamenti virtuali nodali della struttura, $\mathbf{Q}_e$ e $\hat{\mathbf{q}}_e$ rispettivamente

te i vettori delle forze e degli spostamenti virtuali nodali dell'elemento finito, applicando il principio dei lavori virtuali si ottiene:

$$\hat{\mathbf{U}}^t \cdot \mathbf{P} = \sum_{e=1}^{N_e} \hat{\mathbf{q}}_e^t \cdot \mathbf{Q}_e \quad (1.2)$$

Sostituendo l'eq. (1.1) nell'eq. (1.2) si ottiene

$$\hat{\mathbf{U}}^t \cdot \mathbf{P} = \hat{\mathbf{U}}^t \cdot \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{L}_{R,e}^t \cdot \mathbf{L}_e^t \cdot \mathbf{Q}_e, \quad \forall \hat{\mathbf{U}} \quad (1.3)$$

Ciò implica in definitiva che

$$\mathbf{P} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{L}_{R,e}^t \cdot \mathbf{L}_e^t \cdot \mathbf{Q}_e \quad (1.4)$$

L'eq. (1.4) rappresenta la condizione di equilibrio tra il vettore delle forze applicate alla struttura, $\mathbf{P}$, e le forze nodali dei singoli elementi finiti, $\mathbf{Q}_e$.

Con riferimento ai metodi di analisi non lineare basate sull'algoritmo di Newton-Raphson è possibile distinguere due livelli principali di analisi che coinvolgono

- la struttura;
- l'elemento finito.

Nel caso di analisi non lineari a controllo di forze si definisce in genere una storia di carico in termini incrementali e, ad ogni iterazione dell'algoritmo di Newton-Raphson, si verifica a livello strutturale il soddisfacimento dell'equazione di equilibrio (1.4). In tale equazione appaiono le forze nodali degli elementi finiti, $\mathbf{Q}_e$, che in generale non sono immediatamente note per un fissato campo di spostamenti imposti. Tali forze nodali possono essere ottenute tramite l'equazione costitutiva dell'elemento finito che mette in relazione i vettori delle forze $\mathbf{Q}_e$ e degli spostamenti nodali $\mathbf{q}_e$ dell'elemento finito

$$\mathbf{Q}_e = f(\mathbf{q}_e) \quad (1.5)$$

L'operatore $f(\dots)$, noto in letteratura come *Element State Determination*, permette la determinazione delle forze nodali, $\mathbf{Q}_e$, per un fissato campo di spostamenti $\mathbf{q}_e$ imposto all'elemento finito. Come vedremo nei successivi paragrafi, dipende dalla particolare formulazione

dell'elemento finito stesso. Nel caso elastico lineare l'eq. (1.5) può essere scritta nella seguente forma

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{q}_e \quad (1.6)$$

essendo $\mathbf{K}_e$ la matrice di rigidezza dell'elemento finito.

1.3.2 Definizione del modello

Si consideri una trave i cui nodi di estremità $\mathbf{I}$ e $\mathbf{J}$ risultano individuati rispetto ad un sistema di riferimento globale $OXYZ$. Tale asta risulta orientata nello spazio secondo il sistema di riferimento locale dell'elemento $oxyz$ ortogonale e levogiro con origine $o \equiv \mathbf{I}$. Per definire l'orientamento degli assi del sistema di riferimento locale si definisca un sistema di riferimento ausiliario $ox'y'z'$ in modo che l'asse x' risulti disposto come il vettore $\mathbf{J}-\mathbf{I}$, l'asse y' sia tale che $\mathbf{e}_{x'} \cdot \mathbf{e}_{y'} = 0$ e $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{y'} = 0$ l'asse z' sia tale che $\mathbf{e}_{z'} = \mathbf{e}_{x'} \times \mathbf{e}_{y'}$. L'asse x del sistema di riferimento locale $oxyz$ risulta coincidente con l'asse x' mentre gli assi y e z risultano individuati in funzione dell'angolo di rotazione α .

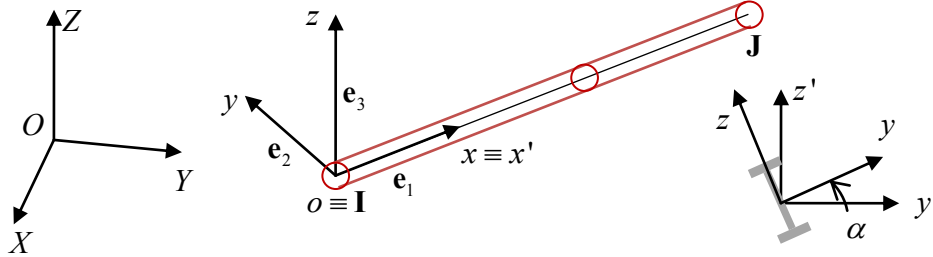


Figura 9 – Individuazione dell'elemento finito tipo trave nello spazio rispetto al sistema di riferimento globale $OXYZ$ ed a quello locale dell'elemento $oxyz$

Si definiscono $\mathbf{Q}_e$ e $\mathbf{q}_e$ rispettivamente i vettori delle forze e degli spostamenti nodali dell'elemento finito trave, espressi nel sistema di riferimento locale dell'elemento (cfr. figura 10)

$$\mathbf{Q}_e = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10}, Q_{11}, Q_{12})^T \quad (1.7)$$

$$\mathbf{q}_e = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12})^T \quad (1.8)$$

La risposta torsionale risulta governata da un legame elastico lineare ed è disaccoppiata da quella flessionale e non verrà considerata nel prosieguo della trattazione.

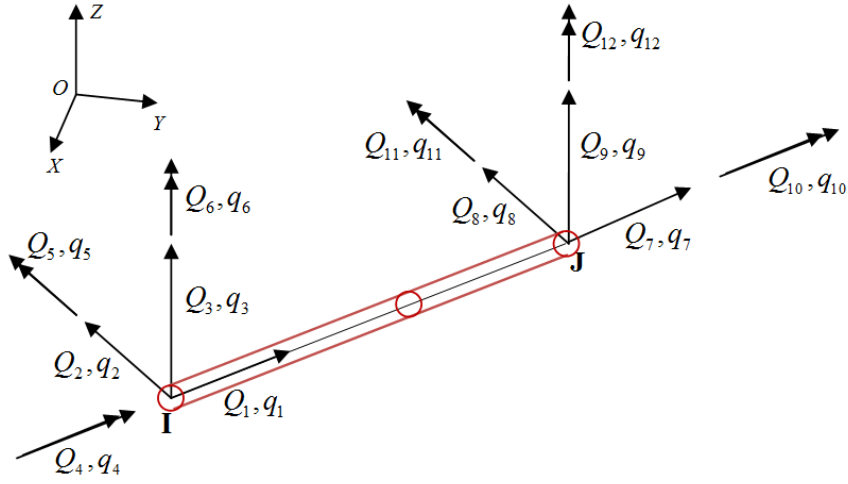


Figura 10 – Forze e spostamenti nodali dell'elemento finito trave

Nella trave a plasticità diffusa si assume che sia soddisfatta l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, per cui il campo delle deformazioni longitudinali risulta

$$\varepsilon_x(x, y, z)\mathbf{e}_x = \varepsilon_0\mathbf{e}_x + \boldsymbol{\chi}_F \times (\mathbf{P} - \mathbf{G}) \quad (1.9)$$

Nella relazione (1.9):

- $\varepsilon_x(x, y, z)$ è la deformazione longitudinale nel punto $\mathbf{P}$ di coordinate $\mathbf{P} \equiv [x, y, z]$;
- $\varepsilon_0(x) = \varepsilon_x(x, 0, 0)$ è la deformazione longitudinale nel punto $\mathbf{G}$ di coordinate $\mathbf{G} \equiv [x, 0, 0]$;
- $\mathbf{e}_x$ è il versore nella direzione x del sistema di riferimento locale della sezione;
- $\boldsymbol{\chi}_F(x)$ è il vettore delle curvature nella sezione di ascissa x :
- $\boldsymbol{\chi}_F(x) \equiv [0, \chi_y(x), \chi_z(x)]^T$

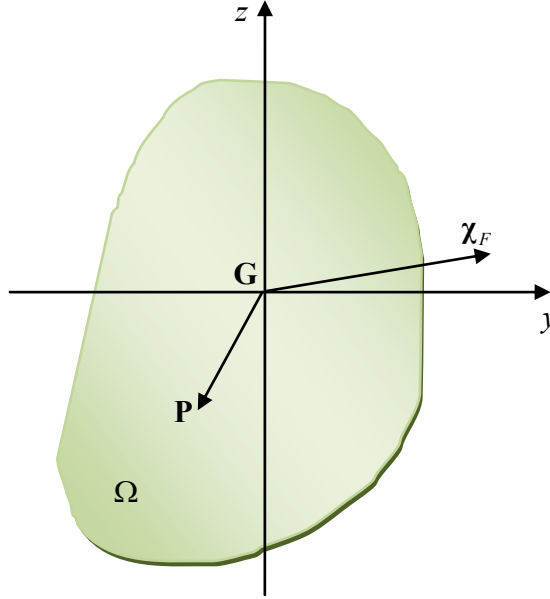


Figura 11 – Sezione trasversale della trave

Tenuto conto delle definizioni introdotte, l'eq. (1.9) si scrive

$$\varepsilon_x(x, y, z)\mathbf{e}_x = \varepsilon_0\mathbf{e}_x + (\chi_y z - \chi_z y)\mathbf{e}_x$$

ovvero

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \varepsilon_0 + \chi_y z - \chi_z y = \begin{bmatrix} 1 & z & -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_z \end{bmatrix} = \mathbf{a}(y, z) \cdot \mathbf{d}(x) \quad (1.10)$$

Nella eq. (1.10) il campo delle deformazioni $\varepsilon_x(x, y, z)$ è descritto dal prodotto scalare tra il vettore $\mathbf{a}(y, z)$ ed il vettore delle deformazioni generalizzate $\mathbf{d}(x)$, realizzando in tal modo una separazione delle variabili da quelle dipendenti dalle ascisse (y, z) a quelle dipendenti dalla posizione x della sezione.

Con riferimento alle deformazioni trasversali principali $(\varepsilon_y, \varepsilon_z)$ queste sono ovunque trascurate mentre gli scorimenti angolari risultano nulli nel caso di trave indeformabile a taglio secondo il modello di Eulero-Bernoulli, ovvero non nulli secondo il modello di Timoshenko.

Nell'ipotesi in cui la trave sia indeformabile a taglio il tensore di deformazione diventa

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Inoltre si assume che il campo delle tensioni sia monodimensionale per cui

$$\sigma_x(x, y, z) = E(x, y, z) \cdot \varepsilon_x(x, y, z) \quad (1.12)$$

Per un fissato campo di tensioni le caratteristiche della sollecitazione $\mathbf{D}(x) = [N(x), M_y(x), M_z(x)]$, in corrispondenza della sezione x , sono ottenute tramite la seguente equazione

$$\mathbf{D}(x) = \begin{bmatrix} N(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{bmatrix} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ -y \end{bmatrix} \cdot \sigma_x(x, y, z) d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{a}^T(y, z) \cdot \sigma_x(x, y, z) d\Omega \quad (1.13)$$

dove Ω è l'area della sezione trasversale della trave. Procedendo ad una modellazione “a fibre” della sezione trasversale della trave l'equazione (1.13) fornisce il metodo di calcolo del vettore delle caratteristiche della sollecitazione agenti nella sezione

$$\mathbf{D}(x) = \begin{pmatrix} N(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{pmatrix} = \sum_{ifib=1}^{Nfib} \mathbf{a}^T(y_{ifib}, z_{ifib}) \cdot \sigma_x(x, y_{ifib}, z_{ifib}) \cdot A_{ifib} \quad (1.14)$$

1.3.3 L'elemento finito trave a plasticità diffusa nella formulazione DB

In questo paragrafo si intende analizzare in dettaglio gli elementi finiti a plasticità diffusa nella formulazione agli spostamenti. In particolare vengono discusse le ipotesi di base e le procedure che vengono adottate per il calcolo della matrice di rigidezza e delle forze nodali reattive (resisting forces) tramite la procedura nota in letteratura come *Element State Determination*.

1.3.3.1 Ipotesi cinematica

Il campo degli spostamenti $\mathbf{u}(x)$ di un punto situato lungo la linea d'asse dell'elemento finito dipende dagli spostamenti nodali $\mathbf{q}_e$ ed è ottenuto tramite funzioni di forma.

$$\text{Sia } \mathbf{u}(x) = [u_x(x, 0, 0), u_y(x, 0, 0), u_z(x, 0, 0)]^t$$

dove

$$\begin{aligned} u_x(x, 0, 0) &= N_{x1}(x) \cdot q_1 + N_{x2}(x) \cdot q_7 \\ u_y(x, 0, 0) &= N_{y1}(x) \cdot q_2 + N_{y2}(x) \cdot q_6 + N_{y3}(x) \cdot q_8 + N_{y4}(x) \cdot q_{12} \\ u_z(x, 0, 0) &= N_{z1}(x) \cdot q_3 + N_{z2}(x) \cdot q_5 + N_{z3}(x) \cdot q_9 + N_{z4}(x) \cdot q_{11} \end{aligned} \quad (1.15)$$

essendo $N_{xi}(x), N_{yj}(x), N_{zj}(x)$ le funzioni di forma e q_i gli spostamenti nodali dell'elemento. L'eq.(1.15) può scriversi nella seguente forma compatta

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}(x)\mathbf{q}_e \quad (1.16)$$

dove

$$\mathbf{N}(x) = \begin{bmatrix} N_{x1}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{x2}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{y1}(x) & 0 & 0 & 0 & N_{y2}(x) & 0 & N_{y3}(x) & 0 & 0 & 0 & N_{y4}(x) \\ 0 & 0 & N_{z1}(x) & 0 & N_{z2}(x) & 0 & 0 & 0 & N_{z3}(x) & 0 & N_{z4}(x) & 0 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Le deformazioni generalizzate $\mathbf{d}(x) = [\varepsilon_0(x), \chi_y(x), \chi_z(x)]^T$ sono ottenute derivando il campo degli spostamenti

$$\mathbf{d}(x) = \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{u}(x) \quad (1.18)$$

dove

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Sostituendo l'eq. (1.16) nell'eq. (1.18) si ottiene

$$\mathbf{d}(x) = \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{N}(x) \mathbf{q}_e = \mathbf{B}(x) \mathbf{q}_e \quad (1.20)$$

essendo $\mathbf{B}(x) = \hat{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{N}(x)$. Bisogna rilevare che nell'approccio classico agli spostamenti le funzioni di forma $\mathbf{N}(x)$, e quindi la matrice $\mathbf{B}(x)$, sono indipendenti dallo stato di danneggiamento dell'elemento. Nel caso in cui la trave risulti danneggiata localmente o in maniera diffusa la risposta in termini di spostamenti si discosta da quella ottenibile. Tale aspetto sarà oggetto di studio dei successivi capitoli.

1.3.3.2 Matrice di rigidezza

La relazione che lega le forze nodali $\mathbf{Q}_e$ agli spostamenti nodali $\mathbf{q}_e$ dell'elemento finito si ottiene applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Ipotizzando che la trave sia soggetta a solo a forze e spostamenti nodali e risulti scarica lungo la sua lunghezza il PLV fornisce

$$\int_V tr(\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{E}) dv = \mathbf{Q}_e^t \cdot \delta \mathbf{q}_e \quad \Rightarrow \quad \int_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dv = \mathbf{Q}_e^t \cdot \delta \mathbf{q}_e \quad (1.21)$$

sostituendo l'eq. (1.12) nell'eq. (1.21) si ottiene

$$\int_V \varepsilon_x \cdot E \cdot \delta \varepsilon_x dv = \mathbf{Q}_e^t \cdot \delta \mathbf{q}_e \quad (1.22)$$

sostituendo l'eq. (1.10) nell'eq. (1.22)

$$\int_V \mathbf{d}^t(x) \cdot \boldsymbol{\alpha}^t(y, z) \cdot E \cdot \boldsymbol{\alpha}(y, z) \cdot \delta \mathbf{d}(x) dv = \mathbf{Q}_e^t \cdot \delta \mathbf{q}_e \quad (1.23)$$

L'integrale di volume contenuto nell'eq. (1.23) può essere ancora scritto come un integrale di area esteso all'area della sezione trasversale $\Omega(x)$

per un integrale di linea esteso sulla lunghezza L della elemento finito trave

$$\int_0^L \mathbf{d}^t(x) \cdot \underbrace{\left[\int \boldsymbol{\alpha}^t(y, z) \cdot E \cdot \boldsymbol{\alpha}(y, z) d\Omega \right]}_{\mathbf{k}(x)} \cdot \delta \mathbf{d}(x) dx = \mathbf{Q}_e^t \cdot \delta \mathbf{q}_e \quad (1.24)$$

L'integrale esteso all'area della sezione trasversale $\Omega(x)$ è noto in letteratura come matrice di rigidezza della sezione x e viene usualmente indicato con il simbolo $\mathbf{k}(x)$. Nel successivo paragrafo verrà dato un significato fisico e matematico a questo integrale. Sostituendo l'eq.(1.20) nell'eq. (1.24) si ottiene

$$\mathbf{q}_e^t \int_0^L \mathbf{B}'(x) \cdot \mathbf{k}(x) \cdot \mathbf{B}(x) dx \cdot \delta \mathbf{q}_e = \mathbf{Q}_e^t \cdot \delta \mathbf{q}_e \quad \forall \delta \mathbf{q}_e \quad (1.25)$$

portando tutti i termini al primo membro si ottiene

$$\left[\mathbf{q}_e^t \int_0^L \mathbf{B}'(x) \cdot \mathbf{k}(x) \cdot \mathbf{B}(x) dx - \mathbf{Q}_e^t \right] \cdot \delta \mathbf{q}_e = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q} \quad (1.26)$$

poiché l'eq. (1.26) deve essere soddisfatta $\forall \delta \mathbf{q}$ deve accadere che

$$\mathbf{q}_e^t \int_0^L \mathbf{B}'(x) \cdot \mathbf{k}(x) \cdot \mathbf{B}(x) dx = \mathbf{Q}_e^t \quad (1.27)$$

e quindi

$$\mathbf{q}_e^t \mathbf{K}_e^t = \mathbf{Q}_e^t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e \quad (1.28)$$

essendo $\mathbf{K}_e$ la matrice di rigidezza dell'elemento finito trave. Stante la sua simmetria risulta

$$\mathbf{K}_e = \int_0^L \mathbf{B}'(x) \cdot \mathbf{k}(x) \cdot \mathbf{B}(x) dx \quad (1.29)$$

Nell'ambito delle procedure numeriche non lineari l'integrale presente nell'eq. (1.29) viene risolto numericamente tramite un metodo di integrazione quale, ad esempio, quello di Gauss-Lobatto. In tal caso l'eq. (1.29) si scrive

$$\mathbf{K}_e = \sum_{r=1}^{N_r} w_r \frac{L}{2} \cdot \mathbf{B}'(x_r) \cdot \mathbf{k}(x_r) \cdot \mathbf{B}(x_r) \quad (1.30)$$

essendo x_r, w_r le ascisse ed i relativi pesi definiti dal metodo di integrazione numerica adottato.

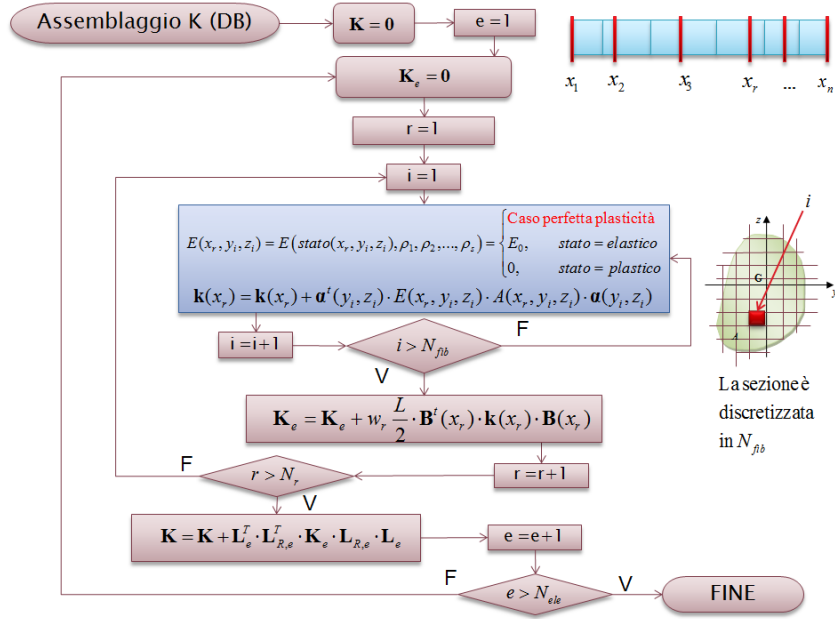


Figura 12 – Diagramma di flusso per l'assemblaggio della matrice di rigidezza dell'elemento finito DB

1.3.3.3 Matrice di rigidezza della sezione

La matrice di rigidezza della sezione costituisce un importante tassello nella determinazione della risposta dell'elemento finito trave a plasticità diffusa. Nel presente paragrafo si intende chiarire meglio il ruolo di questa matrice fornendo al contempo un significato fisico e matematico.

Si consideri un incremento infinitesimo del vettore delle deformazioni generalizzate $d\mathbf{d}(x)$. Tale incremento determina un incremento infinitesimo della deformazione longitudinale $d\varepsilon_x$

$$d\varepsilon_x(x, y, z) = \mathbf{a}(y, z) \cdot d\mathbf{d}(x) \quad (1.31)$$

A tale incremento infinitesimo corrisponde un incremento infinitesimo della tensione longitudinale

$$d\sigma_x(x, y, z) = E(x, y, z) \cdot d\varepsilon_x(x, y, z) \quad (1.32)$$

dove con E si indica la derivata del legame costitutivo monodimensionale $\sigma_x - \varepsilon_x$ valutato nel punto di coordinate (x, y, z)

$$E(x, y, z) = \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial \varepsilon_x} \right)_{P \equiv (x, y, z)} \quad (1.33)$$

Ricordando l'eq. (1.13) scritta in termini incrementali si ha

$$d\mathbf{D}(x) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\alpha}^T(y, z) \cdot d\sigma_x(x, y, z) d\Omega \quad (1.34)$$

Sostituendo l'eq. (1.31) e l'eq. (1.32) nell'eq. (1.34) è possibile ottenere la relazione che sussiste tra l'incremento infinitesimo delle caratteristiche della sollecitazione e quello associato alle deformazioni

$$d\mathbf{D}(x) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\alpha}^T(y, z) \cdot E(x, y, z) \cdot \boldsymbol{\alpha}(y, z) d\Omega \cdot d\mathbf{d}(x)$$

ovvero

$$d\mathbf{D}(x) = \mathbf{k}(x) \cdot d\mathbf{d}(x) \quad (1.35)$$

Nella eq.(1.35) si è indicato con il simbolo $\mathbf{k}(x)$ la matrice di rigidezza della sezione già ottenuta precedentemente nell'eq. (1.24)

$$\mathbf{k}(x) = \int_{\Omega(x)} \boldsymbol{\alpha}^T(y, z) \cdot E(x, y, z) \cdot \boldsymbol{\alpha}(y, z) d\Omega \quad (1.36)$$

Tale matrice di rigidezza assume il significato matematico di derivata del vettore delle caratteristiche della sollecitazione, $\mathbf{D}(x)$, rispetto al vettore delle deformazioni generalizzate, $\mathbf{d}(x)$

$$\mathbf{k}(x) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial N}{\partial \chi_y} & \frac{\partial N}{\partial \chi_z} \\ \frac{\partial M_y}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial M_y}{\partial \chi_y} & \frac{\partial M_y}{\partial \chi_z} \\ \frac{\partial M_z}{\partial \varepsilon} & \frac{\partial M_z}{\partial \chi_y} & \frac{\partial M_z}{\partial \chi_z} \end{bmatrix} \quad (1.37)$$

La matrice di rigidezza della sezione può ancora scriversi esplicitando l'eq. (1.36)

$$\mathbf{k}(x) = \begin{bmatrix} \int_{A(x)} E(x, y, z) dA & \int_{A(x)} E(x, y, z) z dA & - \int_{A(x)} E(x, y, z) y dA \\ \int_{A(x)} E(x, y, z) z dA & \int_{A(x)} E(x, y, z) z^2 dA & - \int_{A(x)} E(x, y, z) y z dA \\ - \int_{A(x)} E(x, y, z) y dA & - \int_{A(x)} E(x, y, z) y z dA & \int_{A(x)} E(x, y, z) y^2 dA \end{bmatrix} \quad (1.38)$$

Nel caso in cui la sezione sia composta da materiale omogeneo ed il sistema di riferimento locale dell'elemento finito sia principale di inerzia, l'eq. (1.38) si riduce nella seguente relazione

$$\mathbf{k}(x) = E \begin{bmatrix} A(x) & 0 & 0 \\ 0 & J_y(x) & 0 \\ 0 & 0 & J_z(x) \end{bmatrix} = E \mathbf{J}(x) \quad (1.39)$$

dove $\mathbf{J}(x)$ è la matrice di inerzia della sezione. Procedendo ad una modellazione *a fibre* della sezione trasversale della trave è possibile calcolare la matrice di rigidezza della sezione tramite l'eq. (1.36) in funzione delle rigidezze assunte dalle singole fibre

$$\mathbf{k}(x) = \sum_{ifib=1}^{n(x)} \boldsymbol{\alpha}^T(y_{ifib}, z_{ifib}) \cdot E_{ifib} \cdot \boldsymbol{\alpha}(y_{ifib}, z_{ifib}) \cdot A_{ifib} \quad (1.40)$$

dove E_{ifib} è la derivata del legame costitutivo $\sigma_x - \varepsilon_x$ della i-esima fibra contenuta nella sezione. Dall'eq. (1.40) si ottiene

$$\mathbf{k}(x) = \begin{bmatrix} \sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib} \cdot A_{ifib} & \sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib} \cdot A_{ifib} \cdot z_{ifib} & - \sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib} \cdot A_{ifib} \cdot y_{ifib} \\ \sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib} \cdot A_{ifib} \cdot z_{ifib} & \sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib} \cdot A_{ifib} \cdot z_{ifib}^2 & - \sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib} \cdot A_{ifib} \cdot y_{ifib} \cdot z_{ifib} \\ - \sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib} \cdot A_{ifib} \cdot y_{ifib} & - \sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib} \cdot A_{ifib} \cdot y_{ifib} \cdot z_{ifib} & \sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib} \cdot A_{ifib} \cdot y_{ifib}^2 \end{bmatrix} \quad (1.41)$$

L'eq. (1.35) può ancora essere scritta in termini finiti

$$\Delta \mathbf{D}(x) = \mathbf{k}(x) \cdot \Delta \mathbf{d}(x) \quad (1.42)$$

Con riferimento alle procedure di analisi strutturale la determinazione della matrice di rigidezza dell'elemento finito trave $\mathbf{K}_e$ avviene tramite integrazione numerica dell'eq. (1.29). Nel caso in cui si adotti il metodo di integrazione alla Gauss l'eq. (1.29) diventa

$$\mathbf{K}_e = \int_0^L \mathbf{B}'(x) \cdot \mathbf{k}(x) \cdot \mathbf{B}(x) dx \approx \sum_{r=1}^{N_r} \mathbf{B}'(x_r) \cdot \mathbf{k}(x_r) \cdot \mathbf{B}(x_r) \cdot w_r \frac{L}{2} \quad (1.43)$$

essendo w_r i pesi di Gauss. Affinchè sia possibile calcolare la matrice di rigidezza dell'elemento finito tramite l'eq. (1.43) è necessario determinare le matrici di rigidezza delle sezioni $\mathbf{k}(x_r)$ in corrispondenza delle sezioni x_r di controllo (o di Gauss): solo in corrispondenza di queste sezioni è necessario, dunque, valutare lo stato di sollecitazione e di deformazione in cui si trovano le fibre della sezione. La valutazione di quest'ultime avviene in maniera diretta tramite le eq.(1.10) e eq.(1.20). Dal legame costitutivo delle fibre è possibile ricavare l'incremento di tensione $\Delta \sigma_x$ e valutare la corrispondente rigidezza tangente E_{ifib} della fibra stessa. Le caratteristiche della sollecitazione $\Delta \mathbf{D}(x_r)$ sono allora immediatamente determinate attraverso l'eq. (1.13) scritta in termini incrementali

$$\Delta \mathbf{D}(x) = \int_{\Omega} \mathbf{a}^T(y, z) \cdot \Delta \sigma_x(x, y, z) d\Omega \quad (1.44)$$

1.3.3.4 Forze nodali reattive (resisting forces)

Nota la distribuzione delle caratteristiche della sollecitazione lungo l'elemento, $\mathbf{D}(x_r)$, il vettore delle forze nodali dell'elemento (element resisting forces), $\mathbf{Q}_e$, può essere calcolato applicando il principio dei lavori virtuali

$$\delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{Q}_e = \int_0^L \delta \mathbf{d}^T(x) \mathbf{D}(x) dx \quad (1.45)$$

Sostituendo l'eq. (1.20) nella eq. (1.45) si ottiene

$$\delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{Q}_e = \delta \mathbf{q}_e^T \int_0^L \mathbf{B}^T(x) \mathbf{D}(x) dx \quad (1.46)$$

Portando tutti i termini al primo membro si ha

$$\delta \mathbf{q}_e^T \cdot \left[\mathbf{Q}_e - \int_0^L \mathbf{B}^T(x) \mathbf{D}(x) dx \right] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q}_e \quad (1.47)$$

Tale relazione deve essere soddisfatta per un arbitrario campo di spostamenti $\delta \mathbf{q}_e$ per cui dovrà essere

$$\mathbf{Q}_e = \int_0^L \mathbf{B}^T(x) \cdot \mathbf{D}(x) dx \quad (1.48)$$

Con riferimento alle procedure di analisi strutturale la determinazione della matrice di rigidezza dell'elemento finito trave $\mathbf{Q}_e$ avviene tramite integrazione numerica dell'eq. (1.48). Nel caso in cui si adotti il metodo di integrazione alla Gauss l'eq. (1.48) diventa

$$\mathbf{Q}_e = \int_0^L \mathbf{B}^T(x) \cdot \mathbf{D}(x) dx \approx \sum_{r=1}^{N_r} \mathbf{B}^T(x_r) \cdot \mathbf{D}(x_r) \cdot w_r \frac{L}{2} \quad (1.49)$$

essendo w_r i pesi di Gauss.

1.3.3.5 Determinazione dello stato dell'elemento (Element State Determination)

Con il termine “*determinazione dello stato dell'elemento*” (*Element State determination*) si intende la soluzione del problema della ricerca delle forze nodali dell'elemento per spostamenti nodali imposti. Simbolicamente ciò si può esprimere come

$$\Delta \mathbf{Q}_e = f(\Delta \mathbf{q}_e) \quad (1.50)$$

in cui $\Delta \mathbf{Q}_e$ e $\Delta \mathbf{q}_e$ sono rispettivamente l'incremento delle forze e degli spostamenti nodali dell'elemento. Tale problematica non si pone in re-

gime elastico-lineare, in quanto le relazioni tra il campo di forze ed il campo degli spostamenti sono lineari ed invertibili.

Con riferimento agli elementi finiti DB, la sequenza delle operazioni contenute nell'eq. (1.50) è riassumibile nei seguenti punti:

- 1) Per un incremento finito di spostamenti nodali $\Delta \mathbf{q}_e$ si impone a ciascuna sezione x_r di controllo un campo di deformazioni generalizzate congruente $\Delta \mathbf{d}(x_r)$ tramite l'eq. (1.20):

$$\Delta \mathbf{d}(x_r) = \mathbf{B}(x_r) \Delta \mathbf{q}_e$$

- 2) Le caratteristiche della sollecitazione $\Delta \mathbf{D}(x_r)$ che scaturiscono dal campo di deformazioni imposto $\Delta \mathbf{d}(x_r)$ sono ottenute mediante l'analisi sezionale (Section State Determination, cfr. § 1.3.3.6) Tale procedura si può esprimere simbolicamente come $\Delta \mathbf{D}(x_r) = g[\Delta \mathbf{d}(x_r)]$

- 3) Noti gli incrementi delle caratteristiche della sollecitazione $\Delta \mathbf{D}(x_r)$ nelle sezioni di controllo è possibile calcolare l'incremento delle forze nodali reattive (resisting forces) tramite l'eq. (1.49)

$$\Delta \mathbf{Q}_e = \sum_{r=1}^{N_r} \mathbf{B}^T(x_r) \cdot \Delta \mathbf{D}(x_r) \cdot w_r \frac{L}{2}$$

1.3.3.6 Determinazione dello stato della sezione

Con il termine “*analisi sezionale*” o “*determinazione dello stato della sezione*” (*Section State Determination*), si intende il problema relativo alla determinazione delle caratteristiche della sollecitazione che scaturiscono per un fissato campo di deformazioni generalizzate imposto alla sezione. Simbolicamente ciò si può esprimere come

$$\Delta \mathbf{D}(x_r) = g[\Delta \mathbf{d}(x_r)] \quad (1.51)$$

La soluzione di questo tipo di problema può essere ottenuta mediante la teoria classica della plasticità basata sull'uso di legami costitutivi non lineari a livello di sezione che possono essere espressi in termini di caratteristiche della sollecitazione (N, M, V) e deformazioni generalizzate

$(\varepsilon, \chi, \gamma)$, ovvero mediante una modellazione a fibre della sezione. In quest'ultimo caso la procedura usualmente adottata consiste nella valutazione del campo di tensioni che si instaura in ciascuna fibra della sezione. A tal fine si calcola, per ciascuna fibra della sezione, l'incremento della deformazione $\Delta\varepsilon_x$ tramite l'eq.(1.31) qui riportata per semplicità

$$\Delta\varepsilon_x(x_r, y_{ifib}, z_{ifib}) = \boldsymbol{\alpha}(y_{ifib}, z_{ifib}) \cdot \Delta\mathbf{d}(x_r) \quad (1.52)$$

essendo (y_{ifib}, z_{ifib}) le coordinate che individuano la posizione della fibra nella sezione di ascissa x_r . Noto l'incremento di deformazione si calcola tramite l'eq.(1.32) l'incremento della tensione elastica $\Delta\sigma_x^E = E\Delta\varepsilon_x$ della fibra ed il suo valore totale $\sigma_x^E = \sigma_x + \Delta\sigma_x^E$. Quindi si verifica la condizione di ammissibilità plastica della tensione elastica, σ_x^E , tramite la legge di flusso plastico $\varphi(\sigma_x^E) \leq 0$ assegnata alla fibra. Nel caso in cui la verifica non sia soddisfatta si procede alla correzione plastica della tensione ed al calcolo della deformazione plastica in accordo alla teoria classica della plasticità, viceversa la tensione elastica si assume ammissibile e non si hanno incrementi di deformazione plastica. In entrambi i casi tale operazione fornisce lo stato tensionale effettivo σ_x ovvero il suo incremento $\Delta\sigma_x$ nonché la relativa rigidezza tangente E_{ifib} della fibra. Noto il campo di tensione in ciascuna fibra della sezione di controllo in x_r è possibile calcolare l'incremento delle caratteristiche della sollecitazione $\Delta\mathbf{D}(x_r)$ tramite l'eq. (1.14) espressa in termini incrementali

$$\Delta\mathbf{D}(x_r) = \sum_{ifib=1}^{Nfib} \boldsymbol{\alpha}^t(y_{ifib}, z_{ifib}) \cdot \Delta\sigma_x(x_r, y_{ifib}, z_{ifib}) \cdot A_{ifib}$$

Nel seguente grafico si riporta il diagramma di flusso dell'Element State Determination relativo all'elemento finito formulato in termini di spostamenti.

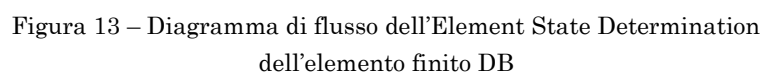


Figura 13 – Diagramma di flusso dell'Element State Determination
dell'elemento finito DB

1.3.4 L'elemento finito trave a plasticità diffusa nella formulazione FB

Gli elementi finiti trave formulati in termini di forze (FB), sono basati sull'uso di funzioni interpolanti delle caratteristiche della sollecitazione, dette anche funzioni di forma nelle forze. Per travi ad asse rettilineo è possibile descrivere la risposta della trave mediante la cosiddetta formulazione co-rotazionale che permette la riduzione dei gradi di libertà flessionali dell'elemento finito alle sole componenti rotazionali, escludendo quelli traslazionali che possono essere associati a puri atti di moto rigido. In tal senso è possibile indicare con $\mathbf{Q}_e$ e $\mathbf{q}_e$ rispettivamente i vettori delle forze e degli spostamenti nodali dell'elemento finito con modi di corpo rigido,

$$\mathbf{Q}_e = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10}, Q_{11}, Q_{12})^T \quad (1.53)$$

$$\mathbf{q}_e = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12})^T \quad (1.54)$$

e con $\bar{\mathbf{Q}}_e$ e $\bar{\mathbf{q}}_e$ rispettivamente i vettori delle forze e degli spostamenti nodali dell'elemento finito senza modi di corpo rigido

$$\bar{\mathbf{Q}}_e = (\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, \bar{Q}_3, \bar{Q}_4, \bar{Q}_5)^T \quad (1.55)$$

$$\bar{\mathbf{q}}_e = (\bar{q}_1, \bar{q}_2, \bar{q}_3, \bar{q}_4, \bar{q}_5)^T \quad (1.56)$$

Nella formulazione co-rotazionale tali quantità vettoriali sono messe in relazione tramite le seguenti equazioni

$$\bar{\mathbf{q}}_e = \mathbf{L}_{RBM} \mathbf{q}_e \quad (1.57)$$

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{L}_{RBM}^T \bar{\mathbf{Q}}_e \quad (1.58)$$

essendo $\mathbf{L}_{RBM}$ la matrice di trasformazione

$$\mathbf{L}_{RBM} = \begin{bmatrix} 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1/L & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1/L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/L & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

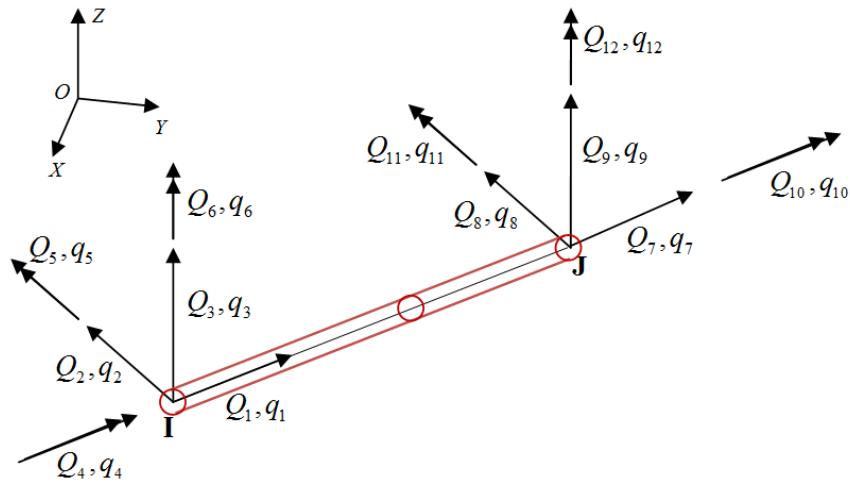


Figura 14 - Forze e spostamenti nodali dell'elemento finito con modi di corpo rigido

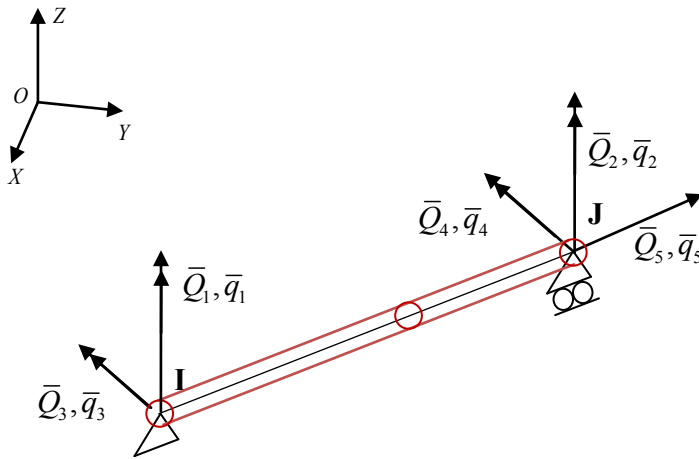


Figura 15 – Forze e spostamenti nodali dell'elemento finito senza modi di corpo rigido

Sotto queste ipotesi è possibile individuare dei polinomi che descrivono la distribuzione delle caratteristiche della sollecitazione in modo che siano contemporaneamente soddisfatte sia le equazioni indefinite di equilibrio che le equazioni di equilibrio al contorno (Zeris and Mahin 1988, 1991). Nell'ipotesi che la trave sia soggetta a sole forze nodali le caratteristiche della sollecitazione sono espresse tramite la seguente relazione vettoriale

$$\mathbf{D}(x) = \begin{bmatrix} N(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{bmatrix} = \mathbf{b}(x) \bar{\mathbf{Q}}_e \quad (1.59)$$

essendo $\mathbf{b}(x)$

$$\mathbf{b}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi - 1 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \xi - 1 & \xi \end{bmatrix}, \quad \xi = \frac{x}{L} \quad (1.60)$$

la matrice che contiene le funzioni interpolanti. Tali funzioni, note anche come *integrali di equilibrio*, sono ottenute direttamente dalle ben note equazioni indefinite di equilibrio

$$\frac{\partial N}{\partial x} + p_x = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} + p_z = 0, \quad \frac{\partial M}{\partial x} - V + m = 0 \quad (1.61)$$

dove (p_x, p_z, m) sono i carichi distribuiti applicati alla trave (rispettivamente carichi assiali, flessionali e momenti distribuiti), e (N, V, M) rispettivamente lo sforzo normale, lo sforzo di taglio e il momento flettente. Tali equazioni sono soddisfatte sia in campo elastico che in quello inelastico, indipendentemente dal particolare legame costitutivo o dalla variabilità della sezione della trave.

1.3.4.1 Relazioni fondamentali

La relazione di congruenza tra il campo degli spostamenti nodali $\bar{\mathbf{q}}_e$ e delle deformazioni generalizzate $\mathbf{d}$ è ottenuta in forma debole applicando il principio dei lavori virtuali

$$\bar{\mathbf{q}}_e^t \cdot \delta \bar{\mathbf{Q}}_e = \int_0^L \mathbf{d}'(x) \cdot \delta \mathbf{D}(x) dx \quad (1.62)$$

Sostituendo l'eq.(1.59) nell'eq.(1.62) si ottiene

$$\bar{\mathbf{q}}_e^t \cdot \delta \bar{\mathbf{Q}}_e = \int_0^L \mathbf{d}'(x) \cdot \mathbf{b}(x) dx \cdot \delta \bar{\mathbf{Q}}_e \quad \forall \delta \bar{\mathbf{Q}}_e$$

Tale relazione deve essere soddisfatta per ogni campo di forze equilibrato. Pertanto risulta

$$\bar{\mathbf{q}}_e = \int_0^L \mathbf{b}'(x) \cdot \mathbf{d}(x) dx \quad (1.63)$$

L'eq.(1.63) costituisce la condizione di congruenza tra il campo di deformazioni interne $\mathbf{d}(x)$ e gli spostamenti nodali $\bar{\mathbf{q}}_e$. Nella trave a plasticità diffusa FB si assume che sia sempre possibile esprimere le caratteristiche della sollecitazione in funzione delle deformazioni generalizzate tramite la cosiddetta analisi sezionale (Section State Determination, descritta al § 1.3.3.5 nell'ambito dell'elemento finito trave DB), che simbolicamente si può esprimere come

$$\mathbf{D}(x) = g[\mathbf{d}(x)] \quad (1.64)$$

Nel caso in cui la sezione venga modellata a fibre tale analisi consiste nel determinare il campo di tensioni nella fibre scaturenti per un fissato campo di deformazioni imposto. Le caratteristiche della sollecitazione sono quindi ottenute per integrazione numerica tramite l'eq. (1.14).

La relazione inversa non si può esprimere in termini espliciti ma solo in forma incrementale

$$\Delta \mathbf{d}(x) = \mathbf{f}(x) \Delta \mathbf{D}(x) \quad (1.65)$$

dove $\mathbf{f}(x)$ è la matrice di flessibilità della sezione. Quest'ultima si ottiene invertendo la matrice di rigidezza della sezione $\mathbf{k}(x)$ già descritta al § 1.3.3.3.

$$\mathbf{f}(x) = \mathbf{k}^{-1}(x) \quad (1.66)$$

Con riferimento alle procedure di analisi non lineare basate sul Direct Stiffness Method è necessario esprimere la relazione tra le forze e gli spostamenti nodali dell'elemento finito FB. Tale relazione si ottiene mediante l'applicazione del principio dei lavori virtuali

$$\bar{\mathbf{q}}_e^t \cdot \delta \bar{\mathbf{Q}}_e = \int_0^L \mathbf{d}'(x) \cdot \delta \mathbf{D}(x) dx \quad (1.67)$$

Sostituendo le eq. (1.59) (1.65) nell'eq.(1.62) si ottiene

$$\bar{\mathbf{q}}_e^t \cdot \delta \bar{\mathbf{Q}}_e = \bar{\mathbf{Q}}_e^t \cdot \int_0^L \mathbf{b}'(x) \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{b}(x) dx \cdot \delta \bar{\mathbf{Q}}_e \quad \forall \delta \bar{\mathbf{Q}}_e$$

Tale relazione deve essere soddisfatta per ogni campo di forze equilibrato. Pertanto risulta

$$\bar{\mathbf{q}}_e = \int_0^L \mathbf{b}'(x) \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{b}(x) dx \cdot \bar{\mathbf{Q}}_e$$

ovvero

$$\bar{\mathbf{q}}_e = \bar{\mathbf{F}}_e \cdot \bar{\mathbf{Q}}_e \quad (1.68)$$

dove con $\bar{\mathbf{F}}_e$ si indica la matrice di flessibilità dell'elemento

$$\bar{\mathbf{F}}_e = \int_0^L \mathbf{b}'(x) \mathbf{f}(x) \cdot \mathbf{b}(x) dx \quad (1.69)$$

Nell'ambito delle procedure non lineari l'integrale nell'eq. (1.69) viene risolto mediante metodi di integrazione numerica

$$\bar{\mathbf{F}}_e = \sum_{r=1}^{N_r} w_r \frac{L}{2} \cdot \mathbf{b}'(x_r) \mathbf{f}(x_r) \cdot \mathbf{b}(x_r) \quad (1.70)$$

dove x_r, w_r sono le ascisse e i pesi del metodo di integrazione numerica adottato. Con riferimento all'elemento finito FB dotato di gradi di libertà di corpo rigido, eq. (1.54) è possibile ottenere, in definitiva, la matrice di rigidezza $\mathbf{K}_e$ tramite le equazioni (1.57), (1.58) e (1.68)

$$\mathbf{Q}_e = \mathbf{L}_{RBM} \cdot \bar{\mathbf{F}}_e^{-1} \cdot \mathbf{L}_{RBM} \cdot \mathbf{q}_e = \mathbf{K}_e \cdot \mathbf{q}_e \quad (1.71)$$

1.3.4.2 Determinazione dello stato dell'elemento secondo Spacone et al. (1996)

In questo paragrafo viene sinteticamente presentata la procedura risolutiva proposta da Spacone et al. (1996) in una veste parzialmente rivisitata nella simbologia adottata. Questa procedura, basata sull'algoritmo di Newton Raphson a controllo di spostamenti, fornisce le forze resistenti dell'elemento in corrispondenza di un campo di spostamenti nodali imposti, in maniera tale che siano sempre soddisfatte le condizioni di equilibrio e di congruenza. Come già premesso, non essendo questo l'argomento principe della ricerca sviluppata, la trattazione sarà improntata sull'operatività più che sugli aspetti teorici.

- 1) Per un fissato incremento di spostamenti nodali $\Delta \bar{\mathbf{q}}_i$ si calcola l'incremento delle forze nodali di primo tentativo $\Delta \bar{\mathbf{Q}}_i^{j=0}$ tramite la matrice di flessibilità iniziale dell'elemento $\bar{\mathbf{F}}^{j=0}$ ovvero la sua inversa, quest'ultima calcolata tramite l'eq. (1.70)

$$\Delta \bar{\mathbf{Q}}_i^j = \left(\bar{\mathbf{F}}^{j=0} \right)^{-1} \cdot \Delta \bar{\mathbf{q}}_i \quad (1.72)$$

e si assegna

$$\bar{\mathbf{Q}}_i^{j=1} = \Delta \bar{\mathbf{Q}}_i^{j=1} + \bar{\mathbf{Q}}_{i-1} \quad (1.73)$$

Nelle espressioni si è indicato con i l'indice di iterazione a livello strutturale e con j l'indice di iterazione di elemento.

- 2) Note le forze nodali $\Delta\bar{\mathbf{Q}}_i^j$, per ciascuna sezione x_r di controllo si impone una distribuzione di caratteristiche della sollecitazione tramite le funzioni di forma nelle forze

$$\Delta\mathbf{D}^j(x_r) = \mathbf{b}(x_r) \cdot \Delta\bar{\mathbf{Q}}_i^j \quad (1.74)$$

dove nel termine $\Delta\mathbf{D}^j(x_r)$ si è omissso il pedice i per semplicità

- 3) Nell'approccio in termini di forze le deformazioni generalizzate $\Delta\mathbf{d}^j(x_r)$ non possono essere calcolate direttamente dalle caratteristiche della sollecitazione $\Delta\mathbf{D}^j(x_r)$ perché le relazioni costitutive sono in genere fornite in termini di deformazione e non di forze. Per superare questo ostacolo si calcola una soluzione di tentativo delle deformazioni generalizzate $\Delta\mathbf{d}^j(x_r)$ ottenuta tramite la matrice di flessibilità tangente della sezione $\mathbf{f}^j(x_r)$

$$\Delta\mathbf{d}^j(x_r) = \mathbf{f}^j(x_r)\Delta\mathbf{D}^j(x_r) + \Delta\mathbf{d}_U^{j-1}(x_r) \quad (1.75)$$

dove $\Delta\mathbf{d}_U^{j-1}(x_r)$ è un vettore inizialmente nullo. Quindi si valutano gli incrementi delle caratteristiche della sollecitazione tramite l'analisi sezionale (Section State Determination) che scaturiscono dal campo di deformazioni generalizzate imposto (cfr. § 1.3.3.6). Simbolicamente ciò si traduce nella relazione

$$\Delta\mathbf{D}^j(x_r) = \mathbf{g}[\Delta\mathbf{d}^j(x_r)] \quad (1.76)$$

- 4) Le caratteristiche della sollecitazione così calcolate non risultano in generale in equilibrio con le forze nodali $\Delta\bar{\mathbf{Q}}_i^j$ tramite le funzioni di forma nelle forze (essendo state ottenute mediante una soluzione di tentativo), per cui si determina un residuo locale delle caratteristiche della sollecitazione

$$\Delta\mathbf{D}_U^j(x_r) = \mathbf{b}(x_r) \cdot \Delta\bar{\mathbf{Q}}_i^j - \Delta\mathbf{D}^j(x_r) \quad (1.77)$$

- 5) Successivamente, riassemble la matrice di flessibilità tangente della sezione, $\mathbf{f}^j(x_r)$, si calcola il residuo delle deformazioni generalizzate, $\Delta\mathbf{d}_U^j(x_r)$, associato al residuo delle caratteristiche della sollecitazione, $\Delta\mathbf{D}_U^j(x_r)$, tramite la relazione

$$\Delta\mathbf{d}_U^j(x_r) = \mathbf{f}^j(x_r)\Delta\mathbf{D}_U^j(x_r) \quad (1.78)$$

Tale residuo $\Delta \mathbf{d}_U^j(x_r)$ sta a significare che il campo di deformazioni $\Delta \mathbf{d}^j(x_r)$ assunto lungo l'elemento non è esatto, ma necessita di una correzione. Per correggere il campo di deformazioni, si intraprende una procedura iterativa.

- 6) Si calcola il vettore degli spostamenti nodali residui $\Delta \bar{\mathbf{q}}_U^j$ che risulti congruente con le deformazioni residue $\Delta \mathbf{d}_U^j(x_r)$ tramite l'eq.(1.63)

$$\Delta \bar{\mathbf{q}}_U^j = \int_0^L \mathbf{b}^t(x) \cdot \Delta \mathbf{d}_U^j(x) dx \approx \sum_{r=1}^{N_r} w_r \frac{L}{2} \cdot \mathbf{b}^t(x_r) \cdot \Delta \mathbf{d}_U^j(x_r) \quad (1.79)$$

Si riassume la matrice di flessibilità tangente dell'elemento e si aggiorna il vettore delle forze nodali dell'elemento

$$\bar{\mathbf{Q}}_i^{j+1} = \bar{\mathbf{Q}}_i^j - (\bar{\mathbf{F}}^j)^{-1} \Delta \bar{\mathbf{q}}_U^j \quad (1.80)$$

- 7) Nel caso in cui il residuo, valutato integralmente sull'elemento in termini energetici, eccede la tolleranza ritenuta accettabile si applica all'elemento finito un nuovo campo di forze nodali

$$\Delta \bar{\mathbf{Q}}_i^{j+1} = -(\mathbf{F}^j)^{-1} \Delta \bar{\mathbf{q}}_U^j \quad (1.81)$$

e si ripete la procedura descritta al punto (2) per $j=j+1$.

Nei seguenti grafici si riporta una descrizione visiva dell'Element State Determination come suggerita da Spacone et al. (1996).

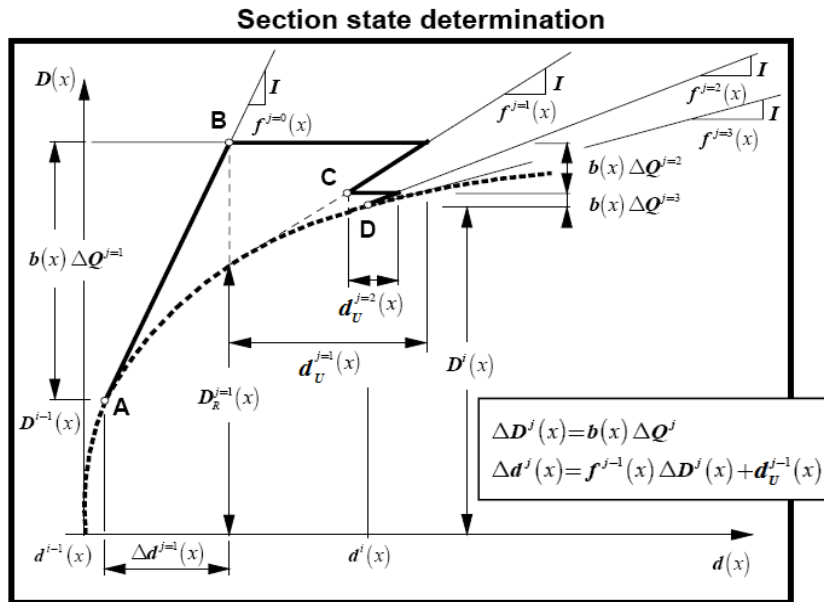
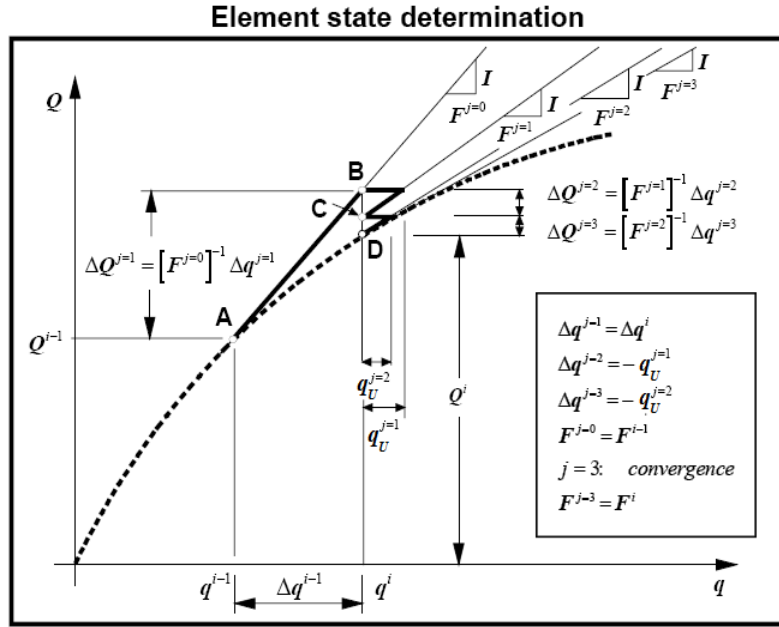


Figura 16 – Element State Determination dell'elemento finito FB
tratto da Spacone et al (1996)

1.3.4.3 Determinazione dello stato dell'elemento senza iterazioni

In questo paragrafo viene sinteticamente presentata la procedura risolutiva proposta da Neuenhofer & Filippou (1997) in una veste parzialmente rivisitata nella simbologia adottata. La procedura numerica proposta da Neuenhofer & Filippou (1997), come detto al § 1.2.2, non richiede iterazioni interne alla fase di valutazione dello stato dell'elemento, sebbene si ammetta il soddisfacimento delle equazioni indefinite di equilibrio soltanto al raggiungimento della convergenza della soluzione. Come già premesso negli altri paragrafi, non essendo questo l'argomento principe della ricerca sviluppata, la trattazione sarà improntata sull'operatività più che sugli aspetti teorici.

- 1) Per un fissato incremento di spostamenti nodali $\Delta \bar{\mathbf{q}}_i$ imposto all'elemento finito nell'iterazione *i-esima* dell'algoritmo di Newton-Raphson a livello strutturale, si calcola l'incremento delle forze nodali $\Delta \bar{\mathbf{Q}}_i$ tramite la matrice di flessibilità tangente dell'elemento $\bar{\mathbf{F}}_{i-1}$, ovvero la sua inversa, valutata nell'iterazione precedente (*i-1*)

$$\Delta \bar{\mathbf{Q}}_i = (\bar{\mathbf{F}}_{i-1})^{-1} \cdot \Delta \bar{\mathbf{q}}_i \quad (1.82)$$

- 2) Note le forze nodali $\Delta \bar{\mathbf{Q}}_i$ si impone all'elemento una distribuzione di caratteristiche della sollecitazione tramite le funzioni di forma nelle forze

$$\Delta \mathbf{D}_i(x_r) = \mathbf{b}(x_r) \cdot \Delta \bar{\mathbf{Q}}_i + \mathbf{D}_{i-1}^U(x_r) \quad (1.83)$$

a cui corrisponde un campo di deformazioni generalizzate

$$\Delta \mathbf{d}_i(x_r) = \mathbf{f}_{i-1}(x_r) \Delta \mathbf{D}_i(x_r) \quad (1.84)$$

dove $\mathbf{D}_{i-1}^U(x_r)$ è un vettore inizialmente nullo che contiene le caratteristiche della sollecitazione non bilanciate nell'iterazione precedente (*i-1*). Quindi si valutano gli incrementi delle caratteristiche della sollecitazione tramite l'analisi sezionale (Section State Determination) che scaturiscono dal campo di deformazioni generalizzate imposto (cfr. § 1.3.3.6)

$$\mathbf{D}_i(x_r) = g[\mathbf{d}_i(x_r)] \quad (1.85)$$

dove $\mathbf{d}_i(x_r) = \mathbf{d}_{i-1}(x_r) + \Delta \mathbf{d}_i(x_r)$

- 3) Successivamente, riassemblata la matrice di flessibilità tangente della sezione, $\mathbf{f}_i(x_r)$, si calcola le deformazioni generalizzate residue, $\Delta \mathbf{d}_i^U(x_r)$, tramite la relazione

$$\Delta \mathbf{d}_i^U(x_r) = \mathbf{f}_i(x_r)[\mathbf{D}_{i-1}(x_r) + \Delta \mathbf{D}_i(x_r) - \mathbf{D}_i(x_r)] \quad (1.86)$$

- 4) Tale deformazioni residue $\Delta \mathbf{d}_i^U(x_r)$ stanno a significare che il campo di deformazioni $\Delta \mathbf{d}_i(x_r)$ assunto lungo l'elemento non è esatto, ma necessita di una correzione. Per correggere il campo di deformazioni, si calcola il vettore degli spostamenti nodali residui $\Delta \bar{\mathbf{q}}_i^U$ che risulti congruente con le deformazioni residue $\Delta \mathbf{d}_i^U(x_r)$ tramite l'eq.(1.63) ottenuta mediante il PLV

$$\Delta \bar{\mathbf{q}}_i^U = \int_0^L \mathbf{b}^t(x) \cdot \Delta \mathbf{d}_i^U(x) dx \approx \sum_{r=1}^{N_r} w_r \frac{L}{2} \cdot \mathbf{b}^t(x_r) \cdot \Delta \mathbf{d}_i^U(x_r) \quad (1.87)$$

- 5) Questi spostamenti residui vengono trasformati in forze nodali residue in maniera tale che le forze nodali resistenti risultino

$$\bar{\mathbf{Q}}_i = \bar{\mathbf{Q}}_{i-1} + \Delta \bar{\mathbf{Q}}_i - \bar{\mathbf{F}}_i^{-1} \Delta \bar{\mathbf{q}}_i^U \quad (1.88)$$

dove $\mathbf{F}_i$ è la matrice di flessibilità tangente ottenuta tramite l'eq.(1.70). Le caratteristiche della sollecitazione $\mathbf{D}_i(x_r)$, imposte all'elemento mediante l'eq. (1.85), non risultano in generale in equilibrio con le forze nodali $\bar{\mathbf{Q}}_i$ tramite le funzioni di forma nelle forze, per cui si determina in ciascuna sezione di controllo un residuo locale delle caratteristiche della sollecitazione

$$\mathbf{D}_i^U(x_r) = \mathbf{b}(x_r) \bar{\mathbf{Q}}_i - \mathbf{D}_i(x_r) \quad (1.89)$$

tale residuo indica che il campo delle caratteristiche della sollecitazione non è esatto e dovrà essere corretto nell'iterazione successiva tramite l'eq.(1.83).

La procedura così definita consente all'elemento finito di ottenere il soddisfacimento delle condizioni di congruenza sebbene le condizioni indefinite di equilibrio risultano soddisfatte soltanto quando si raggiunge la convergenza della soluzione a livello strutturale. In tal caso il residuo nelle caratteristiche della sollecitazioni, $\mathbf{D}_i^U(x_r)$, tende a zero.

8. Ciampi, V. and Carlesimo, L., 1986. "A Nonlinear Beam element for Seismic Analysis of Structures." 8th European Conference on Earthquake Engineering, Lisbon.
9. Clough, R. and Benuska, L., 1967. "Nonlinear Earthquake Behavior of Tall Buildings." *Journal of Mechanical Engineering, ASCE*, 93(EM 3), pp. 129-146.
10. Clough, R. and Johnston, S., 1966. "Effect of Stiffness Degradation on Earthquake Ductility Requirements." *Transactions of Japan Earthquake Engineering Symposium*, Tokyo, pp. 195-198.
11. D'Ambrisi, A. and Filippou, F. C., 1999, "Modeling of Shear Behavior in RC Members", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 125(10).
12. Darvall, L.P. and Mendis, P., 1985. "Elastic-Plastic-Softening Analysis of Plane Frames." *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 11(ST4), pp. 871-888.
13. Filippou, F.C., Popov, E.P. and Bertero, V.V., 1983. "Effects of Bond Deterioration on Hysteretic Behavior of Reinforced Concrete Joints." EERC Report 83-19, Earthquake Engineering. Research Center, Berkeley.
14. Filippou, F.C., and Issa, A., 1988. "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames under Cyclic Load Reversals." EERC Report 88-12, Earthquake Engineering. Research Center, Berkeley.
15. Filippou, F.C., Spacone, E., 1996. "FEDEAS: Nonlinear Analysis for Structural Evaluation", *Proceedings, 11th World Conference in Earthquake Engineering*, Acapulco, Mexico, June 1996.
16. Filippou, F.C., 1996. "Nonlinear Static and Dynamic Analysis for Evaluation of Structures", *Proceedings, 3rd European Conference on Structural Dynamics Eurodyn'96*, Florence, Italy, June 1996.
17. Filippou, F.C., 1996. "FEDEAS: Nonlinear Static Dynamic Analysis from Research to Practice", *Proceedings, ASCE Structures Congress*, Chicago, April 1996.

18. Giberson, M., 1967. "The Response of Nonlinear Multi-Story Structures Subjected to Earthquake Excitations." Earthquake Engineering Research Laboratory, Pasadena.
19. Guedes, J. e Pinto, A.V., 1997. "A Numerical Models for Shear Dominates Bridges Piers", Proceedings of the Second Italy-Japan Workshop on Seismic Design and Retrofit of Bridges, Rome, Italy.
20. Guedes, J., Pegon, P. e Pinto, A.V., 1994-1997. "A Fiber-Timoshenko Beam Element in CASTEM 2000", Special publication Nr. 1.94.31 Applied Mechanics Unit, Safety Technology Institute, Commission of European Communities, Joint Research Centre, Ispra Establishment, Italy
21. Hellesland, J. and Scordelis, A., 1981. "Analysis of RC Bridge Columns Under Imposed Deformations." IABSE Colloquium, Delft, Netherlands, pp. 545-559.
22. H. D. Hibbitt, P. V. Marcal and J. R. Rice, 1970 "Finite element formulation for problems of large strain and large displacements", Int. J. Solids Struct. 6, 1069-1086.
23. Iwan, W., 1978. "Application of Nonlinear Analysis Techniques." in, Iwan W. ed., Applied Mechanics in Earthquake Engineering, ASME, AMD, 8, New York, pp. 135-161.
24. Lai, S., Will, G. and Otani, S., 1984. "Model for Inelastic Biaxial Bending of Concrete Members." Journal of Structural Engineering, ASCE, 110(ST11), pp. 2563-2584.
25. P. K. Larsen, 1971 "Large displacement analysis of shells of revolution, including creep, plasticity and viscoelasticity", SESM Report No. 71-22, Dept. of Civ. Engng, Univ. of California, Berkeley.
26. Martinelli, L., 1998. "Modellazione di Pile da Ponte in C.A. a travata soggetti ad eccitazione sismica", Phd. thesis, Dipartimento di Ingegneria Strutturale, Politecnico di Milano, Milano, Italy
27. J. F. McNamara, 1972. "Incremental stiffness method for finite element analysis of the nonlinear dynamic problem", Ph.D. Thesis, Dept. of Civ. Engng, Brown University.

28. Mahasuverachai, M., 1982. "Inelastic Analysis of Piping and Tubular Structures." EERC Report 82-27, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.
29. Mander, J.B., Priestley, M.J.N. and Park, R., 1988. "Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete." *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 114(ST8), pp. 1804-1826.
30. Mari, A. and Scordelis, A., 1984. "Nonlinear Geometric Material and Time Dependent Analysis of Three Dimensional Reinforced and Prestressed Concrete Frames." SESM Report 82-12, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley.
31. P. V. Marcal, 1967, "The effect of initial displacements on problems of large deflection and stability", Tech. Report ARPA E54, Brown University, Division of Engineering.
32. Menegotto M., and Pinto, P.E., 1973. "Method of Analysis for Cyclically Loaded Reinforced Concrete Plane Frames Including Changes in Geometry and Non-Elastic Behavior of Elements under Combined Normal Force and Bending", *Proceedings, IABSE Symposium on Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well Defined Repeated Loads*, Lisbon, pp. 15-22.
33. Menegotto, M. and Pinto, P.E., 1977. "Slender RC Compressed Members in Biaxial Bending." *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 103(ST3), pp. 587-605.
34. Meyer, C., Roufaiel, M.S. and Arzoumanidis, S.G., 1983. "Analysis of Damaged Concrete Frames for Cyclic Loads." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, pp. 207-228.
35. Neuenhofer, A., Filippou, F.C., 1997. "Evaluation of Nonlinear Frame Finite Element Models", *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, Vol. 123, No. 7, July 1997, pp. 958-966
36. Otani, S., 1974. "Inelastic Analysis of R/C Frame Structures." *Journal of the Structural Division*, ASCE, 100(ST7).

- 37.Ozdemir, H., 1981. "Nonlinear Transient Dynamic Analysis of Yielding Structures." Ph. D. Thesis, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley.
- 38.Ranzo, G. e Petrangeli, M., 1998. "A Fiber Beam Element with Section Shear Modelling for Seismic Analysis of R/C Structures ", Journal of Earthquake Engineering 2, 443-473
- 39.Roufaiel, M.S.L. and Meyer, C., 1987. "Analytical Modeling of Hysteretic Behavior of R/C Frames." Journal of Structural Engineering, ASCE, 113 (ST3), pp. 429-444.
- 40.Soleimani, D., Popov, E.P. and Bertero, V.V. (1979). "Nonlinear Beam Model for R/C Frame Analysis." 7th ASCE Conference on Electronic Computation, St. Louis.
- 41.Spacone, E., Filippou, F.C., Taucer, F., 1996. "Fiber Beam-Column Model for Nonlinear Analysis of R/C Frames: I. Formulation", International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 25, No. 7, July 1996, pp. 711-725.
- 42.Spacone, E., Filippou, F.C., Taucer, F., 1996. "Fiber Beam-Column Model for Nonlinear Analysis of R/C Frames: II. Applications", International Journal of Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 25, No. 7, July 1996, pp. 727-742.
- 43.Spacone, E., Filippou, F.C., 1996. "Flexibility-Based Frame Models for Nonlinear Dynamic Analysis", Proceedings, 11th World Conference in Earthquake Engineering, Acapulco, Mexico, June 1996.
- 44.Spacone, E., Ciampi, V., Filippou, F.C., 1996. "Mixed Formulation of Nonlinear Beam Finite Element", Computers and Structures, Vol. 58, No. 1, Jan. 1996, pp. 71-83.
- 45.Suko, M., Adams, P. F., 1971. "Dynamic analysis of multibay multi-story frames", ASCE Journal of the Structural Division, 97(ST10), pp. 2519-2533
- 46.Takizawa, H., 1976. "Notes on Some Basic Problems in Inelastic Analysis of Planar RC Structures." , Trans. Of Arch. Inst. of Japan, 240, Part I in Feb. 1976, pp. 51-62, Part II in March 1976, pp. 65-77.

47. Takizawa, H. and Aoyama, H., 1976. "Biaxial Effects in Modeling Earthquake Response of RC Structures." *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 4, pp. 523-552.
48. Takeda, T., Sozen, M.A. and Nielsen, N., 1970. "Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes." *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 96(ST12), pp. 2557-2573.
49. Taucer, F.F., Spacone, E., Filippou, F.C., 1991. "A fiber beam-column element for seismic response analysis of reinforced concrete structures" Report No. UCB/EERC-91/17 Earthquake Engineering Research Center College of Engineering University of California, Berkeley.
50. Zeris, C.A., 1986. "Three Dimensional Nonlinear Response of Reinforced Concrete Buildings." Ph. D. Thesis, University of California, Department of Civil Engineering, Berkeley.
51. Zeris, C.A. and Mahin, S.A. 1988. "Analysis of Reinforced Concrete Beam-Columns under Uniaxial Excitation." *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 114(ST4), pp. 804-820.
52. Zeris, C.A. and Mahin, S.A., 1991. "Behavior of Reinforced Concrete Structures Subjected to Biaxial Excitation." *Journal of Structural Engineering*, ASCE, 117(ST9), pp. 2657-2673.
53. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L., 1989. *The Finite Element Method. Volume 1. Basic Formulation and Linear Problems. Fourth Edition.* McGraw Hill, London.

Capitolo 2

MODELLI DI TRAVE CON DISCONTINUITÀ MULTIPLE

2.1 Premessa

In questo capitolo vengono riportate alcune originali modellazioni della trave di Eulero-Bernoulli in presenza di discontinuità multiple, che consentono di ottenere la soluzione dell'equazione governante operando in un unico dominio di integrazione. Tali modellazioni servono ad analizzare travi con discontinuità concentrate dovute a danni, rigidezze, forze, cedimenti anelastici, attraverso l'uso di funzioni tratte dalla teoria delle distribuzioni, note in letteratura come funzioni generalizzate. Il vantaggio di tale approccio è che la risoluzione dell'equazione della trave di Eulero-Bernoulli non richiede alcuna condizione di continuità in corrispondenza di tali discontinuità. Inoltre è possibile correlare i parametri che definiscono la discontinuità con quelli relativi all'intensità del danno attraverso modelli di danno verificati su basi sperimentali. Tali soluzioni, seppur difficili da ricavare a causa delle peculiarità delle operazioni tra le funzioni adottate, gettano le basi per uno studio più vasto riguardante le analisi di travi deformabili a taglio dotate di discontinuità multiple, che verrà affrontato nel capitolo successivo.

2.2 La trave di Eulero Bernoulli con una discontinuità

Il primo studio condotto sulle travi con discontinuità è dovuto a Biondi e Caddemi (2005) i quali proposero un interessante metodo di intergrazione dell'equazione differenziale in regime statico della trave di Eulero-Bernoulli soggetta ad una arbitraria distribuzione di carico, la cui rigidezza flessionale è discontinua in corrispondenza di una sezione di ascissa x_0 . La discontinuità nella rigidezza flessionale viene introdotta attraverso l'uso di funzioni generalizzate, quali la funzione gradino di Heaviside o la funzione Delta di Dirac. L'equazione differenziale della trave di Eulero Bernoulli è esprimibile come

$$\left[E(x)I(x)u''(x) \right]' = q(x) \quad (2.1)$$

dove $E(x)$ è il modulo di Young, $I(x)$ è il momento di inerzia della sezione trasversale, $u(x)$ è lo spostamento in direzione trasversale, $q(x)$ il carico distribuito. La rigidezza flessionale della trave $E(x)I(x)$ viene definita dagli autori come somma di due termini, il primo costante E_0I_0 ed il secondo che dipende dalla funzione generalizzata considerata:

$$E(x)I(x) = E_0I_0 \left[1 - \gamma D(x - x_0) \right] \quad (2.2)$$

dove:

E_0I_0	la rigidezza flessionale costante di riferimento,
$D(x - x_0)$	la <i>funzione generalizzata</i> adottata,
x_0	la <i>posizione</i> della discontinuità,
γ	l' <i>intensità</i> della discontinuità.

I ricercatori citati hanno analizzato due tipi di funzioni generalizzate, la funzione *gradino di Heaviside* $U(x - x_0)$ e la funzione *Delta di Dirac* $\delta(x - x_0)$, ottenendo per ciascuna di esse la soluzione in forma chiusa dell'equazione differenziale (2.1). Nel caso in cui si consideri la funzione *gradino di Heaviside* l'eq. (2.2) diventa

$$E(x)I(x) = E_0I_0 \left[1 - \gamma U(x - x_0) \right] \quad (2.3)$$

L'eq. (2.3) fornisce una distribuzione della rigidezza flessionale della trave $E(x)I(x)$ costante a tratti in cui è presente una brusca variazione

della rigidezza flessionale attribuibile ad una brusca variazione della sezione trasversale o ad una brusca riduzione del modulo di Young. La discontinuità causata dalla funzione di *Heaviside* determina una variazione della rigidezza flessionale che si mantiene costante e pari a $\gamma E_0 I_0$ per $x > x_0$.

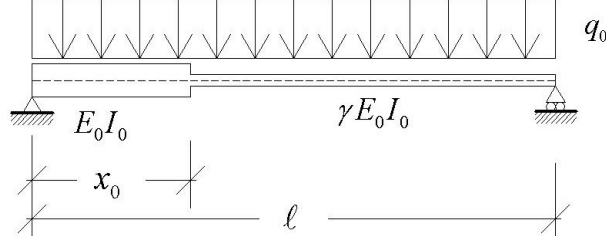


Figura 18 – Trave semplicemente appoggiata con brusca variazione della rigidezza flessionale

Il secondo tipo di funzione generalizzata che Biondi e Caddemi (2005) analizzarono, fu la funzione *Delta di Dirac*:

$$D(x - x_0) = \delta(x - x_0), \quad (2.4)$$

dove $\delta(x - x_0)$ è la distribuzione *Delta di Dirac* centrata nell'ascissa x_0 . Sostituendo l'eq. (2.4) nell'eq.(2.2), si ottiene

$$E(x)I(x) = E_0 I_0 [1 - \beta \delta(x - x_0)], \quad (2.5)$$

dove con β si è indicata il parametro di intensità della discontinuità. La (2.5) definisce un modello di trave la cui rigidezza flessionale è ovunque costante e pari ad $E_0 I_0$ ad eccezione dell'ascissa x_0 , in cui la funzione delta di Dirac determina una discontinuità. Biondi e Caddemi (2005) dimostrarono che tale discontinuità determina un salto nella risposta in termini di rotazioni come quelli causati dalla presenza di cerniere interne irrigidite da molle rotazionali di rigidezza k (Figura 19). In particola-

re gli autori hanno dimostrato che sussiste la seguente relazione tra il parametro di discontinuità β e la rigidezza della molla k

$$k_{\varphi} = \frac{1-\beta A}{\beta} E_0 I_0 \quad (2.6)$$

essendo A una costante adottata per la definizione del prodotto tra due distribuzioni Delta di Dirac.

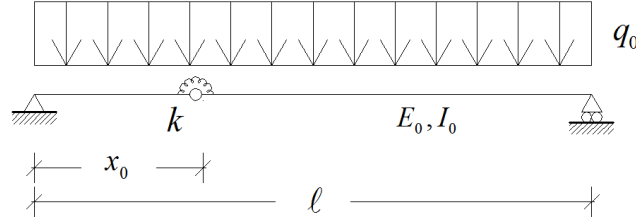


Figura 19 – Trave semplicemente appoggiata con cerniera interna in cui è presente una molla rotazionale di rigidezza k

2.2.1 La trave di Eulero Bernoulli con una discontinuità nella rigidezza flessionale di tipo *Heaviside*

La soluzione in forma chiusa dell'equazione differenziale della trave di Eulero Bernoulli (2.1) la cui rigidezza flessionale è definita dall'eq. (2.3) si esprime come

$$\begin{aligned} u(x) = & c_1 + c_2 x + c_3 \left(x^2 + \frac{\gamma}{1-\gamma} (x-x_0)^2 U(x-x_0) \right) + \\ & + c_4 \left(x^3 + \frac{\gamma}{1-\gamma} (x^3 - 3x_0^2 x + 2x_0^3) U(x-x_0) \right) + \\ & + \frac{q^{[4]}(x)}{E_0 I_0} + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{q^{[4]}(x) - q^{[4]}(x_0) - q^{[3]}(x_0)(x-x_0)}{E_0 I_0} U(x-x_0) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le rotazioni sono ottenute derivando il campo degli spostamenti

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = -u'(x) = & -c_2 - 2c_3 \left(x + \frac{\gamma}{1-\gamma} (x-x_0) U(x-x_0) \right) + \\
& -3c_4 \left(x^2 + \frac{\gamma}{1-\gamma} (x^2 - x_0^2) U(x-x_0) \right) + \\
& -\frac{q^{[3]}(x)}{E_0 I_0} - \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{q^{[3]}(x) - q^{[3]}(x_0)}{E_0 I_0} U(x-x_0).
\end{aligned} \tag{2.8}$$

Le curvature si ottengono derivando la distribuzione delle rotazioni

$$\chi(x) = -u''(x) = - \left(2c_3 + 6c_4 x + \frac{q^{[2]}(x)}{E_0 I_0} \right) \left(1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} U(x-x_0) \right) \tag{2.9}$$

La risposta in termini di momento flettente si può ottenere moltiplicando la curvatura, eq.(2.9), per la rigidezza flessionale della trave, eq.(2.3)

$$M(x) = E(x)I(x)\chi(x) = -E_0 I_0 \left(2c_3 + 6c_4 x + \frac{q^{[2]}(x)}{E_0 I_0} \right). \tag{2.10}$$

Derivando l'eq. (2.10) è possibile ottenere la risposta della trave in termini di sforzo di taglio

$$V(x) = M'(x) = E(x)I(x)\chi(x) = -E_0 I_0 \left(6c_4 + \frac{q^{[1]}(x)}{E_0 I_0} \right) \tag{2.11}$$

Nelle eq. (2.7)-(2.11) (c_1, c_2, c_3, c_4) sono le costanti di integrazione. La risposta della trave risulta continua negli spostamenti e nelle rotazioni, cfr. eq.(2.7)-(2.8), e discontinua nelle curvature eq. (2.9) come mostrato anche dal seguente esempio numerico. Per tale ragione la discontinuità nella rigidezza flessionale causata dalla funzione di *Heaviside* viene anche detta *discontinuità nelle curvature*.

2.2.1.1 Esempio numerico

Si consideri la trave in Figura 18 ($\ell = 10\text{m}$, $I_0 = 6.666\text{e}7\text{mm}^4$, $E_0 = 206000\text{MPa}$), soggetta ad un carico uniformemente distribuito $q_0 = 1\text{kNm}^{-1}$, la cui rigidezza flessionale è ridotta del 10% per $x > x_0 = 3\text{m}$. Tale variazione della rigidezza viene modellata tramite una discontinuità nella rigidezza flessionale di tipo Heaviside ($\gamma = 0.9$, $x_0 = 3\text{m}$), che

riduce la rigidezza flessionale del 10% per $x > x_0 = 3m$. L'eq.(2.7) fornisce la risposta della trave in termini di spostamenti a meno delle costanti di integrazione. Queste possono essere determinate imponendo le seguenti condizioni al contorno

$$u(0) = 0, \quad M(0) = 0, \quad u(\ell) = 0$$

e dopo semplici passaggi algebrici si ottiene

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_2 = \frac{1}{1-\gamma} \frac{q_0 \ell}{24E_0 I_0} - \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{E_0 I_0}{24\ell}, \\ c_3 = 0, \\ c_4 = -\frac{q_0 \ell}{12E_0 I_0}, \end{cases} \quad (2.12)$$

Sostituendo le costanti nelle eq.(2.7)-(2.11) si ottiene

$$\begin{aligned} u(x) = & \left(\frac{1}{1-\gamma} \frac{q_0 \ell}{24E_0 I_0} - \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{E_0 I_0}{24\ell} \right) x^2 + \\ & - \frac{q_0 \ell}{12E_0 I_0} x - \frac{\gamma}{1-\gamma} (x^3 - 3x_0^2 x + 2x_0^3) U(x - x_0) \Bigg) + \\ & + \frac{q_0 x^4}{24E_0 I_0} + \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{q_0 x^4 - q_0 x_0^4 - 4q_0 x_0^3 (x - x_0)}{24E_0 I_0} U(x - x_0) \end{aligned} \quad (2.13)$$

$0 \leq x \leq \ell$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & - \left(\frac{1}{1-\gamma} \frac{q_0 \ell}{24E_0 I_0} - \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{E_0 I_0}{24\ell} \right) x + \\ & + \frac{q_0 \ell}{4E_0 I_0} - \frac{\gamma}{1-\gamma} (x^2 - x_0^2) U(x - x_0) \Bigg) + \\ & - \frac{q_0 x^3}{6E_0 I_0} - \frac{\gamma}{1-\gamma} \frac{q_0 x^3 - q_0 x_0^3}{6E_0 I_0} U(x - x_0), \end{aligned} \quad (2.14)$$

$0 \leq x \leq \ell$

$$\chi(x) = \left(\frac{q_0 \ell}{2E_0 I_0} - \frac{\gamma}{2E_0 I_0} \right) \left(1 + \frac{\gamma}{1-\gamma} U(x - x_0) \right), \quad 0 \leq x \leq \ell \quad (2.15)$$

$$M(x) = \frac{q_0 \ell}{2} x^2, \quad 0 \leq x \leq \ell$$

$$V(x) = \frac{q_0 \ell}{2} x, \quad 0 \leq x \leq \ell$$

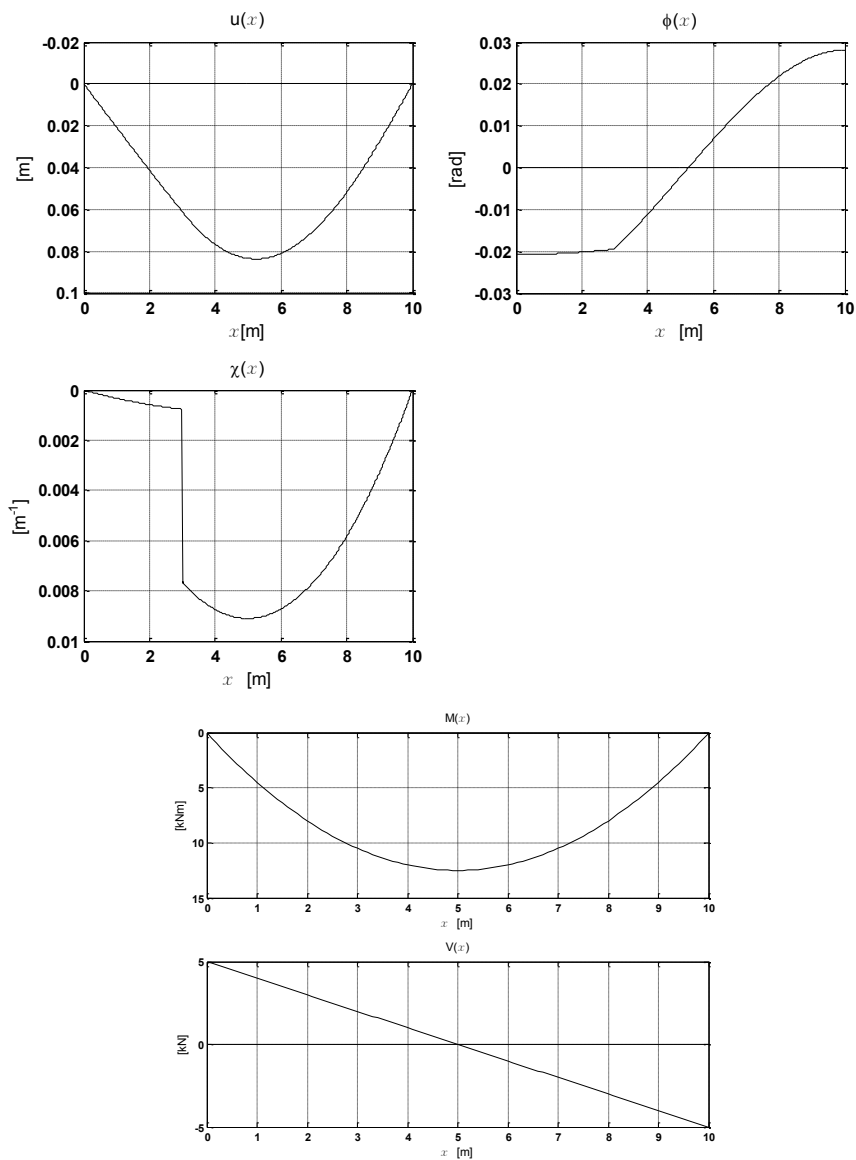


Figura 20. Risposta della trave in termini di spostamento, rotazione, curvatura, momento e taglio

Dai grafici si evince che la risposta in termini di spostamenti, rotazioni, momento e taglio risulta continua mentre la risposta in termini di curvature risulta discontinua a causa della variazione della rigidezza flessionale in $x = x_0$.

2.2.2 La trave di Eulero Bernoulli con una discontinuità nella rigidezza flessionale di tipo *Delta di Dirac*

La soluzione in forma chiusa dell'equazione differenziale della trave di Eulero Bernoulli (2.1) la cui rigidezza flessionale è definita dall'eq. (2.5) si esprime come

$$\begin{aligned} u(x) = & c_1 + c_2 x + c_3 \left[x^2 + 2 \frac{\beta}{1 - \beta A} (x - x_0) U(x - x_0) \right] \\ & + c_4 \left[x^3 + 6 \frac{\beta}{1 - \beta A} x_0 (x - x_0) U(x - x_0) \right] \\ & + \frac{q^{[4]}(x)}{E_0 I_0} + \frac{\beta}{1 - \beta A} \frac{q^{[2]}(x_0)}{E_0 I_0} (x - x_0) U(x - x_0). \end{aligned} \quad (2.16)$$

La risposta in termini di rotazioni si ottiene come derivata del campo degli spostamenti

$$\begin{aligned} \varphi(x) = -u'(x) = & -c_2 - 2c_3 \left[x + \frac{\beta}{1 - \beta A} U(x - x_0) \right] + \\ & -3c_4 \left[x^2 + 2 \frac{\beta}{1 - \beta A} x_0 U(x - x_0) \right] + \\ & - \frac{q^{[3]}(x)}{E_0 I_0} - \frac{\beta}{1 - \beta A} \frac{q^{[2]}(x_0)}{E_0 I_0} U(x - x_0), \end{aligned} \quad (2.17)$$

La curvatura si ottiene derivando il campo delle rotazioni.

$$\chi(x) = -u''(x) = - \left[2c_3 + 6c_4 x + \frac{q^{[2]}(x)}{E_0 I_0} \right] \left[1 + \frac{\beta}{1 - \beta A} \delta(x - x_0) \right] \quad (2.18)$$

L'espressione del momento flettente e del taglio formalmente coincidono con l'equazioni (2.10) e (2.11) rispettivamente. Infatti, per travi staticamente determinate, $M(x)$ e $V(x)$ non dipenderanno dalla espressione adottata della rigidezza flessionale. Viceversa, per travi statica-

mente indeterminate, la rigidezza flessionale adottata influenzerà anche le espressioni delle costanti di integrazione c_3 e c_4 .

L'eq.(2.17), che definisce il campo di rotazioni della trave, presenta un salto $\Delta\varphi(x_0)$ nell'ascissa x_0 , che può essere valutato esplicitamente come segue:

$$\Delta\varphi(x_0) = -\frac{\beta}{1-\beta A} \left(2c_3 + 6c_4x_0 + \frac{q^{[2]}(x_0)}{E_0I_0} \right), \quad (2.19)$$

Il salto nelle rotazioni $\Delta\varphi(x_0)$ è stato originato dall'aver introdotto la funzione Delta di Dirac nella definizione della rigidezza flessionale della trave, eq. (2.5). Per tale motivo la discontinuità nella rigidezza flessionale causata dalla funzione *Delta di Dirac* viene anche detta *discontinuità nelle rotazioni*. Confrontando l'eq. (2.19) con l'espressione del momento data nell'eq. (2.10), valutata sempre in x_0 , si osserva che:

$$\Delta\varphi(x_0) = \frac{\beta}{1-\beta A} \frac{M(x_0)}{E_0I_0}. \quad (2.20)$$

L'eq. (2.20) è equivalente al caso di una trave con cerniera interna posta in x_0 , dotata di una molla rotazionale di rigidezza k_φ , come mostrata in Figura 21, fornita da:

$$k_\varphi = \frac{1-\beta A}{\beta} E_0I_0. \quad (2.21)$$

Pertanto la rigidezza rotazionale k_φ può assumere valori compresi tra zero (assenza di molla rotazionale), ed infinito (ossia trave continua in x_0 , senza cerniere interne); ciò implica che β può assumere valori compresi tra zero ed $1/A$.

È facile osservare che assegnato il valore della rigidezza flessionale k_ϕ , il corrispondente valore di intensità della discontinuità β è fornito dalla seguente equazione:

$$\beta = \frac{1}{\frac{k_\phi}{E_0 I_0} + A}, \quad (2.22)$$

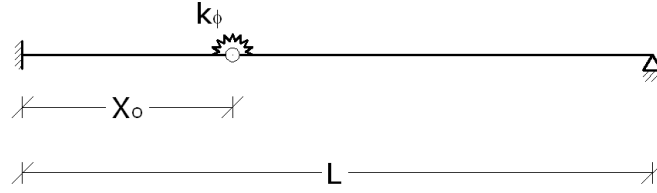


Figura 21. Uno schema di trave equivalente al modello di trave con discontinuità nelle rotazioni.

Poiché la rigidezza k_ϕ della molla flessionale si misura dimensionalmente come prodotto di una forza per una lunghezza, mentre il prodotto $E_0 I_0$ si misura dimensionalmente come prodotto di una forza per una lunghezza al quadrato, il seguente rapporto dovrà avere la dimensione dell'inverso di una lunghezza:

$$\frac{1 - \beta A}{\beta} \quad [L^{-1}]. \quad (2.23)$$

Ciò implica che β dovrà essere espresso in termini di una lunghezza, mentre il parametro A in termini dell'inverso di una lunghezza:

$$\beta \quad [L], \quad A \quad [L^{-1}], \quad (2.24)$$

in tal modo risulta verificata dimensionalmente l'equazione (2.21).

Si introduce il concetto di lunghezza caratteristica ℓ , ossia quella lunghezza il cui inverso moltiplicato per la rigidezza flessionale $E_0 I_0$, consente di ottenere la rigidezza della molla equivalente:

$$k_\varphi = \frac{E_0 I_0}{\ell} \quad (2.25)$$

ovvero:

$$\ell = \frac{E_0 I_0}{k_\varphi} \quad (2.26)$$

Confrontando le equazioni (2.21) e (2.25) si può osservare che la lunghezza caratteristica ℓ è uguale al seguente rapporto:

$$\ell = \frac{1}{\mu A} \quad (2.27)$$

Da ciò si evince che l'assenza di discontinuità ($\beta = 0$) comporta $\ell = 0$, mentre l'annullamento della rigidezza ($k_\varphi = 0$) della molla flessionale equivalente nel punto di discontinuità x_0 comporta un valore della lunghezza caratteristica tendente all'infinito, $\ell \rightarrow \infty$. In definitiva la lunghezza caratteristica ℓ può assumere valori non negativi:

$$\ell \geq 0. \quad (2.28)$$

Sostituendo l'eq.(2.27) nella risposta della trave in termini di spostamento definita dall'eq.(2.16), si ottiene:

$$\begin{aligned} u(x) = & c_1 + c_2 x + c_3 \left[x^2 + 2\ell \right] U(x - x_0) \\ & + c_4 \left[x^3 + 6\ell x \right] U(x - x_0) \\ & + \frac{q^{[4]}(x)}{E_0 I_0} + \frac{q^{[2]}(x_0)}{E_0 I_0} \ell U(x - x_0). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Sostituendo l'eq.(2.27) nella risposta della trave in termini di rotazione definita dall'eq.(2.17), si ottiene:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & -c_2 - 2c_3 \left[x + \ell \right] \\ & - 3c_4 \left[x^2 + 2\ell \right] \\ & - \frac{q^{[3]}(x)}{E_0 I_0} - \frac{q^{[2]}(x_0)}{E_0 I_0} \ell \end{aligned} \quad (2.30)$$

Sostituendo l'eq.(2.27) nella risposta della trave in termini di curvatura definita dall'eq.(2.18), si ottiene:

$$\chi(x) = -u''(x) = - \left[2c_3 + 6c_4 x + \frac{q^{[2]}(x)}{E_0 I_0} \right] \left[1 + \ell \right]. \quad (2.31)$$

In tal modo è possibile eliminare la dipendenza dal costante A di Baggello.

2.2.2.1 Trave semplicemente appoggiata con singola discontinuità nelle rotazioni

Si consideri la trave in Figura 22 ($\ell = 10\text{m}$, $I_0 = 6.666 \times 10^7 \text{mm}^4$, $E_0 = 206000 \text{MPa}$), soggetta ad un carico uniformemente distribuito $q_0 = 1 \text{kNm}^{-1}$, in cui è presente in $x_0 = 3\text{m}$ una cerniera interna con molla di rigidezza $k_\varphi = 1000 \text{kNm}$.

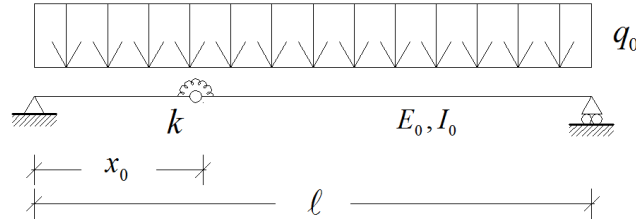


Figura 22 – Trave semplicemente appoggiata con cerniera interna in cui è presente una molla rotazionale di rigidezza k

Tale vincolo interno viene modellato tramite una discontinuità nelle rotazioni. la lunghezza caratteristica ℓ della discontinuità, per l'eq.(2.25) risulta:

$$\ell = \frac{2.06 \cdot 10^8 \text{ kNm}^{-2} \frac{0.10 \cdot 0.20^3}{12} \text{ m}^4}{1000 \text{ kNm}^{-1}} = 13.73 \text{ m}. \quad (2.32)$$

L'eq.(2.7) fornisce la risposta della trave in termini di spostamenti a meno delle costanti di integrazione. Queste possono essere determinate introducendo le seguenti condizioni al contorno

$$u(0) = 0, \quad M(0) = 0, \quad u(\ell) = 0, \quad M(\ell) = 0$$

e dopo semplici passaggi algebrici si ottiene

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ c_2 = \frac{q_0 \ell}{24 E_0 I_0} - \frac{x_0}{2 E_0 I_0} \frac{x_0}{\ell}, \\ c_3 = 0, \\ c_4 = -\frac{q_0 \ell}{12 E_0 I_0}, \end{cases} \quad (2.33)$$

Sostituendo le eq. (2.33) nell'eq.(2.29), si ottiene la risposta in termini di spostamento

$$\begin{aligned} u(x) = & \left[\frac{q_0 \ell}{24 E_0 I_0} - \frac{x_0}{2 E_0 I_0} \frac{x_0}{\ell} \right] x + \\ & - \frac{q_0 \ell}{12 E_0 I_0} \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x_0^2}{2} U(x - x_0) \right] \\ & + \frac{q_0}{24 E_0 I_0} x^4 + \frac{q_0 x_0^2}{2 E_0 I_0} U(x - x_0). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Analogamente sostituendo le eq. (2.33) nell'eq.(2.30), si ottiene la risposta in termini di rotazione:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & -\frac{q_0 \ell}{24E_0 I_0} \left[\frac{x_0^3}{\ell} - \frac{x_0^2}{2\ell} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x_0}{\ell} \right) \right] \\ & + \frac{q_0 \ell}{4E_0 I_0} \left[\frac{x_0^3}{\ell} - \frac{x_0^2}{2\ell} \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x_0}{\ell} \right) \right] \\ & - \frac{q_0}{6E_0 I_0} x^3 - \frac{q_0 x_0^2}{2E_0 I_0} \ell \left(\frac{x}{\ell} - \frac{x_0}{\ell} \right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Infine sostituendo le eq. (2.33) nell'eq. (2.31) si ottiene la risposta in termini di curvatura:

$$\chi(x) = \frac{q_0}{2E_0 I_0} x \left(\ell - x \right) \quad (2.36)$$

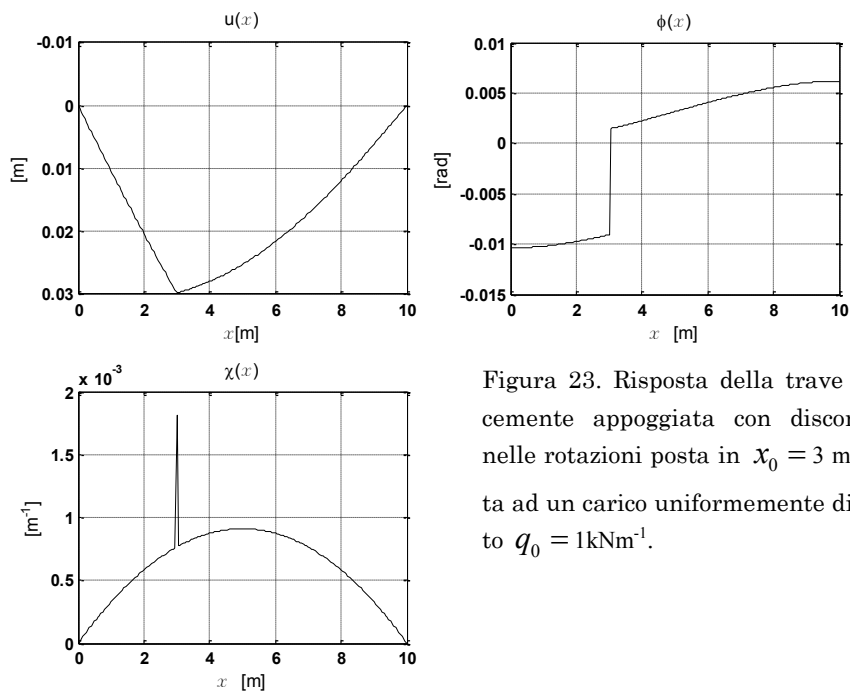


Figura 23. Risposta della trave semplicemente appoggiata con discontinuità nelle rotazioni posta in $x_0 = 3$ m soggetta ad un carico uniformemente distribuito $q_0 = 1 \text{ kNm}^{-1}$.

2.3 La trave di Eulero Bernoulli con discontinuità multiple

Il modello di trave di Eulero Bernoulli con discontinuità multiple è stato proposto da Biondi e Caddemi (2007). Questo modello consente la trattazione di travi reali, realizzate con materiali aventi differenti moduli di Young, con sezioni trasversali distinte e dotate di cerniere interne lungo il loro sviluppo. In questo modello la rigidezza flessionale è definita come:

$$E(x)I(x) = E_0 I_0 \left[1 - \sum_{i=1}^n \gamma_i U(x - x_{\gamma,i}) - \sum_{j=1}^m \beta_j \delta(x - x_{\beta,j}) \right], \quad (2.37)$$

dove i parametri γ_i , $i=1,2,\dots,n$, e β_j , $j=1,2,\dots,m$, rappresentano le intensità delle discontinuità di tipo Heaviside e di tipo Delta di Dirac e $x_{\gamma,i}$, $x_{\beta,j}$ le relative posizioni. Nel lavoro di Biondi e Caddemi (2007) si dimostra che le discontinuità di tipo Heaviside determinano variazioni nella rigidezza flessionale che causano discontinuità nella risposta in termini di curvature, mentre le discontinuità di tipo Delta di Dirac determinano brusche variazioni della rigidezza flessionale equivalenti a cerniere interne dotate di molle rotazionali

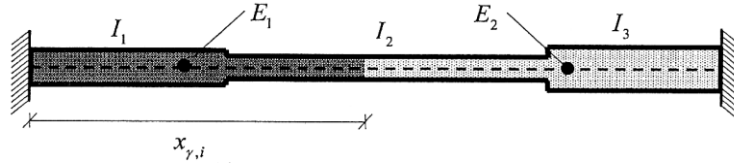


Figura 24. Trave con discontinuità nelle curvature, ovvero con discontinuità nella definizione del momento di inerzia $I(x)$ e del modulo di Young $E(x)$.

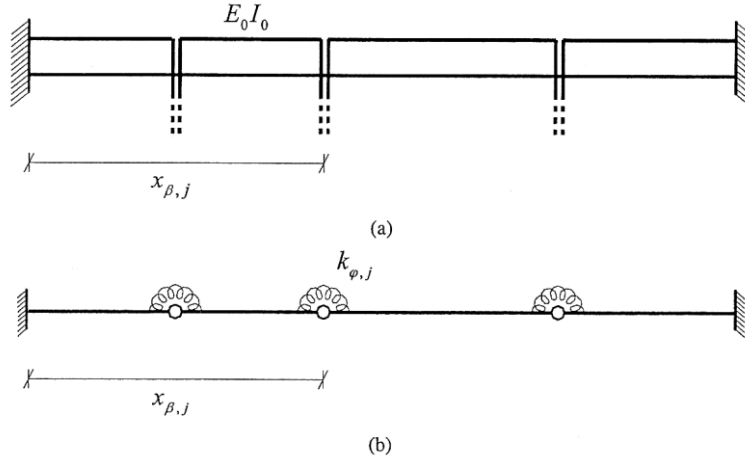


Figura 25. Trave con discontinuità nelle rotazioni (a), corrispondente ad una trave con cerniere intere e molle rotazionali di rigidezza $k_{\varphi,j}$ poste nei punti di discontinuità

$x_{\beta,j}$ (b).

Sostituendo l'eq. (2.37) nell'eq. differenziale (2.1) che governa il problema statico della trave di Eulero-Bernoulli, si ottiene:

$$\left[E_0 I_0 \left(1 - \sum_{i=1}^n \gamma_i U(x - x_{\gamma,i}) - \sum_{j=1}^m \beta_j \delta(x - x_{\beta,j}) \right) u''(x) \right]' = q(x). \quad (2.38)$$

L'eq. differenziale (2.38) integrata due volte fornisce:

$$\left(1 - \sum_{i=1}^n \gamma_i U(x - x_{\gamma,i}) \right) u''(x) = \frac{b_1 + b_2 x + q^{[2]}(x)}{E_0 I_0} + \sum_{j=1}^m \beta_j u''(x) \delta(x - x_{\beta,j}). \quad (2.39)$$

Per risolvere l'eq. (2.39) rispetto ad $u''(x)$, si moltiplicano entrambi i membri dell'eq. (2.39) per $\delta(x - x_{\beta,k})$ e poiché il prodotto di due distribuzioni Delta di Dirac secondo Bagarello (1995, 2002) è esprimibile come:

$$\delta(x-x_j)\delta(x-x_k) = \begin{cases} A\delta(x-x_j), & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases} \quad (2.40)$$

si ottiene:

$$\left(1 - \sum_{i=1}^n \gamma_i U(x-x_{\gamma,i})\right) u''(x) \delta(x-x_{\beta,k}) = \frac{b_1 + b_2 x + q^{[2]}(x)}{E_0 I_0} \delta(x-x_{\beta,k}) + \beta_k u''(x) A \delta(x-x_{\beta,k}). \quad (2.41)$$

Portando $\beta_k u''(x) A \delta(x-x_{\beta,k})$ al primo membro è possibile esplicitare il seguente prodotto:

$$u''(x) \delta(x-x_{\beta,k}) = \frac{1}{\left(1 - \beta_k - \sum_{i=1}^n \gamma_i U(x-x_{\gamma,i})\right)} \frac{b_1 + b_2 x + q^{[2]}(x)}{E_0 I_0} \delta(x-x_{\beta,k}). \quad (2.42)$$

L'eq. (2.42) può essere scritta nella seguente forma:

$$u''(x) \delta(x-x_{\beta,j}) = \left(2c_3 + 6c_4 x + \frac{q^{[2]}(x)}{E_0 I_0}\right) \times \left[\frac{1}{1 - \beta_j A} + \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i \mu_i \mu_{i+1}}{(1 - \mu_i \beta_j A)(1 - \mu_{i+1} \beta_j A)} U(x_{\beta,j} - x_{\gamma,i}) \right] \delta(x-x_{\beta,j}), \quad (2.43)$$

dove

$$c_3 = \frac{b_1}{2E_0 I_0}, \quad c_4 = \frac{b_2}{6E_0 I_0}, \quad \mu_i = \frac{1}{1 - \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k} \quad (2.44)$$

La seguente espressione esplicita della curvatura per il modello di trave considerato è ottenuta sostituendo l'eq. (2.43) nell'eq. (2.39):

$$\chi(x) = -u''(x) = -\left(2c_3 + 6c_4 x + \frac{q^{[2]}(x)}{E_0 I_0}\right) \times \left(1 + \sum_{i=1}^n \gamma_i \mu_i \mu_{i+1} U(x-x_{\gamma,i})\right) \left(1 + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\beta_j}{1 - \beta_j A} + \eta_j\right) \delta(x-x_{\beta,j})\right), \quad (2.45)$$

dove η_j sono definiti come segue

$$\eta_j = \beta_j \sum_{i=1}^n \frac{\gamma_i \mu_i \mu_{i+1}}{(1 - \mu_i \beta_j A)(1 - \mu_{i+1} \beta_j A)} U(x_{\beta,j} - x_{\gamma,i}), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.46)$$

Un'integrazione dell'eq. (2.45) fornisce l'espressione della risposta in termini di rotazione per il modello di trave analizzato:

$$\begin{aligned}
 \varphi(x) = & -u'(x) = -c_2 + \\
 & -2c_3 \left[x + \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i (x - x_{\gamma,i}) U(x - x_{\gamma,i}) + \ell \sum_{j=1}^m (x - x_{\beta,j}) \right] + \\
 & -3c_4 \left[x^2 + \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i (x^2 - x_{\gamma,i}^2) U(x - x_{\gamma,i}) + 2\ell \sum_{j=1}^m U(x - x_{\beta,j}) \right] + \quad (2.47) \\
 & - \frac{q^{[3]}(x)}{E_0 I_0} - \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i \frac{q^{[3]}(x) - q^{[3]}(x_{\gamma,i})}{E_0 I_0} U(x - x_{\gamma,i}) + \\
 & - \ell \sum_{j=1}^m \frac{\kappa^{[2]}(x_{\beta,j})}{E_0 I_0} U(x - x_{\beta,j})
 \end{aligned}$$

dove sono state fatte le seguenti posizioni:

$$\bar{\gamma}_i = \gamma_i \mu_i \mu_{i+1}. \quad (2.48)$$

$$\bar{\beta}_j = \frac{1}{\ell} \left(\beta_j + \eta_j \right) \left(1 + \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i U(x_{\beta,j} - x_{\gamma,i}) \right) \quad (2.49)$$

Un'ulteriore integrazione dell'eq. (2.47) fornisce l'espressione della risposta in termini di spostamento per il modello di trave analizzato:

$$\begin{aligned}
 u(x) = & c_1 + c_2 x + \\
 & + c_3 \left[x^2 + \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i (x - x_{\gamma,i})^2 U(x - x_{\gamma,i}) + 2\ell \sum_{j=1}^m (x - x_{\beta,j}) U(x - x_{\beta,j}) \right] + \\
 & + c_4 \left[x^3 + \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i (x^3 - 3x_{\gamma,i}^2 x + 2x_{\gamma,i}^3) U(x - x_{\gamma,i}) + \right. \\
 & \quad \left. + 6\ell \sum_{j=1}^m (x - x_{\beta,j}) U(x - x_{\beta,j}) \right] + \quad (2.50) \\
 & + \frac{q^{[4]}(x)}{E_0 I_0} + \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}_i \frac{q^{[4]}(x) - q^{[4]}(x_{\gamma,i}) - q^{[3]}(x_{\gamma,i})(x - x_{\gamma,i})}{E_0 I_0} U(x - x_{\gamma,i}) + \\
 & + \ell \sum_{j=1}^m \frac{\kappa^{[2]}(x_{\beta,j})(x - x_{\beta,j})}{E_0 I_0} U(x - x_{\beta,j}).
 \end{aligned}$$

Nell'eq. (2.50) compaiono le quattro costanti di integrazione c_1, c_2, c_3 e c_4 che possono essere determinate fissando opportune condizioni al contorno. Si può osservare inoltre che le soluzioni finora trovate, mostrano delle funzioni di risposta continue in termini di spostamento e rotazione, mentre risulta discontinua in x_0 solo la legge di variazione della curvatura. Infine è possibile ottenere l'espressione del momento flettente moltiplicando la curvatura [eq.] per la rigidezza flessionale [eq. (2.3)]:

$$M(x) = E(x)I(x)\chi(x) = -E_0I_0 \left(2c_3 + 6c_4x + \frac{q^{[2]}(x)}{E_0I_0} \right). \quad (2.51)$$

La legge di variazione dello sforzo di taglio si può determinare come:

$$V(x) = M'(x) = E(x)I(x)\chi(x) = -E_0I_0 \left(6c_4 + \frac{q^{[1]}(x)}{E_0I_0} \right). \quad (2.52)$$

Le equazioni (2.51) e (2.52) forniscono le leggi di variazione del momento flettente e dello sforzo di taglio come funzioni continue, a meno di discontinuità presenti nelle funzioni $q^{[1]}(x)$ e $q^{[2]}(x)$, dovute ad eventuali carichi esternamente applicati. Inoltre si può osservare che l'intensità della discontinuità nelle curvature γ non appare esplicitamente nelle equazioni (2.51) e (2.52), ma la sua influenza è contenuta nelle costanti c_3 e c_4 , ovvero nelle condizioni al contorno. Pertanto, sulla base della procedura di integrazione che Biondi e Caddemi (2005) proposero, è stato possibile trasferire l'influenza delle discontinuità dalla rigidezza flessionale della trave alle condizioni al contorno. Per travi staticamente determinate, $M(x)$ e $V(x)$ non dipenderanno dalla espressione della rigidezza flessionale adottata, di conseguenza le costanti c_3 e c_4 risulteranno indipendenti dalle discontinuità presenti. Viceversa, per travi staticamente indeterminate, la rigidezza flessionale adottata influenzerà anche le espressioni delle costanti di integrazione c_3 e c_4 .

L'eq.(2.47), che definisce il campo di rotazioni della trave, presenta m discontinuità $\Delta\varphi(x_{\beta,j})$ nell'ascisse $x_{\beta,j}$, che possono essere valutate esplicitamente come segue:

$$\Delta\varphi(x_{\beta,j}) = -\ell \left(6c_4 x_{\beta,j} + \frac{q^{[2]}(x_{\beta,j})}{E_0 I_0} \right), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.53)$$

Le discontinuità nelle rotazioni fornite dall'eq.(2.53) possono essere messe in relazione all'espressione del momento flettente, fornita nell'eq. (2.51), valutata nei punti $x_{\beta,j}$ mediante la seguente relazione:

$$\Delta\varphi(x_{\beta,j}) = \ell \frac{M_{\beta,j}}{E_0 I_0}, \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.54)$$

L'eq. (2.54) è equivalente al caso di una trave con salti nella rigidezza flessionale $E(x)I(x)$ posti in $x_{\gamma,i}$, $i = 1, 2, \dots, n$, e con cerniere interne poste in $x_{\beta,j}$, $j = 1, 2, \dots, m$, ciascuna dotata di una molla rotazionale di rigidezza $k_{\varphi,j}$, come mostrata in Figura 26, esprimibile come segue:

$$k_{\varphi,j} = \frac{E_0 I_0}{\ell} \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.55)$$

Analogamente al caso della trave con singola discontinuità nelle rotazioni è possibile definire anche per questo modello una lunghezza caratteristica relativa alla j -esima discontinuità nelle rotazioni, come:

$$\ell_j = \ell \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (2.56)$$

Le equazioni (2.47) e (2.50) forniscono le espressioni in forma chiusa della risposta in termini di rotazione e spostamento, per i due tipi di discontinuità considerata, in cui le quattro costanti di integrazione c_1, c_2, c_3, c_4 devono essere comunque valutate in base a determinate condizioni al contorno.

Nel successivo capitolo si analizzerà una soluzione esplicita più generale, indipendente da particolari condizioni al contorno, per lo studio di travi deformabili flessionalmente alla Eulero-Bernoulli.

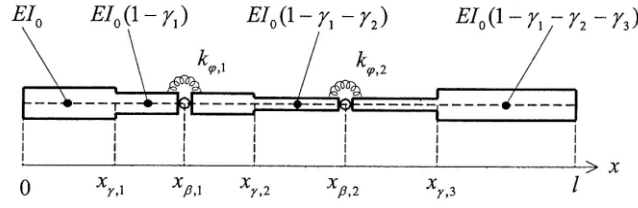


Figura 26. Schema di trave equivalente al modello proposto con discontinuità flessionali multiple.

2.5 Soluzione della trave di Eulero-Bernoulli con discontinuità multiple negli spostamenti assiali

Gli spostamenti assiali della trave di Eulero-Bernoulli dotata di rigidità assiale $E(x)A(x)$ variabile rispetto all'ascissa x , sono individuati dalla risoluzione della seguente equazione differenziale del secondo ordine, secondo il modello rappresentato in Figura 27:

$$[E(x)A(x)u'_x(x)]' = -q_x(x), \quad (2.57)$$

dove $u_x(x), q_x(x)$ sono rispettivamente lo spostamento assiale e il carico assiale.

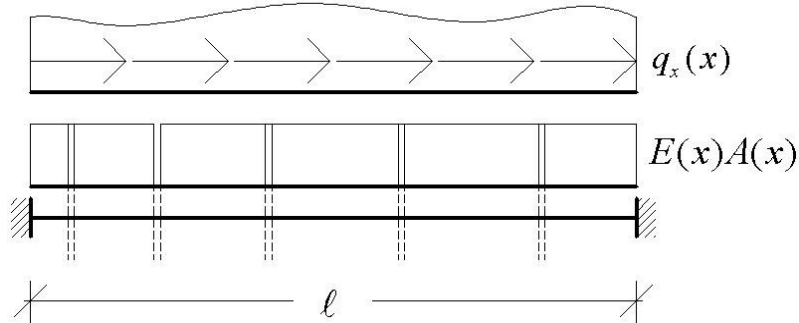


Figura 27. Modello per lo studio della trave con multiple discontinuità negli spostamenti assiali

La rigidezza assiale della trave è definita come segue:

$$E(x)A(x) = E_0A_0 \left[1 - \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta(x - x_{\alpha,i}) \right]. \quad (2.58)$$

Nell'eq.(2.58) sono stati introdotte n funzioni generalizzate Delta di Dirac ciascuna moltiplicata per la corrispondente intensità α_i . Sostituendo l'eq. (2.58) nell'eq.(2.57) ed integrando si ottiene:

$$u'_x(x) = \frac{a_1 - q_x^{[1]}(x)}{E_0A_0} + \sum_{i=1}^n \alpha_i u'_x(x) \delta(x - x_{\alpha,i}), \quad (2.59)$$

dove a_1 è una costante di integrazione. Poiché l'eq. (2.59) scritta in questa forma non può essere risolta esplicitamente rispetto ad $u'_x(x)$, si moltiplicano ambo i membri per $\delta(x - x_{\alpha,k})$:

$$\begin{aligned} u'_x(x) \delta(x - x_{\alpha,k}) &= \frac{a_1 - q_x^{[1]}(x)}{E_0A_0} \delta(x - x_0) + \\ &+ \sum_{i=1}^n \alpha_i u'_x(x) \delta(x - x_{\alpha,i}) \delta(x - x_{\alpha,k}). \end{aligned} \quad (2.60)$$

Ricordando le regole che definisce il prodotto di due distribuzioni delta di Dirac (cfr. Biondi e Caddemi, 2005) si può ancora scrivere:

$$u'_x(x) \delta(x - x_{\alpha,i}) = \frac{a_1 - q_x^{[1]}(x)}{E_0A_0} \delta(x - x_0) + \alpha_i A u'_x(x) \delta(x - x_{\alpha,i}). \quad (2.61)$$

Dopo semplici passaggi si ottiene la seguente equazione:

$$u'_x(x) \delta(x - x_{\alpha,i}) = \frac{1}{1 - \alpha_i A} \frac{a_1 - q_x^{[1]}(x)}{E_0A_0} \delta(x - x_{\alpha,i}). \quad (2.62)$$

Sostituendo l'eq. (2.62) nell'eq. (2.59), dopo semplici passaggi, si ottiene la risposta in termini di deformazione assiale:

$$\varepsilon(x) = u'_x(x) = \frac{a_1 - q_x^{[1]}(x)}{E_0 A_0} \left[1 + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i A} \delta(x - x_{\alpha,i}) \right]. \quad (2.63)$$

Un ulteriore integrazione fornisce l'espressione dello spostamento assiale:

$$u_x(x) = a_2 + \frac{a_1}{E_0 A_0} \left[x + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i A} U(x - x_{\alpha,i}) \right] + \frac{q_x^{[2]}(x)}{E_0 A_0} - \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i A} \frac{q_x^{[1]}(x_{\alpha,i})}{E_0 A_0} U(x - x_{\alpha,i}), \quad (2.64)$$

dove a_1, a_2 sono le costanti di integrazione da individuare in base alle condizioni al contorno. Nell'espressione (2.64) è possibile notare la discontinuità della risposta $u_x(x)$ in corrispondenza dell'ascissa $x_{\alpha,i}$.

Lo sforzo normale $T(x)$, è esprimibile come:

$$T(x) = E(x)A(x)\varepsilon(x) = a_1 - q_x^{[1]}(x). \quad (2.65)$$

Lo spostamento assiale previsto dall'eq.(2.64), presenta dei salti $\Delta u_x(x_{\alpha,i})$ in corrispondenza delle ascisse $x_{\alpha,i}$, esprimibili come:

$$\Delta u_x(x_{\alpha,i}) = \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i A} \frac{a_1 - q_x^{[1]}(x_{\alpha,i})}{E_0 A_0}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.66)$$

e confrontando l'eq. (2.66) con l'espressione (2.65) dello sforzo normale, si deduce che:

$$\Delta u_x(x_{\alpha,i}) = \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_i A} \frac{T(x_{\alpha,i})}{E_0 A_0}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.67)$$

L'eq. (2.67) è equivalente al caso di una trave con un vincolo assiale cedevole interno posto in $x_{\alpha,i}$, dotato di una molla traslazionale che lavora

nella direzione assiale della trave, avente rigidezza $k_{x,i}$ come mostrato in Figura 28. Tale rigidezza $k_{x,i}$ è esprimibile come:

$$k_{x,i} = \frac{1 - \alpha_i A}{\alpha_i} E_0 A_0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.68)$$

Pertanto la rigidezza traslazionale k può assumere valori compresi tra zero (assenza di molla traslazionale), ed infinito (ossia trave senza discontinuità in x_0); ciò implica che α può assumere valori compresi tra zero ed $1/A$.

È facile osservare che assegnato il valore della rigidezza traslazionale $k_{x,i}$, il corrispondente valore di intensità della discontinuità α_i è fornito dalla seguente equazione:

$$\alpha_i = \frac{1}{\frac{k_{x,i}}{E_0 A_0} + A}, \quad (2.69)$$

per un valore del parametro A scelto tra quelli proposti da Bagarello (1995).

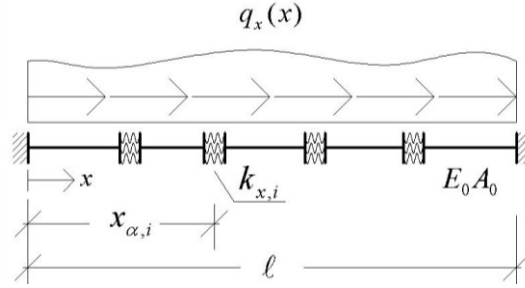


Figura 28. Una trave equivalente al modello con discontinuità assiali

Esaminando l'eq. (2.68) si osserva che dimensionalmente la rigidezza k_x della molla traslazionale si misura come prodotto di una forza per l'inverso di una lunghezza, mentre il prodotto $E_0 A_0$ si misura dimensionalmente come una forza. Si deduce quindi che il seguente rapporto dovrà avere la dimensione dell'inverso di una lunghezza:

$$\frac{1 - \alpha_i A}{\alpha_i} \quad [L^{-1}], \quad (2.70)$$

Ciò implica che α_i dovrà essere espresso in termini di una lunghezza, mentre il parametro A in termini dell'inverso di una lunghezza, analogamente al caso flessionale di discontinuità nelle rotazioni:

$$\alpha_i [L], \quad A [L^{-1}], \quad (2.71)$$

in tal modo risulta verificata dimensionalmente l'equazione (2.70).

Si introduce il concetto di lunghezza caratteristica ℓ , ossia quella lunghezza il cui inverso moltiplicato per la rigidezza assiale $E_0 A_0$, consente di ottenere la rigidezza della molla equivalente:

$$k_{x,i} = \frac{E_0 A_0}{\ell} \quad (2.72)$$

ovvero:

$$\ell = \frac{E_0 A_0}{k_{x,i}} [L] \quad (2.73)$$

Ricordando l'eq.(2.68) si può osservare che la lunghezza caratteristica ℓ è uguale al seguente rapporto:

$$\ell = \frac{1}{\alpha_i A} \quad (2.74)$$

Da ciò si evince che l'assenza di discontinuità ($\alpha_i = 0$) comporta $\ell = 0$, mentre l'annullamento della rigidezza ($k_{x,i} = 0$) della molla assiale equivalente nei punti di discontinuità $x_{\alpha,i}$ comporta un valore della lunghezza caratteristica tendente all'infinito, $\ell \rightarrow \infty$. In definitiva la lunghezza caratteristica ℓ può assumere valori non negativi:

$$\ell \geq 0. \quad (2.75)$$

Sostituendo l'eq. (2.74) nell'eq. (2.64), si ottiene la risposta della trave in termini di spostamento:

$$u_x(x) = a_2 + \frac{a_1}{E_0 A_0} \left[x + \sum_{i=1}^n \ell \alpha_i x_{\alpha,i} \right] + \frac{q_x^{[2]}(x)}{E_0 A_0} - \sum_{i=1}^n \frac{\ell}{E_0 A_0} \alpha_i (x - x_{\alpha,i}) U(x - x_{\alpha,i}). \quad (2.76)$$

La risposta in termini di deformazione assiale si ottiene calcolando la derivata prima dell'eq. (2.76):

$$\varepsilon(x) = u'_x(x) = \frac{a_1 - q_x^{[1]}(x)}{E_0 A_0} \left[1 + \sum_{i=1}^n \ell \quad \varsigma_{\alpha,i} \right]. \quad (2.77)$$

2.6 Bibliografia

1. Bagarello, F., 1995. "Multiplication of distribution in one dimension: possible approaches and applications to d-function and its derivatives". *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 196, 885–901.
2. Bagarello, F., 2002. "Multiplication of distribution in one dimension and a first application to quantum field theory". *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 266, 298–320.
3. Bilello, C., 2001. "Theoretical and experimental investigation on damaged traves under moving systems. PhD. Thesis, Università degli Studi di Palermo, Palermo, Italy.
4. Biondi B., Caddemi S., 2005. "Closed form solutions of Euler-Bernoulli traves with singularities". *International Journal of Solids and Structures* 42, 3027–3044.
5. Biondi B., Caddemi S., 2007. "Euler–Bernoulli beams with multiple singularities in the flexural stiffness", *European Journal of Mechanics A/Solids* 26 (2007) 789–809.
6. Bremermann, H.J., Durand III, L.J., 1961. "On analytic continuation, multiplication, and Fourier transformations of Schwartz distributions". *Journal of Mathematical Physics* 2, 240–257.
7. Christides, S., Barr, A.D.S., 1984. "One-dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler traves". *Int. J. Mech. Sciences*, 26(11/12), 639-648.
8. Colombeau, J.F., 1984. "New Generalized Functions and Multiplication of Distribution". North-Holland, Amsterdam.
9. Falsone, G., 2002. "The use of generalised functions in the discontinuous trave bending differential equations". *International Journal of Engineering Education* 18 (3), 337–343.

10. Freund, L.B., Hermann, G., 1976. "Dynamic fracture of a beam or plate in plane bending". *Journal of Applied Mechanics* 76, 112-116.
11. Gounaris, G., Dimarogonas, A.D., 1988. "A finite element of a cracked prismatic beam for structural analysis". *Computers and Structures* 28, 309-313.
12. Guelfand, I.M., Chilov, G.E., 1972. "Les Distributions". Dunod, Paris.
13. Hoskins, R.F., 1979. "Generalised Functions". Ellis Horwood Limited, Chichester, England.
14. Kanwal, R.P., 1983. "Generalised Functions Theory and Applications". Academic Press, New York.
15. Lighthill, M.J., 1958. "An Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions". Cambridge University Press, London.
16. Ostachowicz, W.M., Krawczuk, C., 1991. "Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam". *J. Sound Vibr.*, 150(2), 191-201.
17. Paipetis, S.A., Dimarogonas, A.D., 1986. "Analytical Methods in Rotor Dynamics". Elsevier Applied Science, London.
18. Rizos, P.F., Aspragathos, N., Dimarogonas, A.D., 1990. "Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. *Journal of Sound and Vibration* 138(3), 381-388.
19. Sinha, J.K., Friswell, M.I., Edwards, S., 2002. "Simplified models for the location of cracks in beam structures using measured vibration data". *J. Sound Vibr.*, 251(1), 13-38.
20. The MathWorks, Inc., 1984–2007. "Matlab user manual".
21. Timoshenko, S.P., 1934. "Theory of elasticity". McGraw-Hill, New York.
22. Yavari, A., Sarkani, S., 2001. "On applications of generalised functions to the analysis of Euler–Bernoulli beam-columns with jump discontinuities". *International Journal of Mechanical Sciences* 43, 1543–1562.

23. Yavari, A., Sarkani, S., Moyer, E.T., 2000. "On applications of generalised functions to beam bending problems". *International Journal of Solids and Structures* 37, 5675–5705.
24. Yavari, A., Sarkani, S., Reddy, J.N., 2001a. "On nonuniform Euler–Bernoulli and Timoshenko traves with jump discontinuities: application of distribution theory". *International Journal of Solids and Structures* 38, 8389–8406.
25. Yavari, A., Sarkani, S., Reddy, J.N., 2001b. "Generalized solutions of beam with jump discontinuities on elastic foundations". *Archive of Applied Mechanics* 71 (9), 625–639.
26. Zemanian, A.H., 1965. "Distribution Theory and Transform Analysis". McGraw-Hill, New York.

Capitolo 3

LA TRAVE DI TIMOSHENKO CON DISCONTINUITÀ MULTIPLE

3.1 Introduzione

Le analisi di travi in presenza di discontinuità lungo la campata sono ampiamente studiate in letteratura in quanto è un problema di interesse comune in differenti settori dell'ingegneria. I tipi di discontinuità che sono stati studiati riguardano, per esempio, variazioni brusche della sezione o del modulo di Young, presenza di vincoli interni e presenza di cracks. Nel caso di strutture intelaiate composte da vari elementi trave e con un gran numero di discontinuità per risolvere sia problemi diretti di analisi che problemi inversi di identificazione sono richieste procedure competitive.

L'analisi di travi in presenza di diversi tipi di discontinuità solitamente è condotta, sia in statica che in contesti dinamici, mediante classiche procedure basate sull'integrazione delle equazioni differenziali che governano il problema tra discontinuità. In letteratura sono state proposte procedure alternative basate sul metodo della trave ausiliaria per la formulazione delle equazioni governanti per un dominio di integrazione unico lungo l'intera campata della trave (Yavari et al. 2000, 2001).

Altri approcci, basati sul metodo della cosiddetta matrice di trasferimento, permettono di trattare diversi tipi di discontinuità fornendo una soluzione ricorsiva conveniente nel senso che la soluzione ad una generica sezione trasversale dipende dalla risposta alla discontinuità immedia-

tamente precedente la sezione corrente. Questi ultimi approcci comportano una valutazione sequenziale della soluzione (Khiem & Lien 2001, Li 2002; Ruotolo & Surace 2004; Binici 2005; Wang Qiao e 2007).

A conoscenza dell'autore in letteratura non è stato dedicato molto sforzo al caso di strutture intelaiate in presenza di più discontinuità. In particolare, è auspicabile una formulazione per l'elemento trave in grado di incorporare, mediante espressioni esplicite in forma chiusa, un numero arbitrario di discontinuità differenti.

Recentemente, facendo uso di funzioni generalizzate (distribuzioni) è stato trattato mediante la matrice di rigidezza dinamica il caso di strutture intelaiate in presenza di cracks (Caddemi & Calì 2010).

Nell'ambito della teoria delle distribuzioni, è stata formulata una procedura d'integrazione per la trave di Eulero-Bernoulli e le trave di Timoshenko con discontinuità di tipo diverso (Biondi & Caddemi 2007). Soluzioni esplicite in forma chiusa, dipendenti da sole quattro costanti d'integrazione, sono state fornite solo per il campo statico, e le discontinuità richiedevano il soddisfacimento di tutte le condizioni di continuità. In questo lavoro, sono sfruttate le suddette soluzioni in forma chiusa per formulare un elemento trave da adottare per la discretizzazione agli elementi finiti di strutture intelaiate con discontinuità multiple.

Nell'elemento trave proposto possono essere inclusi diversi tipi di discontinuità e in numero arbitrario senza aumentare lo sforzo computazionale. Tuttavia, in questo lavoro particolare attenzione è dedicata al caso di elemento trave con un numero arbitrario di cracks; quest'ultimo viene opportunamente modellato mediante distribuzioni delta di Dirac. In accordo al modello presentato, sono formulate le funzioni di forma per il caso statico e l'espressione esplicita della matrice di rigidezza dell'elemento spaziale della trave danneggiata. Assemblando, con procedure classiche, le matrici di rigidezza degli elementi, la matrice di rigidezza globale della struttura è ottenuta senza alcun incremento di gradi di libertà dovuti alla presenza delle discontinuità.

Considerando le funzioni di forma proposte, viene valutata la matrice di massa coerente dell'elemento trave e viene svolta l'analisi dinamica del-

le strutture intelaiate in presenza di cracks in numero e posizioni arbitrarie.

Vengono presentati e discussi analisi di strutture intelaiate in presenza di danni concentrati. Particolare attenzione è stata dedicata alla valutazione dell'influenza dei cracks sui parametri della risposta dinamica. La caratterizzazione della risposta dinamica dell'elemento danneggiato mediante il modello di elemento finito proposto porta ad una maggiore consapevolezza verso la soluzione dei problemi inversi di identificazione dei danni.

3.2 Il modello trave in presenza di discontinuità

In questa sezione viene presentato un modello di trave di Timoshenko con singolarità multiple e viene mostrata la capacità del modello nel descrivere le discontinuità nelle funzioni di risposta. Il modello considerato è una generalizzazione al contesto dinamico e alla trave di Timoshenko di quanto recentemente proposto in (Biondi & Caddemi 2007).

Le equazioni che governano il problema statico della trave di Timoshenko soggetta a carichi trasversali $\bar{q}(x)$ e momenti distribuiti $\bar{m}(x)$, tenendo conto della variabilità spaziale della rigidezza flessionale $E(x)I(x)$ e di quella a taglio $G(x)A(x)$, possono essere scritte come segue:

$$\left[E(x)I(x)\varphi'(x) \right]' = G(x)A(x) \left[v'(x) + \varphi(x) \right] - \bar{m}(x) \quad (3.1)$$

$$\left[G(x)A(x) \left[v'(x) + \varphi(x) \right] \right]' = -\bar{q}(x) \quad (3.2)$$

dove $v(x)$, $\varphi(x)$ sono le funzioni di spostamento e rotazione, rispettivamente. Le equazioni (3.1) e (3.2) possono essere adottate per l'analisi di travi in presenza di discontinuità lungo l'asse. Adottando opportune distribuzioni possono ottenersi singolarità di diverso tipo nelle funzioni di risposta, sia nelle espressioni della rigidezza flessionale che in quelle a taglio, come segue:

$$E(x)I(x) = E_0 I_0 \left[1 - \sum_{j=1}^{n_\beta} (\bar{\beta}_j - \bar{\beta}_{j-1}) U(x - x_{\beta_j}) \right] \left[1 - \sum_{i=1}^{n_\gamma} \bar{\gamma}_i \delta(x - x_{\gamma_i}) \right] \quad (3.3)$$

$$G(x)A(x) = G_0 A_0 \left[1 - \sum_{j=1}^{n_\beta} (\bar{\beta}'_j - \bar{\beta}'_{j-1}) U(x - x_{\beta_j}) \right] \left[1 - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \bar{\varepsilon}_k \delta(x - x_{\varepsilon_k}) \right] \quad (3.4)$$

dove U è la funzione di Heaviside (gradino unitario) e δ è la distribuzione nota come funzione delta di Dirac. I modelli presentati nelle eq. (3.3) e (3.4) possono essere adottati per il caso di singolarità $n_\beta, n_\gamma, n_\varepsilon$ di diverso tipo contemporaneamente presenti l'uno l'elemento nelle posizioni $x_{\beta_j}, x_{\gamma_i}, x_{\varepsilon_k}$. In particolare, i termini contenenti la funzione di Heaviside rappresentano brusche variazioni di sezione o del materiale che producono discontinuità nelle curvature, $\bar{\beta}_j$, e negli scorrimenti angolari, $\bar{\beta}'_j$, mentre la presenza di funzioni delta Dirac, sia nella rigidezza flessionale che in quella a taglio, rappresentano discontinuità rotazionali $\bar{\gamma}_i$ e nelle deformazioni trasversali $\bar{\varepsilon}_k$. I parametri $\bar{\beta}_j, \bar{\gamma}_i$ e $\bar{\beta}'_j, \bar{\varepsilon}_k$ rappresentano, rispettivamente, l'intensità della variazione di rigidezza flessionale e a taglio, e governano le corrispondenti discontinuità della risposta.

Per semplicità, considerando le coordinate adimensionalizzate $\xi = x/L$, e indicando con l'apice la derivata rispetto a ξ , le equazioni differenziali che governano il problema della trave di Timoshenko (3.1) e (3.2), in accordo alle singolarità introdotte attraverso le (3.3) e (3.4), assumono la seguente forma:

$$\left[\left[1 - \sum_{j=1}^{n_\beta} (\beta_j - \beta_{j-1}) U(\xi - \xi_{\beta_j}) \right] \left[1 - \sum_{i=1}^{n_\gamma} \gamma_i \delta(\xi - \xi_{\gamma_i}) \right] \varphi'(\xi) \right]' = \quad (3.5)$$

$$= br^2 H(\xi) \left[1 - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \varepsilon_k \delta(\xi - \xi_{\varepsilon_k}) \right] \left[u'(\xi) + \varphi(\xi) \right] - m(\xi)$$

$$br^2 \left[\left[1 - \sum_{j=1}^{n_\beta} (\beta'_j - \beta'_{j-1}) U(\xi - \xi_{\beta_j}) \right] \left[1 - \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \varepsilon_k \delta(\xi - \xi_{\varepsilon_k}) \right] \left[u'(\xi) + \varphi(\xi) \right] \right]' = -q(\xi) \quad (3.6)$$

Le equazioni (3.5) e (3.6), espresse in termini della funzione normalizzata $u(\xi) = \frac{v(\xi)}{L}$, tengono in conto dei carichi esterni attraverso il parametro di carico trasversale normalizzato $q(\xi) = \frac{\bar{q}(\xi)}{E_0 I_0} L^3$ e il parametro del carico da momento normalizzato $m(\xi) = \frac{\bar{m}(\xi)}{E_0 I_0} L^2$. Inoltre, nelle eq. (3.5) e (3.6) sono introdotti i parametri adimensionali delle singolarità $\gamma_i = \frac{\bar{\gamma}_i}{L}$, $\varepsilon_k = \frac{\bar{\varepsilon}_k}{L}$, $\beta_j = \frac{\bar{\beta}_j}{L}$, $\beta'_j = \frac{\bar{\beta}'_j}{L}$, e il parametro della rigidezza a taglio br^2 , con $b = \frac{G_0}{E_0}$ e $r^2 = L^2 \frac{A_0}{I_0}$.

La presenza di discontinuità nelle curvature $\bar{\beta}_j$ e negli scorrimenti angolari $\bar{\beta}'_j$ determina la modifica locale della rigidezza flessionale e a taglio del concio di trave compreso tra le ascisse x_{β_j} ed $x_{\beta_{j+1}}$. È possibile infatti dimostrare che sussistono la seguenti relazioni

$$\bar{\beta}_j = (E_0 I_0 - E_j I_j) / E_0 I_0 \quad (3.7)$$

$$\bar{\beta}'_j = (G_0 A_0 - G_j A_j) / G_0 A_0 \quad (3.8)$$

essendo $E_j I_j$ e $G_j A_j$ rispettivamente la rigidezza flessionale e a taglio del concio di trave compreso tra le ascisse x_{β_j} ed $x_{\beta_{j+1}}$. Dall'eq. (3.7) è possibile osservare inoltre che se $\bar{\beta}_j = 0$ la rigidezza flessionale del concio risulta pari a $E_j I_j = E_0 I_0$, se invece accade che $\bar{\beta}_j = 1$ allora la stessa rigidezza si annulla $E_j I_j = 0$. Analogamente se $\bar{\beta}'_j = 0$ la rigidezza a taglio del concio risulta pari a $G_j A_j = G_0 A_0$, viceversa se accade che $\bar{\beta}'_j = 1$ allora la stessa rigidezza si annulla $G_j A_j = 0$.

Le discontinuità rotazionali $\bar{\gamma}_i$ e nelle deformazioni trasversali $\bar{\varepsilon}_k$, invece, sono equivalenti a vincoli interni deformabili di rigidezza $k_{\varphi,i}$ e $k_{v,k}$ rispettivamente nelle rotazioni e negli spostamenti, localizzati nelle ascisse $x_{\gamma_i}, x_{\varepsilon_k}$. E' possibile dimostrare le seguenti relazioni

$$k_{\varphi,i} = \frac{1 - \bar{\gamma}_i A}{\bar{\gamma}_i} E_0 I_0 \quad (3.9)$$

$$k_{v,k} = \frac{1 - \bar{\varepsilon}_k A}{\bar{\varepsilon}_k} G_0 A_0 \quad (3.10)$$

essendo $k_{\varphi,i}$ e $k_{v,k}$ rispettivamente le rigidezze delle molle rotazionali e traslazionali equivalenti alle discontinuità $\bar{\gamma}_i$ e $\bar{\varepsilon}_k$ ed A un parametro dovuto a Bagarello (1995, 2002) che definisce il prodotto di due distribuzioni delta di Dirac.

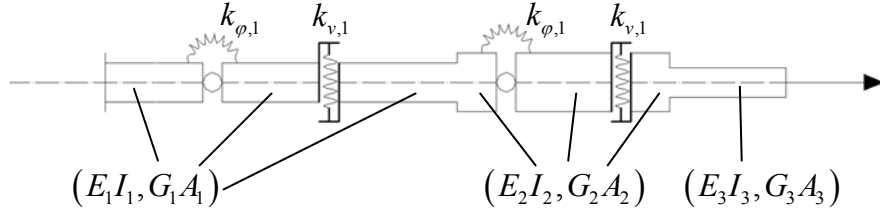


Figura 29 – Trave equivalente al modello proposto.

Le equazioni differenziali (3.5) e (3.6), governanti la trave di Timoshenko con singolarità, sono state recentemente risolte nella forma chiusa presentata nella sezione successiva con l'obiettivo di mostrare che esse possono essere impiegate con successo in accurate analisi dinamiche di elementi danneggiati.

3.3 Soluzione in forma chiusa della trave con discontinuità

Facendo uso della procedura d'integrazione recentemente proposta in Caddemi et al. (2012), le Eq. (3.5) e (3.6) portano alle seguenti espressioni della derivata della rotazione $\varphi'(\xi)$ e derivata della deformazione normalizzata $u'(\xi)$:

$$\varphi'(\xi) = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{n_\beta} (\beta_j - \beta_{j-1}) U(\xi - \xi_{\beta_j})} \left[-q^{[2]}(\xi) - m^{[1]}(\xi) + b_1 \xi + b_2 \right] \left[1 + \sum_{i=1}^{n_\gamma} \lambda_{\gamma_i} \delta(\xi - \xi_{\gamma_i}) \right] \quad (3.11)$$

$$u'(\xi) = \frac{1}{1 - \sum_{j=1}^{n_\beta} (\beta'_j - \beta'_{j-1}) U(\xi - \xi_{\beta_j})} \left[-\frac{q^{[1]}(\xi)}{br^2} + \frac{b_1}{br^2} \right] \left[1 + \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \lambda_{\varepsilon_k} \delta(\xi - \xi_{\varepsilon_k}) \right] - \varphi(\xi) \quad (3.12)$$

dove b_1, b_2 sono costanti d'integrazione e l'apice $[j]$ indica la primitiva di ordine j . Inoltre nelle Eq. (3.11) e (3.12) sono stati introdotti i parametri adimensionali $\lambda_{\gamma_i} = \frac{\gamma_i}{1 - A\gamma_i}$ e $\lambda_{\varepsilon_k} = \frac{\varepsilon_k}{1 - A\varepsilon_k}$, dove A è una costante

definita dal prodotto di due delta di Dirac (Biondi & Caddemi 2007). Questi ultimi parametri moltiplicano le delta di Dirac che compaiono nelle derivate della rotazione $\varphi'(\xi)$ e della deformazione normalizzata $u'(\xi)$ ciò mostra che il modello adottato implica salti sia nella rotazione $\varphi(\xi)$ che nella deformazione $u(\xi)$. In particolare λ_{γ_i} e λ_{ε_k} rappresentano le flessibilità, normalizzate rispetto $\frac{L}{E_0 I_0}$ e $\frac{L}{G_0 A_0}$, delle molle interne rotazionali e traslazionali alle posizioni x_{γ_i} , $i=1, \dots, n_\gamma$, x_{ε_k} , $k=1, \dots, n_\varepsilon$, che equivalgono alle singolarità nelle rigidezze flessionali e a taglio introdotte nel modello adottato attraverso le equazioni (3.3), (3.4). Le Eq. (3.11), (3.12) possono essere riscritte come segue:

$$\varphi'(\xi) = \left[1 + \sum_{j=1}^{n_\beta} \beta_j^* U(\xi - \xi_{\beta_j}) \right] \left[-q^{[2]}(\xi) - m^{[1]}(\xi) + b_1 \xi + b_2 + \right] \left[1 + \sum_{i=1}^{n_\gamma} \lambda_{\gamma_i} \delta(\xi - \xi_{\gamma_i}) \right] \quad (3.13)$$

$$u'(\xi) = \left[1 + \sum_{j=1}^{n_\beta} \beta_j^{*'} U(\xi - \xi_{\beta_j}) \right] \left[-\frac{q^{[1]}(\xi)}{br^2} + \frac{b_1}{br^2} \right] \left[1 + \sum_{k=1}^{n_\varepsilon} \lambda_{\varepsilon_k} \delta(\xi - \xi_{\varepsilon_k}) \right] - \varphi(\xi) \quad (3.14)$$

dove sono stati definiti i seguenti parametri aggiuntivi:

$$\beta_j^* = \frac{\beta_j}{1 - \beta_j} - \frac{\beta_{j-1}}{1 - \beta_{j-1}}, \quad \beta_j^{*'} = \frac{\beta'_j}{1 - \beta'_j} - \frac{\beta'_{j-1}}{1 - \beta'_{j-1}} \quad (3.15) \text{ (a,b)}$$

L'integrazione dell'eq. (3.13), per via delle regole d'integrazione delle distribuzioni e da semplici passaggi algebrici, porta alla seguente espressione esplicita della funzione rotazione $\varphi(\xi)$:

$$\varphi(\xi) = c_2 d_2(\xi) + c_3 d_3(\xi) + c_4 d_4(\xi) + d_5(\xi) \quad (3.16)$$

dove le costanti d'integrazione sono ridefinite come $c_3 = -b_2/2$, $c_4 = -b_1/6$, è introdotta la costante aggiuntiva c_2 e le funzioni $d_j(\xi)$, $j=2, \dots, 5$, sono

definite come segue:

$$\begin{aligned} d_2(\xi) &= -1 \quad ; \\ d_3(\xi) &= -2\xi - 2 \sum_{j=1}^{n_\beta} \beta_j^* (\xi - \xi_{\beta_j}) U(\xi - \xi_{\beta_j}) - 2 \sum_{i=1}^{n_\gamma} \lambda_{\gamma_i}^* U(\xi - \xi_{\gamma_i}) \quad ; \\ d_4(\xi) &= -3\xi^2 - 3 \sum_{j=1}^{n_\beta} \beta_j^* (\xi^2 - \xi_{\beta_j}^2) U(\xi - \xi_{\beta_j}) - 6 \sum_{i=1}^{n_\gamma} \lambda_{\gamma_i}^* \xi_{\gamma_i} U(\xi - \xi_{\gamma_i}) \quad ; \\ d_5(\xi) &= -q^{[3]}(\xi) - m^{[2]}(\xi) - \sum_{i=1}^{n_\gamma} \lambda_{\gamma_i}^* \left[q^{[2]}(\xi_{\gamma_i}) + m^{[1]}(\xi_{\gamma_i}) \right] U(\xi - \xi_{\gamma_i}) + \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n_\beta} \beta_j^* \left[\left(q^{[3]}(\xi) + m^{[2]}(\xi) \right) - \left(q^{[3]}(\xi_{\beta_j}) + m^{[2]}(\xi_{\beta_j}) \right) \right] U(\xi - \xi_{\beta_j}) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Sostituendo la funzione rotazione, data dalla (3.16), all'interno dell'eq.(3.14), dopo l'applicazione delle note regole d'integrazione di distribuzioni, si perviene alla seguente espressione esplicita della funzione spostamento $u(x)$:

$$u(\xi) = c_1 f_1(\xi) + c_2 f_2(\xi) + c_3 f_3(\xi) + c_4 f_4(\xi) + f_5(\xi) \quad (3.18)$$

dove:

$$\begin{aligned} f_1(\xi) &= 1 \quad ; \quad f_2(\xi) = \xi \\ f_3(\xi) &= \xi^2 + \sum_{j=1}^{n_\beta} \beta_j^* (\xi - \xi_{\beta_j})^2 U(\xi - \xi_{\beta_j}) + 2 \sum_{i=1}^{n_\gamma} \lambda_{\gamma_i}^* (\xi - \xi_{\gamma_i}) U(\xi - \xi_{\gamma_i}) \\ f_4(\xi) &= \xi^3 + \sum_{j=1}^{n_\beta} \beta_j^* (\xi^3 - 3\xi_{\beta_j}^2 \xi + 2\xi_{\beta_j}^3) U(\xi - \xi_{\beta_j}) + 6 \sum_{i=1}^{n_\gamma} \lambda_{\gamma_i}^* \xi_{\gamma_i} (\xi - \xi_{\gamma_i}) U(\xi - \xi_{\gamma_i}) + \\ &\quad - 6 \frac{\xi}{b r^2} - 6 \sum_{j=1}^{n_\beta} \frac{\beta_j^*}{b r^2} (\xi - \xi_{\beta_j}) U(\xi - \xi_{\beta_j}) - 6 \sum_{k=1}^{n_\epsilon} \frac{\lambda_{\epsilon_k}^*}{b r^2} U(\xi - \xi_{\epsilon_k}) \\ f_5(\xi) &= q^{[4]}(\xi) + m^{[3]}(\xi) + \sum_{j=1}^{n_\beta} \beta_j^* \left[\left(q^{[4]}(\xi) + m^{[3]}(\xi) \right) - \left(q^{[4]}(\xi_{\beta_j}) + m^{[3]}(\xi_{\beta_j}) \right) \right] U(\xi - \xi_{\beta_j}) + \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n_\gamma} \lambda_{\gamma_i}^* \left[q^{[2]}(\xi_{\gamma_i}) + m^{[1]}(\xi_{\gamma_i}) \right] (\xi - \xi_{\gamma_i}) U(\xi - \xi_{\gamma_i}) + \\ &\quad - \frac{q^{[2]}(\xi)}{b r^2} - \sum_{j=1}^{n_\beta} \frac{\beta_j^*}{b r^2} \left[q^{[2]}(\xi) - q^{[2]}(\xi_{\beta_j}) \right] U(\xi - \xi_{\beta_j}) - \sum_{k=1}^{n_\epsilon} \frac{\lambda_{\epsilon_k}^*}{b r^2} q^{[1]}(\xi_{\epsilon_k}) U(\xi - \xi_{\epsilon_k}) + \\ &\quad - \sum_{j=1}^{n_\beta} \beta_j^* \left[q^{[3]}(\xi_{\beta_j}) + m^{[2]}(\xi_{\beta_j}) \right] (\xi - \xi_{\beta_j}) U(\xi - \xi_{\beta_j}) \end{aligned} \quad (3.19)$$

Nelle eq. (3.17) e (3.19) sono stati introdotti i seguenti parametri:

$$\lambda_{\gamma_i}^* = \lambda_{\gamma_i} \left[1 + \sum_{j=1}^{n_\beta} \beta_j^* U(\xi_{\gamma_i} - \xi_{\beta_j}) \right] = \lambda_{\gamma_i} \left[1 + \frac{\beta_{j,i}}{1 - \beta_{j,i}} \right] \quad (3.20)$$

$$\lambda_{\varepsilon_k}^* = \lambda_{\varepsilon_k} \left[1 + \sum_{j=1}^{n_\beta} \beta_j'^* U(\xi_{\varepsilon_k} - \xi_{\beta_j}) \right] = \lambda_{\varepsilon_k} \left[1 + \frac{\beta_{j,k}'}{1 - \beta_{j,k}'} \right] \quad (3.21)$$

Nelle eq. (3.20) e (3.21) viene tenuto conto delle definizioni introdotte nell'eq (3.15) mentre $\beta_{j,i}$ e $\beta_{j,k}'$ indicano i valori dei parametri β_j e β_j' nel segmento di trave dove la i -esima discontinuità rotazionale γ_i e la k -esima discontinuità ε_k traslazionale agiscono. Analogamente ai parametri λ_{γ_i} e λ_{ε_k} , i parametri $\lambda_{\gamma_i}^*$ e $\lambda_{\varepsilon_k}^*$ rappresentano le flessibilità, delle molle interne rotazionali e traslazionali, normalizzate rispetto alle per-

tinenti flessibilità flessionali $\frac{L}{E_0 I_0} \left[1 + \frac{\beta_{j,i}}{1 - \beta_{j,i}} \right]$ e a taglio $\frac{L}{G_0 A_0} \left[1 + \frac{\beta_{j,k}'}{1 - \beta_{j,k}'} \right]$.

L'eq. (3.18), dove le costanti d'integrazione $\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3, \mathbf{C}_4$ sono determinabili imponendo opportune condizioni al contorno, rappresenta la soluzione esplicita della stepped Timoshenko trave in presenza di discontinuità in rotazioni e spostamenti trasversali. Quest'ultima tipologia di discontinuità può essere pensata come indotta dalla presenza di vincoli interni dotati di molle rotazionali e traslazionali con flessibilità $\lambda_{\gamma_i}^*$ e $\lambda_{\varepsilon_k}^*$, rispettivamente.

La soluzione per il caso della trave di Eulero-Bernoulli può essere facilmente ricavata assumendo che il parametro di taglio lungo l'asse della trave sia $br^2 \rightarrow \infty$; imponendo che $\beta_j^* = \beta_j'^* = 0$ si ottiene il caso della trave omogenea.

L'espressione del momento flettente $\bar{M}(\xi)$ viene valutata a partire da quella adimensionale $M(\xi)$ tramite la relazione

$$\bar{M}(\xi) = \frac{E(\xi)I(\xi)}{L} M(\xi) \quad (3.22)$$

L'espressione della $M(\xi)$ può essere ottenuta moltiplicando la rigidezza flessionale della trave $E(\xi)I(\xi) = E_0 I_0 \left[1 - \sum_{j=1}^{n_\beta} (\beta_j - \beta_{j-1}) U(\xi - \xi_{\beta_j}) \right]$ per la funzione $\chi(x) = \varphi'(x)$ che definisce la curvatura della trave

$$M(\xi) = E_0 I_0 \left[-2c_3 - 6c_4 \xi - q^{[2]}(\xi) - m^{[1]}(\xi) \right] \quad (3.23)$$

Analogamente, l'espressione dello sforzo di taglio $\bar{V}(\xi)$ dimensionale viene valutata a partire da quella adimensionale $V(\xi)$ tramite la relazione

$$\bar{V}(\xi) = \frac{E(\xi)I(\xi)}{L} V(\xi) \quad (3.24)$$

e l'espressione della $V(\xi)$ può essere ottenuto dall'equazione indefinita di equilibrio $M'(\xi) - V(\xi) + m(\xi) = 0$ tramite l'equazione (3.23)

$$V(\xi) = E_0 I_0 \left[-6c_4 - q^{[1]}(\xi) \right] \quad (3.25)$$

3.4 Funzioni di forma

La soluzione generale in forma chiusa della trave di Timoshenko in presenza di discontinuità multiple fornite dalle eq. (3.16) e (3.18), rispettivamente in termini di rotazione e deformazione, sono qui utilizzate per formulare un nuovo elemento finito trave per l'analisi dei telai con discontinuità. Tale elemento finito non richiede l'introduzione di ulteriori nodi in corrispondenza delle sezioni in cui si verificano le discontinuità. Precisamente, le espressioni esplicite della deflessione e funzioni di rotazione della trave Timoshenko con singolarità vengono riscritti qui per comodità, in assenza di carichi esterni, come segue:

$$\varphi(\xi) = c_2 d_2(\xi) + c_3 d_3(\xi) + c_4 d_4(\xi) \quad (3.26)$$

$$u(\xi) = c_1 f_1(\xi) + c_2 f_2(\xi) + c_3 f_3(\xi) + c_4 f_4(\xi) \quad (3.27)$$

in cui sono stati omessi i termini $d_5(\xi)$ ed $f_5(\xi)$ perché dipendenti dai carichi esterni



Figura 30 – Elemento finito trave

Per una trave doppiamente incastrata soggetta a spostamenti imposti al contorno, le costanti di integrazione che appaiono nelle eq. (3.26) e (3.27) sono valutati imponendo le seguenti condizioni al contorno:

$$u(0) = u_1; \quad \varphi(0) = -\varphi_1; \quad (3.28)$$

$$u(1) = u_2; \quad \varphi(1) = -\varphi_2$$

dove $(u_1, \varphi_1), (u_2, \varphi_2)$ sono rispettivamente gli spostamenti e le rotazioni dei nodi di estremità adimensionalizzati.

Attraverso semplici passaggi è possibile ricavare le costanti di integrazione cercate

$$\begin{cases} c_1 = u_1 \\ c_2 = -\varphi_1 \\ c_3 = -\frac{d_4(1)}{\omega}u_1 + \frac{d_4(1)+f_4(1)}{\omega}\varphi_1 + \frac{d_4(1)}{\omega}u_2 - \frac{f_4(1)}{\omega}\varphi_2 \\ c_4 = \frac{d_3(1)}{\omega}\hat{u}_1 - \frac{d_3(1)+f_3(1)}{\omega}\hat{\varphi}_1 - \frac{d_3(1)}{\omega}\hat{u}_2 + \frac{f_3(1)}{\omega}\hat{\varphi}_2 \end{cases} \quad (3.29)$$

Le equazioni (3.26) e (3.27) possono essere riscritte nella seguente forma

$$u(\xi) = N_{u1}(\xi)u_1 + N_{u2}(\xi)\varphi_1 + N_{u3}(\xi)u_2 + N_{u4}(\xi)\varphi_2 \quad (3.30)$$

$$\varphi(\xi) = N_{\varphi1}(\xi)u_1 + N_{\varphi2}(\xi)\varphi_1 + N_{\varphi3}(\xi)u_2 + N_{\varphi4}(\xi)\varphi_2 \quad (3.31)$$

essendo $N_{uj}(\xi)$ e $N_{\varphi j}(\xi)$ le funzioni di forma rispettivamente negli spostamenti e nelle rotazioni della trave di Timoshenko con discontinuità

$$\begin{aligned} N_{u1}(\xi) &= n_1^1 f_1(\xi) + n_2^1 f_2(\xi) + n_3^1 f_3(\xi) + n_4^1 f_4(\xi) = \sum_{k=1}^4 n_k^1 f_k(\xi) \\ N_{u2}(\xi) &= n_1^2 f_1(\xi) + n_2^2 f_2(\xi) + n_3^2 f_3(\xi) + n_4^2 f_4(\xi) = \sum_{k=1}^4 n_k^2 f_k(\xi) \\ N_{u3}(\xi) &= n_1^3 f_1(\xi) + n_2^3 f_2(\xi) + n_3^3 f_3(\xi) + n_4^3 f_4(\xi) = \sum_{k=1}^4 n_k^3 f_k(\xi) \\ N_{u4}(\xi) &= n_1^4 f_1(\xi) + n_2^4 f_2(\xi) + n_3^4 f_3(\xi) + n_4^4 f_4(\xi) = \sum_{k=1}^4 n_k^4 f_k(\xi) \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} N_{\varphi1}(\xi) &= n_2^1 d_2(\xi) + n_3^1 d_3(\xi) + n_4^1 d_4(\xi) = \sum_{k=2}^4 n_k^1 d_k(\xi) \\ N_{\varphi2}(\xi) &= n_2^2 d_2(\xi) + n_3^2 d_3(\xi) + n_4^2 d_4(\xi) = \sum_{k=2}^4 n_k^2 d_k(\xi) \\ N_{\varphi3}(\xi) &= n_2^3 d_2(\xi) + n_3^3 d_3(\xi) + n_4^3 d_4(\xi) = \sum_{k=2}^4 n_k^3 d_k(\xi) \\ N_{\varphi4}(\xi) &= n_2^4 d_2(\xi) + n_3^4 d_3(\xi) + n_4^4 d_4(\xi) = \sum_{k=2}^4 n_k^4 d_k(\xi) \end{aligned} \quad (3.33)$$

dove $d_i(\xi), f_i(\xi)$ sono fornite nelle eq.(3.17) e (3.19), n_k^r sono indicate nelle eq. (3.34)

$$\begin{aligned}
n_1^1 &= 1 ; \quad n_2^1 = 0 ; \quad n_3^1 = -\frac{d_4(1)}{\omega} ; & n_4^1 &= \frac{d_3(1)}{\omega} ; \\
n_1^2 &= 0 ; \quad n_2^2 = -1 ; \quad n_3^2 = \frac{f_2(1)d_4(1) - f_4(1)d_2(1)}{\omega} ; & n_4^2 &= \frac{f_3(1)d_2(1) - f_2(1)d_3(1)}{\omega} ; \\
n_1^3 &= 0 ; \quad n_2^3 = 0 ; \quad n_3^3 = \frac{d_4(1)}{\omega} ; & n_4^3 &= -\frac{d_3(1)}{\omega} ; \\
n_1^4 &= 0 ; \quad n_2^4 = 0 ; \quad n_3^4 = -\frac{f_4(1)}{\omega} ; & n_4^4 &= \frac{f_3(1)}{\omega} ;
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Le eq. (3.30) e (3.31) possono essere scritte ancora in forma compatta

$$\mathbf{u}(\xi) = \mathbf{N}_u^T(\xi) \mathbf{u}_0 \quad \varphi(\xi) = \mathbf{N}_\varphi^T(\xi) \mathbf{u}_0 \tag{3.35}$$

essendo $\mathbf{N}_u(\xi), \mathbf{N}_\varphi(\xi)$ i vettori che collezionano rispettivamente le funzioni di forma negli spostamenti e nelle rotazioni ed $\mathbf{u}_0$ un vettore che colleziona gli spostamenti nodali, definiti come segue

$$\mathbf{N}_u(\xi) = \begin{Bmatrix} N_{u1}(\xi) \\ N_{u2}(\xi) \\ N_{u3}(\xi) \\ N_{u4}(\xi) \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{N}_\varphi(\xi) = \begin{Bmatrix} N_{\varphi1}(\xi) \\ N_{\varphi2}(\xi) \\ N_{\varphi3}(\xi) \\ N_{\varphi4}(\xi) \end{Bmatrix} ; \quad \mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} u_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(0)/L \\ -\varphi(0) \\ u(1)/L \\ -\varphi(1) \end{Bmatrix}$$

L'espressione della curvatura può essere ottenute tramite derivazione dell'eq. (3.31) $\chi(\xi) = \varphi'(\xi)$

$$\chi(\xi) = N_{\chi1}(\xi)u_1 + N_{\chi2}(\xi)\varphi_1 + N_{\chi3}(\xi)u_2 + N_{\chi4}(\xi)\varphi_2 \tag{3.36}$$

dove $N_{\chi j}(\xi)$ sono le funzioni di forma in termini di curvature

$$\begin{aligned}
N_{\chi1}(\xi) &= n_3^1 d_3'(\xi) + n_4^1 d_4'(\xi) \\
N_{\chi2}(\xi) &= n_3^2 d_3'(\xi) + n_4^2 d_4'(\xi) \\
N_{\chi3}(\xi) &= n_3^3 d_3'(\xi) + n_4^3 d_4'(\xi) \\
N_{\chi4}(\xi) &= n_3^4 d_3'(\xi) + n_4^4 d_4'(\xi)
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Nell'eq. (3.37) le funzioni $d_3'(\xi), d_4'(\xi)$ sono le derivate delle funzioni $d_3(\xi), d_4(\xi)$ indicate nelle eq. (3.17)

$$d'_3(\xi) = -2 - 2 \sum_{j=1}^{n_\beta} \beta_j^* \xi \cdot U(\xi - \xi_{\beta_j}) \quad (3.38)$$

$$d'_4(\xi) = -3\xi^2 - 6 \sum_{j=1}^{n_\beta} \beta_j^* \xi \cdot U(\xi - \xi_{\beta_j})$$

L'eq. (3.36) può essere scritta nella seguente forma compatta

$$\chi(\xi) = \mathbf{N}_\chi^T(\xi) \mathbf{u}_0 \quad (3.39)$$

essendo $\mathbf{N}_\chi(\xi) = [N_{\chi 1}(\xi), N_{\chi 2}(\xi), N_{\chi 3}(\xi), N_{\chi 4}(\xi)]^t$ il vettore che colleziona le funzioni di forma nelle curvature

3.5 Matrice di rigidezza

Gli sforzi nodali interni, quali lo sforzo di taglio e il momento flettente, possono essere collezionati nel vettore $\mathbf{S}_0^T = [V_1 \ M_1 \ V_2 \ M_2] = [-V(0) \ M(0) \ V(1) \ -M(1)]$ e messi in relazione al vettore degli spostamenti nodali $\mathbf{u}_0$ attraverso la seguente espressione

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{K}_b \mathbf{u}_0$$

dove $\mathbf{K}_b$ è la matrice 4 x 4 di rigidezza dell'elemento finito trave con discontinuità multiple definita, in base all'eq. (3.33), come segue

$$\mathbf{K}_b = \begin{bmatrix} [(E(\xi)I(\xi)\mathbf{N}_\chi(\xi)^T)']_{\xi=0} \\ -[E(\xi)I(\xi)\mathbf{N}_\chi(\xi)^T]_{\xi=0} \\ -[(E(\xi)I(\xi)\mathbf{N}_\chi(\xi)^T)']_{\xi=1} \\ [E(\xi)I(\xi)\mathbf{N}_\chi(\xi)^T]_{\xi=1} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

L'espressione esplicita della matrice di rigidezza è riportata nell'appendice B.

3.6 Matrice di massa coerente

Al fine di effettuare un'analisi dinamica di una struttura intelaiata la distribuzione delle forze d'inerzia lungo l'elemento con discontinuità proposto può essere ricavata attraverso la costruzione della matrice di massa coerente. In particolare, la matrice di massa coerente

dell'elemento finito proposto con le funzioni di forma fornite dall'eq. (3.32) può essere valutata come segue:

$$\mathbf{M}_b = \int_0^l \mathbf{N}_u^T(\xi) m(\xi) \mathbf{N}_u(\xi) d\xi \quad (3.41)$$

dove $m(\xi)$ è la massa per unità di lunghezza dell'elemento. L'eq. (3.41) può essere sfruttata per formulare un'espressione esplicita della matrice di massa della trave con discontinuità come riportato nell'Appendice C per il caso di massa uniformemente distribuita.

Le forze d'inerzia contenute nel vettore $\mathbf{S}_I$ possono essere relazionate al vettore delle accelerazioni nodali $\ddot{\mathbf{u}}$ come segue:

$$\mathbf{S}_I = \mathbf{M}_b \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.42)$$

dove $\mathbf{M}_b$ è la matrice di massa consistente 4×4 dell'elemento trave con discontinuità le cui componenti sono valutate in accordo alle eq. (3.41)

Le forze d'inerzia contenute nel vettore $\mathbf{S}_I$ possono essere relazionate al vettore delle accelerazioni nodali $\ddot{\mathbf{u}}_0$ come segue:

La formulazione proposta definisce un elemento finito di tipo trave 2D con discontinuità multiple. Tuttavia, la matrice di rigidezza globale $\mathbf{K}_b$ e la matrice di massa $\mathbf{M}_b$ possono essere facilmente estese al caso 3D per un elemento finito con 12 DOF.

3.7 Analisi statica lineare di un telaio piano

In questo paragrafo si vuole dimostrare l'efficacia dell'elemento finito proposto attraverso l'analisi statica lineare del telaio piano rappresentato in Figura 31 soggetto ai seguenti carichi: $F = 0.75 \text{ kN}$, $q = 1.5 \text{ kNm}^{-1}$. Il telaio è composto da due ritti in acciaio ($E = 2.06 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$) di lunghezza $h = 3.00 \text{ m}$ aventi sezione trasversale rettangolare $12 \times 30 \text{ cm}$ ($I_c = 2.7 \times 10^{-4} \text{ m}^4$) ed un traverso in acciaio di lunghezza $L = 5.00 \text{ m}$ con sezione trasversale rettangolare $10 \times 20 \text{ cm}$ ($I_{b0} = 6.6 \times 10^{-5} \text{ m}^4$) rappresentato in Figura 32, presenta diverse discontinuità interne. Al fine di modellare il comportamento meccanico del traverso si introducono le seguenti discontinuità:

$$x_\beta = \begin{Bmatrix} 0 \text{ m} \\ 0.5 \text{ m} \\ 4.50 \text{ m} \end{Bmatrix}; \quad \bar{\beta} = \begin{Bmatrix} -10 \\ 0 \\ -10 \end{Bmatrix}; \quad x_\gamma = \begin{Bmatrix} 2.25 \text{ m} \\ 3.50 \text{ m} \end{Bmatrix}; \quad k_\gamma = \begin{Bmatrix} 1000 \text{ kN/m} \\ 1000 \text{ kN/m} \end{Bmatrix};$$

Pertanto la rigidezza flessionale del traverso $EI_b(x)$ è funzione delle singolarità secondo il modello proposto al §3.5.

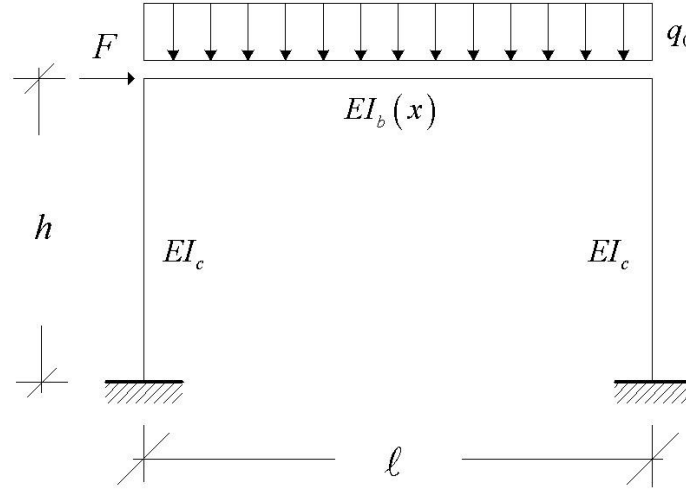


Figura 31. Modello di calcolo del telaio piano

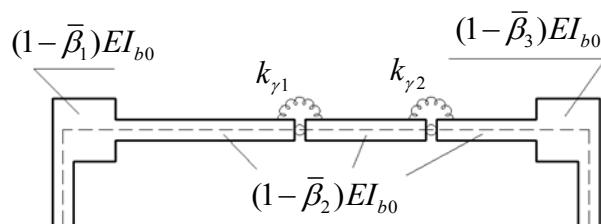


Figura 32. Schema di trave adottato per il modello agli elementi finiti

Nelle seguenti figure sono riportati i grafici della risposta del telaio modellato mediante elementi finiti con discontinuità multiple. I risultati sono stati confrontati con quelli ottenuti mediante il noto codice di calcolo SAP2000.

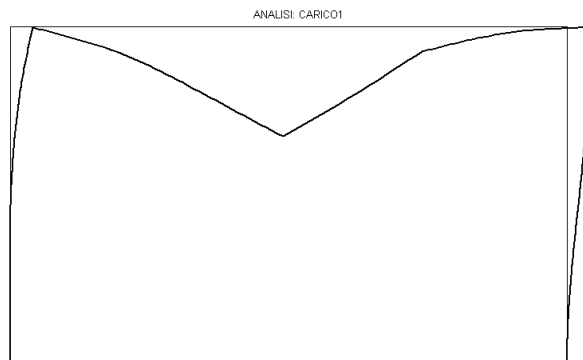


Figura 33. E.F. proposto: deformata del telaio in Figura 31. Il traverso subisce uno spostamento flessionale massimo in $x=2.25\text{m}$ pari a 0.39286 mm , mentre l'implacato trasla orizzontalmente di 0.818 mm nel punto di applicazione della forza F .

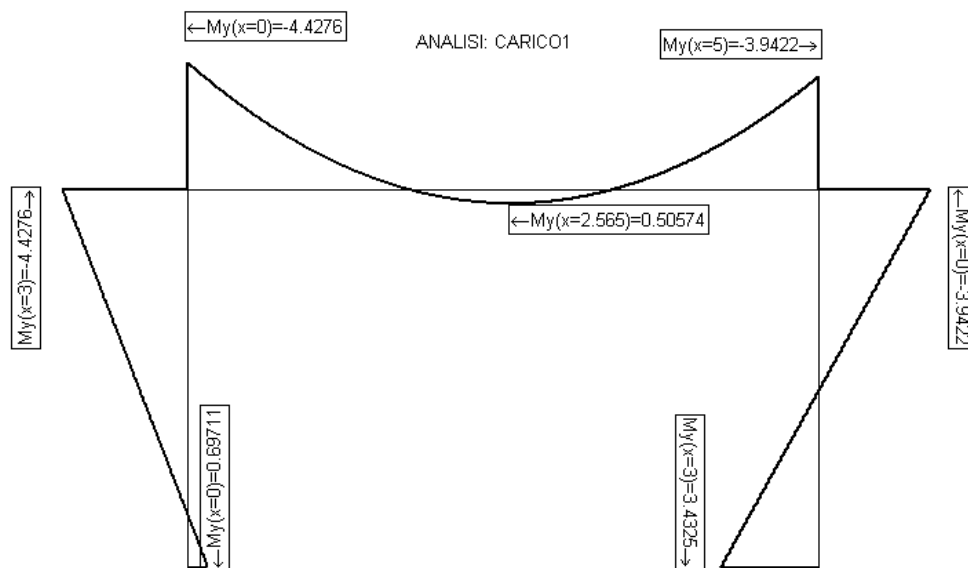


Figura 34. E.F. proposto: diagramma del momento flettente del telaio in Figura 31. I valori del momento flettente sono espressi in kNm.

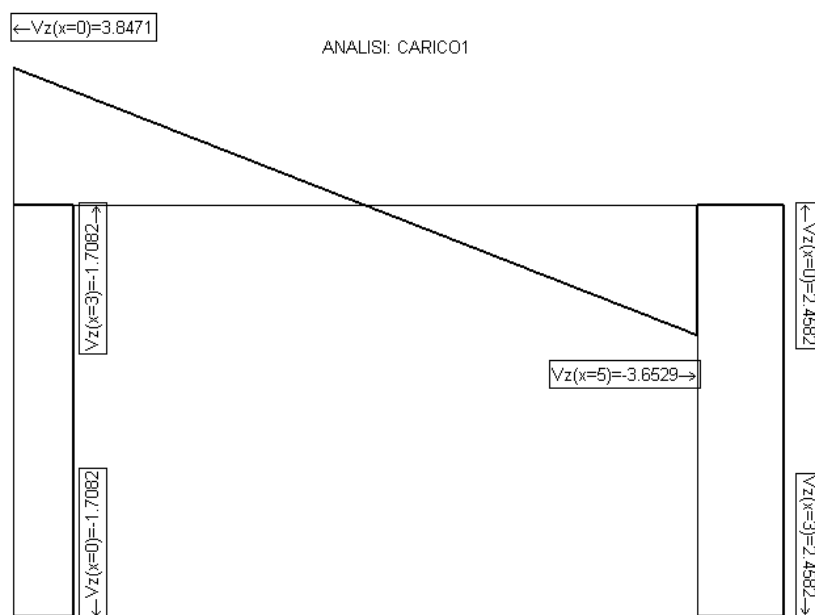


Figura 35. E.F. proposto: diagramma dello sforzo di taglio del telaio in Figura 31. I valori dello sforzo di taglio V sono espressi in kN.

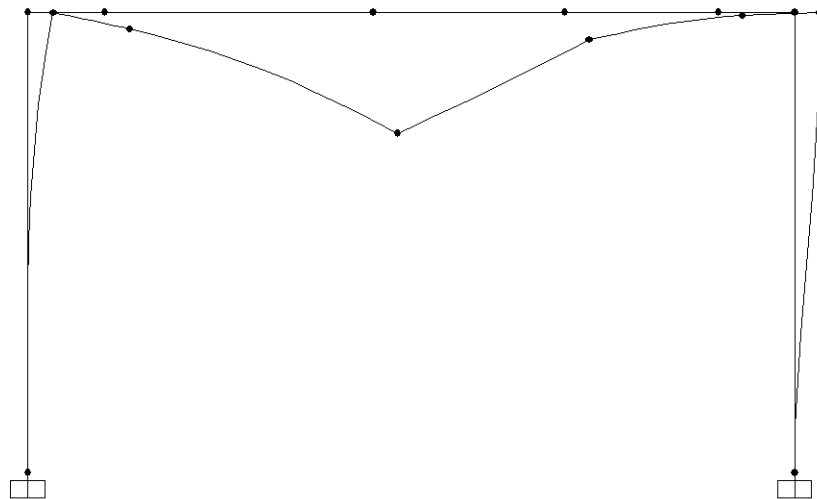


Figura 36. SAP2000: deformata del telaio in Figura 31. Il traverso subisce uno spostamento flessionale massimo in $x=2.25\text{m}$ pari a 0.3928 mm , mentre l'implacato trasla orizzontalmente di 0.818 mm nel punto di applicazione della forza F .

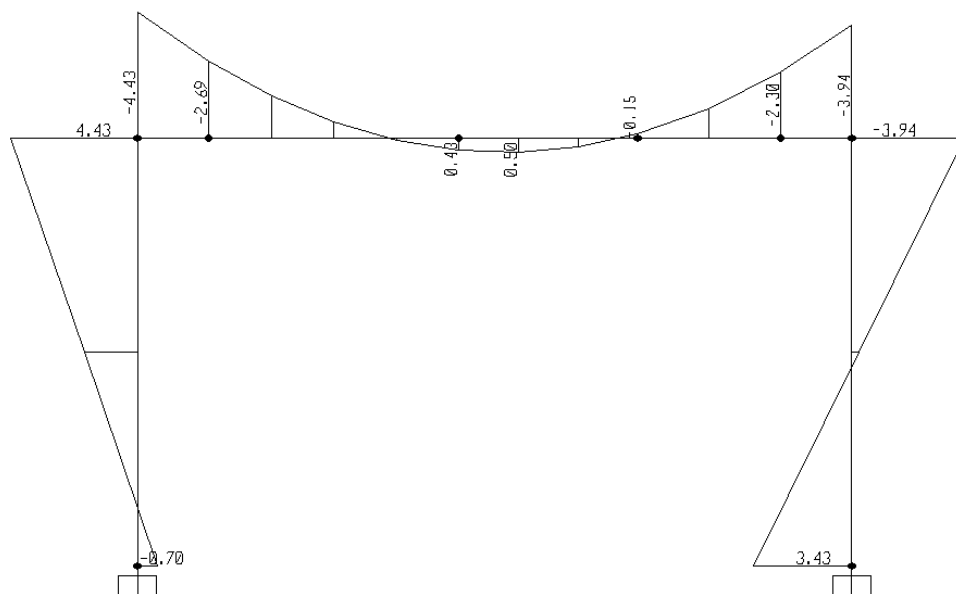


Figura 37. SAP2000: diagramma del momento flettente del telaio in Figura 31

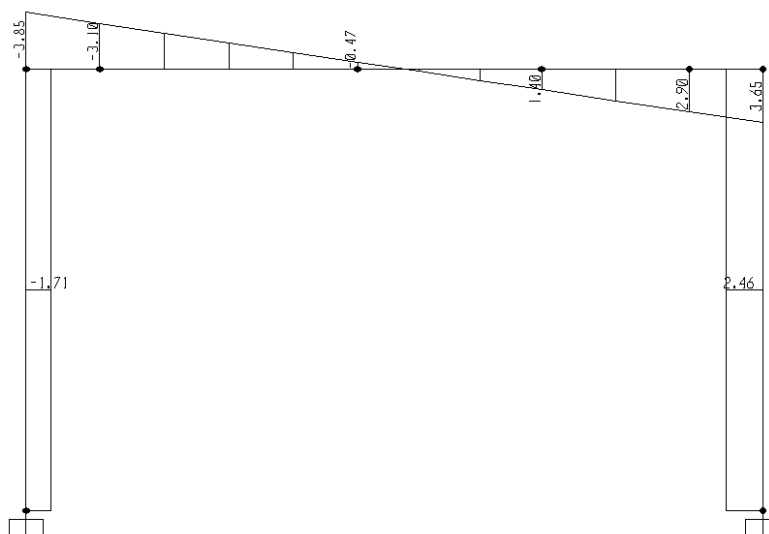


Figura 38. SAP2000: diagramma dello sforzo di taglio del telaio in Figura 31

Dal confronto della risposta locale del telaio si deduce che il modello basato su elementi finiti con discontinuità fornisce i medesimi risultati ottenibili mediante il modello generato dal codice di calcolo SAP2000 basato su elementi finiti standard. In quest'ultimo modello è stato necessario discretizzare il traverso in cinque elementi finiti, per cui il numero dei gradi di libertà del sistema risolvante risulta pari a 18. D'altra parte, il modello basato su elementi finiti con discontinuità multiple non necessita alcuna discretizzazione, per cui il numero dei gradi di libertà del sistema risolvante si riduce a 6. Si sottolinea l'evidente riduzione dell'onere computazionale che apporta l'elemento finito proposto.

3.8 Bibliografia

1. Yavari, A., Sarkani, S., Moyer, E.T., 2000. On applications of generalised functions to beam bending problems, *International Journal of Solids and Structures*, **37**, 5675-5705.
2. Yavari, A., Sarkani, S., Reddy, J.N., 2001. On nonuniform Euler-Bernoulli and Timoshenko traves with jump discontinuities: application of distribution theory, *International Journal of Solids and Structures* 38: 8389-8406.
3. Khiem, N.T., Lien, T.V., 2001. A simplified method for natural frequency analysis of a multiple cracked beam, *Journal of Sound and Vibration*, **245**, 737-751.
4. Ruotolo, R., Surace, C., 2004. Natural frequencies of a bar with multiple cracks, *Journal of Sound and Vibration* 272: 301-316.
5. Li, Q.S. 2002. Free vibration analysis of non-uniform traves with an arbitrary number of cracks and concentrated masses, *Journal of Sound and Vibration*, **252**, 509-525.
6. Binici, B. 2005. Vibration of traves with multiple open cracks subjected to axial force. *Journal of Sound and Vibration*, **287**, 277-295.
7. Wang, J., Qiao, P., 2007. Vibration of traves with arbitrary discontinuities and boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, **308**, 12-27.
8. Biondi, B., Caddemi, S. 2007. Euler-Bernoulli traves with multiple singularities in the flexural stiffness, *European Journal of Mechanics A/Solids*, **26**, 789-809.
9. Bilello, C. 2001. Theoretical and experimental investigation on damaged traves under moving systems. *Ph.D. Thesis*, University of Palermo, Italy.
10. Caddemi, S. & Calì, C. 2010. The influence of concentrated cracks on framed structures by means the dynamic stiffness method. *Fifth European Workshop on Structural Health Monitoring*, Sorrento, Naples, Italy.

11. Caddemi, S., Calò, I., Cannizzaro, F., 2012. Closed-form solutions for stepped Timoshenko traves with internal singularities and along-axis external supports. *Archive of Applied Mechanics* doi:10.1007/s00419-012-0704-7 (2012).
12. Dimarogonas, A.D., 1996. Vibration of cracked structures: a state of the art review. *Engineering Fracture Mechanics* 55, 831-857.
13. Ostachowicz, W.M., Krawczuk, C., 1991. Analysis of the effect of cracks on the natural frequencies of a cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration* 150(2), 191-201.
14. Rigos, P.F., Aspragathos, N., Dimarogonas, A.D., 1990. Identification of crack location and magnitude in a cantilever beam from the vibration modes. *Journal of Sound and Vibration* 138(3), 381-388.
15. Bilello, C., 2001. Theoretical and experimental investigation on damaged traves under moving systems. PhD. Thesis, Università degli Studi di Palermo, Palermo, Italy.

Capitolo 4

UN NUOVO ELEMENTO FINITO TRAVE A PLASTICITÀ DIFFUSA (GDB)

4.1 Premessa

Nel presente capitolo si propone un nuovo elemento finito trave a plasticità diffusa, formulato in termini di spostamenti, basato sulla soluzione statica della trave di Timoshenko con discontinuità. Tale elemento, indicato successivamente con la sigla GDB, acronimo associato alla frase ‘Generalised Displacement Based beam element’, si distingue dagli elementi finiti DB tradizionali per la possibilità di modificare la rigidezza dell’elemento attraverso l’uso di funzioni di forma arricchite dalla presenza di funzioni generalizzate il cui contributo si considera regolato da variabili interne. Nell’ambito della procedura numerica di analisi non lineare, basata sull’algoritmo di Newton Raphson, la modifica delle funzioni di forma dell’elemento finito viene governata dallo stato dell’elemento determinato a partire dalla risposta ottenuta nelle sezioni di controllo il cui numero e la cui posizione dipendono dal particolare metodo di integrazione alla Gauss considerato. Tale procedura mira ad una valutazione più accurata dello stato dell’elemento (Element State Determination). In questa prima veste la procedura proposta non tiene conto della deformabilità a taglio dell’elemento finito. Tale limitazione non preclude comunque la possibilità, anche attraverso successivi studi, di un’ulteriore estensione della procedura numerica al caso in cui l’elemento finito a plasticità diffusa sia anche deformabile a taglio.

L'elemento finito proposto, a differenza degli elementi finiti DB tradizionali, non richiede una discretizzazione della trave in sub-elementi per cogliere le variazioni di curvatura, per cui a parità di accuratezza il numero dei gradi di libertà richiesti rispetto agli approcci DB classici risulta di gran lunga inferiore. Rispetto agli approcci FB l'elemento possiede il vantaggio di restituire il campo degli spostamenti interno all'elemento e di non necessitare di ulteriori iterazioni nella fase di 'state element determination'. Inoltre la dipendenza delle funzioni di forma dai carichi direttamente applicati sull'elemento nè consente una facile implementazione anche in presenza di carichi concentrati o parzialmente distribuiti in campata senza la necessità di modifiche dell'elemento base (come per gli approcci FB) o di ulteriori discretizzazioni.

4.2 Forze e spostamenti nodali

Si consideri una trave i cui nodi di estremità **I** e **J** risultano individuati rispetto ad un sistema di riferimento globale $OXYZ$. Tale asta risulta orientata nello spazio secondo il sistema di riferimento locale dell'elemento xyz ortogonale e levogiro con origine $o \equiv \mathbf{I}$.

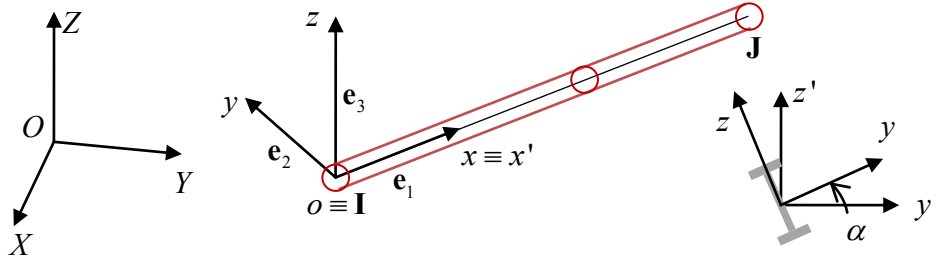


Figura 39 – Individuazione dell'elemento finito trave nello spazio rispetto al sistema di riferimento globale $OXYZ$ ed a quello locale dell'elemento xyz

Per definire l'orientamento degli assi del sistema di riferimento locale si definisca un sistema di riferimento ausiliario $ox'y'z'$ in modo che l'asse x' risulti disposto come il vettore $\mathbf{I}-\mathbf{J}$, l'asse y' sia tale che $\mathbf{e}_{x'} \cdot \mathbf{e}_{y'} = 0$ e $\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_{y'} = 0$ l'asse z' sia tale che $\mathbf{e}_{z'} = \mathbf{e}_{x'} \times \mathbf{e}_{y'}$. L'asse x del sistema di ri-

ferimento locale $oxyz$ risulta coincidente con l'asse x' mentre gli assi y e z risultano individuati in funzione dell'angolo di rotazione α .

Si definiscono $\mathbf{Q}_e$ e $\mathbf{q}_e$ rispettivamente i vettori delle forze e degli spostamenti nodali dell'elemento finito trave, espressi nel sistema di riferimento locale dell'elemento (cfr. figura 10)

$$\mathbf{Q}_e = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5, Q_6, Q_7, Q_8, Q_9, Q_{10}, Q_{11}, Q_{12})^T \quad (4.1)$$

$$\mathbf{q}_e = (q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8, q_9, q_{10}, q_{11}, q_{12})^T \quad (4.2)$$

Nella presente trattazione la risposta torsionale si assume governata da un legame elastico lineare e si considera disaccoppiata da quella flessionale, pertanto non verrà considerata nel prosieguo della trattazione.

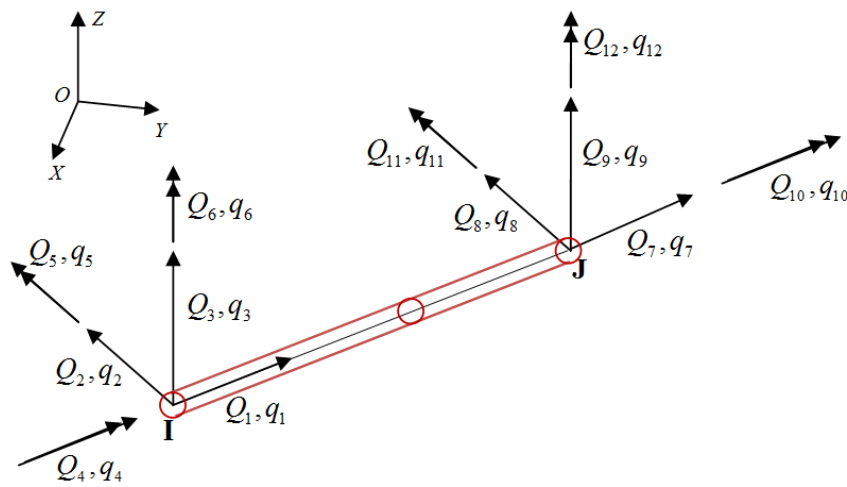


Figura 40 – Forze e spostamenti nodali dell'elemento finito trave

4.3 Ipotesi cinematiche

L'approccio adottato introduce un'ipotesi sul campo degli spostamenti della linea d'asse della trave che si assume possano essere espressi mediante una combinazione lineare di funzioni di forma generalizzate e variabili in funzione dello stato dell'elemento.

4.3.1 Le funzioni di forma generalizzate adottate nella discretizzazione

E' ben noto che il principale limite dell'approccio agli spostamenti classico, basato sulle funzioni di forma della trave elastica ed omogenea, risiede nell'incapacità di cogliere, nel singolo elemento, le variazioni di curvatura associate alle deformazioni plastiche nell'elemento e di conseguenza l'inadeguatezza della rappresentazione del campo degli spostamenti. L'idea alla base della presente formulazione consiste nel proporre un approccio agli spostamenti in cui le funzioni di forma, alla base della discretizzazione, risultino dipendenti dalle variazioni locali di rigidezza della trave. In particolare nella presente formulazione si propone di associare al monitoraggio dello stato dell'elemento nel passo la definizione di una trave non omogenea, con variabilità a tratti, la cui rigidezza possa ritenersi rappresentativa dello stato corrente dell'elemento. Tale approccio diviene competitivo se associato alle soluzioni in forma chiusa, riportate nel capitolo precedente e relativa alla trave con variabilità a tratti. Tali soluzioni sono relative alle funzioni di forma di un elemento trave con variabilità brusca nella rigidezza e posseggono l'enorme vantaggio di dipendere esclusivamente dai gradi di libertà nodali dell'elemento, come per la trave omogenea. Le discontinuità sono regolate delle variabili interne che identificano le variazioni di rigidezza flessionale dell'elemento regolando i contributi dei termini generalizzati delle funzioni.

4.3.1.1 La definizione della trave non omogenea equivalente

Diversi possono essere gli approcci di definizione della trave non omogenea equivalente, nella presente formulazione si è considerato un approccio dipendente dal metodo di integrazione adottato.

Il livello di conoscenza dello stato inelastico dell'elemento dipende dalla sua discretizzazione ed in particolare da:

- metodo di integrazione di linea e numero di sezioni di controllo;
- discretizzazione della sezione in fibre;
- legame costitutivo delle fibre.

I metodi di integrazione numerica generalmente adottati prevedono la suddivisione della trave in un numero finito di conci e l'introduzione di sezioni di controllo per ciascun concio. Ciascuna sezione di controllo si può allora ritenere rappresentativa della risposta e delle proprietà meccaniche delle altre sezioni che ricadono all'interno del concio di appartenenza. Si può allora assumere che, nel generico passo dell'analisi, la trave inelastica ai fini della rigidezza possa considerarsi equivalente ad una trave con rigidezza, variabile a tratti, individuata dallo stato delle sezioni di controllo. In figura Figura 41 viene qualitativamente rappresentata una trave non omogenea rappresentativa del generico stato dell'elemento, in accordo ad una procedura di integrazione di Gauss in cui le N_r sezioni di controllo risultano rappresentative di conci di lunghezza $\frac{L}{2} w_r$.

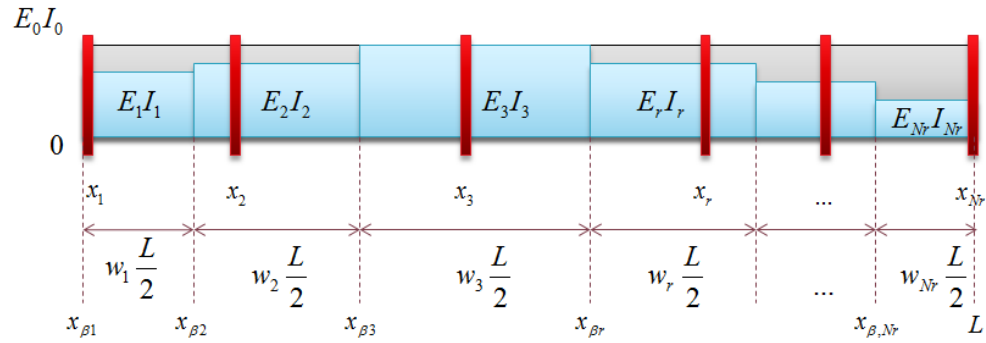


Figura 41 – Rappresentazione qualitativa della trave non omogenea equivalente.

In particolare con riferimento al metodo di integrazione di Gauss, detti ξ_r e w_r ($r=1,2,\dots,N_r$) rispettivamente i pesi e le posizioni delle sezioni di controllo rispetto al sistema di riferimento intrinseco, la trave può allora considerarsi suddivisa in conci di lunghezza pari a $\frac{L}{2} w_r$ rispetto al sistema di riferimento naturale. Per ciascun concio si introduce quindi una sezione di controllo posta in $x_r = (1 + \xi_r) \frac{L}{2}$ che, come detto poc'anzi, si assume essere rappresentativa delle altre sezioni del concio. Ciò im-

plica che ciascun concio di trave può considerarsi a rigidezza sezionale costante.

Per tale ragione si introducono discontinuità nelle curvature in numero pari a quello delle sezioni di controllo, posizionate in corrispondenza delle ascisse

$$x_{\beta_j} = \frac{L}{2} \sum_{r=1}^{j-1} w_r \quad j = 1, 2, \dots, N_r \quad (4.3)$$

Le ascisse x_{β_j} possono essere raccolte in un vettore $\mathbf{x}_\beta$ che individua le posizioni delle variazioni di rigidezza nella trave equivalente, rispetto all'origine posizionata al primo estremo.

$$\mathbf{x}_\beta = \left\{ 0, \frac{L}{2} w_1, \frac{L}{2} (w_1 + w_2), \dots, \frac{L}{2} (w_1 + w_2 + \dots + w_{N_r-1}) \right\} \quad (4.4)$$

Ciascuna discontinuità è individuata dal parametro $\bar{\beta}_j$ associato alla rigidezza flessionale della sezione di controllo $E_j I_j$ in funzione di un valore di riferimento $E_0 I_0$ generalmente assunto pari alla rigidezza iniziale della trave omogenea.

$$\bar{\beta}_j = (E_0 I_0 - E_j I_j) / E_0 I_0 \quad (4.5)$$

I parametri che individuano le intensità delle discontinuità $\bar{\beta}_j$ possono essere raccolte in un unico vettore

$$\bar{\boldsymbol{\beta}} = \{ \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_2, \dots, \bar{\beta}_{N_r} \} \quad (4.6)$$

In tal modo ciascun piano di inflessione della trave sarà caratterizzato nel passo da una coppia di vettori $(\mathbf{x}_\beta, \bar{\boldsymbol{\beta}})$ che caratterizza la distribuzione delle discontinuità. Le discontinuità così introdotte modellano la trave a conci, ciascuno dei quali ha una rigidezza sezionale costante pari

a quella della sezione di controllo ad esso associata. Inizialmente si assume che ciascun concio abbia rigidezza $E_f I_f$ pari a quella iniziale $E_0 I_0$ per cui $\bar{\beta}_j = 0$, il che comporta assenza di discontinuità.

Pertanto alla base della formulazione dell'elemento finito Generalised Displacement Based vi è l'ipotesi che il campo degli spostamenti della linea d'asse della trave si possa esprimere attraverso le funzioni di forma associate alla trave nonomogenea equivalente ed in particolare:

$$\begin{aligned} u_x(x, 0, 0) &= N_{x1}(\xi)q_1 + N_{x2}(\xi)q_7 \\ u_y(x, 0, 0) &= N_{y1}(\xi, \bar{\beta}_z)q_2 + N_{y2}(\xi, \bar{\beta}_z)q_6 + N_{y3}(\xi, \bar{\beta}_z)q_8 + N_{y4}(\xi, \bar{\beta}_z)q_{12} \\ u_z(x, 0, 0) &= N_{z1}(\xi, \bar{\beta}_y)q_3 + N_{z2}(\xi, \bar{\beta}_y)q_5 + N_{z3}(\xi, \bar{\beta}_y)q_9 + N_{z4}(\xi, \bar{\beta}_y)q_{11} \end{aligned} \quad (4.7)$$

in cui $N_{xy}(\xi)$ sono le funzioni di forma assiali negli spostamenti, per le quali si trascurano gli effetti associati alle discontinuità.

$$N_{x1}(\xi) = 1 - \xi, \quad N_{x2}(\xi) = \xi \quad (4.8)$$

$N_{yj}(\xi, \bar{\beta}_y), N_{zj}(\xi, \bar{\beta}_z)$ sono le funzioni di forma flessionali in termini di spostamento. Le espressioni delle funzioni di forma flessionali $N_{uj}(\xi)$ della trave con discontinuità sono state derivate nel capitolo precedente [eq. (3.32)] e valutate rispettivamente per le discontinuità nelle curvature di intensità $\bar{\beta}_{yr}$ e $\bar{\beta}_{zr}$, quest'ultime associate alle rigidezze flessionali EI_y ed EI_z di ciascuna sezione di controllo. I vettori $\bar{\beta}_y, \bar{\beta}_z$ collezionano i salti nella rigidezza flessionale $\bar{\beta}_{zr}$ e $\bar{\beta}_{yr}$.

L'eq.(4.7) può scriversi nella seguente forma compatta

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}(x, \bar{\beta}_y, \bar{\beta}_z) \cdot \mathbf{q}_e \quad (4.9)$$

dove $\mathbf{u}(x) = [u_x(x, 0, 0), u_y(x, 0, 0), u_z(x, 0, 0)]^t$ è il vettore che raccoglie le componenti di spostamento lungo la linea d'asse mentre $\mathbf{N}(x, \bar{\mathbf{\beta}}_y, \bar{\mathbf{\beta}}_z)$ è la matrice che raccoglie le funzioni di forma sopra citate.

$$\mathbf{N}(x, \bar{\mathbf{\beta}}_y, \bar{\mathbf{\beta}}_z) = \begin{bmatrix} N_{x1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{x2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{y1} & 0 & 0 & 0 & N_{y2} & 0 & N_{y3} & 0 & 0 & 0 & N_{y4} \\ 0 & 0 & N_{z1} & 0 & N_{z2} & 0 & 0 & 0 & N_{z3} & 0 & N_{z4} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

4.4 Campo di deformazione

Per l'elemento finito proposto si assume inoltre che sia soddisfatta l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, per cui il campo delle deformazioni longitudinali può essere espresso nella forma

$$\varepsilon_x(x, y, z) = \varepsilon_0 + \chi_y z - \chi_z y = \begin{bmatrix} 1 & z & -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi_y \\ \chi_z \end{bmatrix} = \mathbf{a}(y, z) \cdot \mathbf{d}(x) \quad (4.11)$$

Nella eq. (4.11) il campo delle deformazioni $\varepsilon_x(x, y, z)$ è descritto dal prodotto scalare tra il vettore $\mathbf{a}(y, z)$ ed il vettore delle deformazioni generalizzate $\mathbf{d}(x)$, realizzando in tal modo una separazione delle variabili da quelle dipendenti dalle ascisse (y, z) a quelle dipendenti dalla posizione x della sezione.

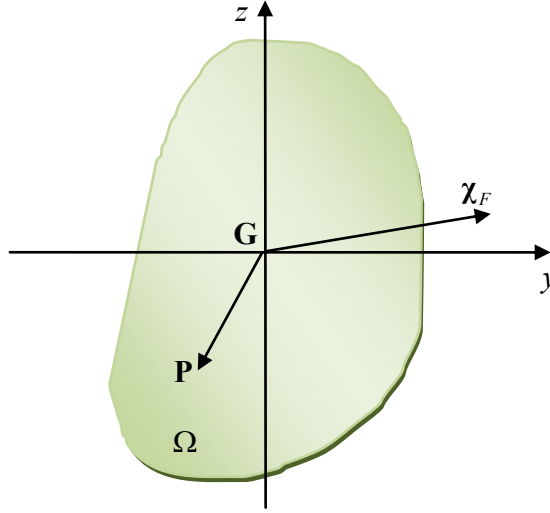


Figura 42 – Sezione trasversale della trave

Con riferimento alle deformazioni trasversali principali $(\varepsilon_y, \varepsilon_z)$ queste sono ovunque trascurate. Nell'ipotesi in cui la trave sia indeformabile a taglio gli scorimenti angolari risultano nulli ed il tensore di deformazione si scrive

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Le deformazioni generalizzate $\varepsilon_0(x), \chi_y(x), \chi_z(x)$ sono messe in relazione al vettore degli spostamenti nodali tramite le relazioni

$$\begin{aligned} \varepsilon_0(x) &= N'_{x1}(\xi) \cdot q_1 + N'_{x2}(\xi) \cdot q_7 \\ \chi_y(x) &= N_{\chi_y1}(\xi, \bar{\mathbf{p}}_y) \cdot q_3 + N_{\chi_y2}(\xi, \bar{\mathbf{p}}_y) \cdot q_5 + N_{\chi_y3}(\xi, \bar{\mathbf{p}}_y) \cdot q_9 + N_{\chi_y4}(\xi, \bar{\mathbf{p}}_y) \cdot q_{11} \\ \chi_z(x) &= N_{\chi_z1}(\xi, \bar{\mathbf{p}}_z) \cdot q_2 + N_{\chi_z2}(\xi, \bar{\mathbf{p}}_z) \cdot q_6 + N_{\chi_z3}(\xi, \bar{\mathbf{p}}_z) \cdot q_8 + N_{\chi_z4}(\xi, \bar{\mathbf{p}}_z) \cdot q_{12} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Nelle eq. (4.13) $\xi = x/L$ è l'ascissa adimensionalizzata rispetto alla lunghezza L dell'elemento finito, $N'_{xj}(\xi)$ sono le derivate prime delle

funzioni di forma assiali [eq.(4.8)], $N_{\chi_y j}(\xi, \bar{\beta}_y)$ e $N_{\chi_z j}(\xi, \bar{\beta}_z)$ sono le funzioni di forma flessionali in termini di curvatura $N_{\chi j}(\xi)$ della trave con discontinuità ottenute al capitolo precedente [eq. (3.37)] valutate rispettivamente per i vettori delle discontinuità nelle curvature di intensità $\bar{\beta}_y$ e $\bar{\beta}_z$, quest'ultime associate alle rigidezze flessionali EI_y ed EI_z delle sezioni di controllo della trave. Le eq.(4.13) possono essere scritte ancora nella seguente forma compatta

$$\mathbf{d}(x) = \mathbf{B}(x, \bar{\beta}_y, \bar{\beta}_z) \cdot \mathbf{q}_e \quad (4.14)$$

essendo $\mathbf{d}(x) = [\varepsilon_0(x), \chi_y(x), \chi_z(x)]^T$ il vettore delle deformazioni generalizzate, $\mathbf{B}(x, \bar{\beta}_y, \bar{\beta}_z)$ la matrice che raccoglie le funzioni di forma nelle deformazioni assiali e nelle curvature definite superiormente.

$$\mathbf{B}(x, \bar{\beta}_y, \bar{\beta}_z) = \begin{bmatrix} N'_{x1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N'_{x2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{\chi_y 1} & 0 & N_{\chi_y 2} & 0 & 0 & 0 & N_{\chi_y 3} & 0 & N_{\chi_y 4} & 0 \\ 0 & N_{\chi_z 1} & 0 & 0 & 0 & N_{\chi_z 2} & 0 & N_{\chi_z 3} & 0 & 0 & 0 & N_{\chi_z 4} \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

4.6 Campo di tensione

Nella presente formulazione si assume che il campo delle tensioni assiali $\sigma_x(x, y, z)$ sia indipendente dalle azioni associate alla torsione e al taglio di cui si ignora l'influenza. Si ha pertanto

$$\sigma_x(x, y, z) = E(x, y, z) \cdot \varepsilon_x(x, y, z) \quad (4.16)$$

Noto il campo di tensioni nella direzione dell'asse della trave $\sigma_x(x, y, z)$ le caratteristiche della sollecitazione, derivanti da tale campo di tensione, si possono raccogliere nel vettore $\mathbf{D}(x) = [N(x) M_y(x) M_z(x)]^T$, e si possono esprimere nella forma compatta:

$$\mathbf{D}(x) = \begin{bmatrix} N(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{bmatrix} = \int_{\Omega} \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ -y \end{bmatrix} \cdot \sigma_x(x, y, z) d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\alpha}^T(y, z) \cdot \sigma_x(x, y, z) d\Omega \quad (4.17)$$

essendo Ω l'area della sezione trasversale della trave. Con riferimento ad una discretizzazione “a fibre” della sezione trasversale della trave l'eq. (4.17) si traduce nella sommatoria estesa al numero di fibre considerate

$$\mathbf{D}(x) = \begin{bmatrix} N(x) \\ M_y(x) \\ M_z(x) \end{bmatrix} = \sum_{ifib=1}^{Nfib} \boldsymbol{\alpha}^T(y_{ifib}, z_{ifib}) \cdot \sigma_x(x, y_{ifib}, z_{ifib}) \cdot A_{ifib} \quad (4.18)$$

4.7 Matrice di rigidezza

La relazione che lega le forze nodali $\mathbf{Q}_e$ agli spostamenti nodali $\mathbf{q}_e$ dell'elemento finito si ottiene applicando il principio dei lavori virtuali (PLV). Ipotizzando che l'elemento finito sia soggetto solo a forze e spostamenti nodali il PLV fornisce

$$\int_V tr(\mathbf{T} \cdot \delta \mathbf{E}) dv = \mathbf{Q}_e^T \cdot \delta \mathbf{q}_e \quad \Rightarrow \quad \int_V \sigma_x \delta \varepsilon_x dv = \mathbf{Q}_e^T \cdot \delta \mathbf{q}_e \quad (4.19)$$

sostituendo l'eq. (4.16) nell'eq. (4.19) si ottiene

$$\int_V \varepsilon_x \cdot E(x, y, z) \cdot \delta \varepsilon_x dv = \mathbf{Q}_e^T \cdot \delta \mathbf{q}_e \quad (4.20)$$

sostituendo l'eq. (4.11) nell'eq. (4.20)

$$\int_V \mathbf{d}^T(x) \cdot \boldsymbol{\alpha}^T(y, z) \cdot E(x, y, z) \cdot \boldsymbol{\alpha}(y, z) \cdot \delta \mathbf{d}(x) dv = \mathbf{Q}_e^T \cdot \delta \mathbf{q}_e \quad (4.21)$$

L'integrale di volume nell'eq. (4.21) può essere ancora scritto come un integrale esteso all'area della sezione trasversale $\Omega(x)$ per un integrale esteso alla lunghezza L della elemento finito

$$\int_0^L \mathbf{d}'(x) \cdot \underbrace{\left[\int \alpha^T(y, z) \cdot E \cdot \alpha(y, z) d\Omega \right]}_{\mathbf{k}(x)} \cdot \delta \mathbf{d}(x) dx = \mathbf{Q}_e^t \cdot \delta \mathbf{q}_e \quad (4.22)$$

L'integrale esteso all'area della sezione trasversale $\Omega(x)$ è noto in letteratura come matrice di rigidezza della sezione x e viene usualmente indicato con il simbolo $\mathbf{k}(x)$. Sostituendo l'eq. (4.14) nell'eq. (4.22) si ottiene

$$\mathbf{q}_e^t \int_0^L \mathbf{B}'(x, \bar{\boldsymbol{\beta}}_y, \bar{\boldsymbol{\beta}}_z) \cdot \mathbf{k}(x) \cdot \mathbf{B}(x, \bar{\boldsymbol{\beta}}_y, \bar{\boldsymbol{\beta}}_z) dx \cdot \delta \mathbf{q}_e = \mathbf{Q}_e^t \cdot \delta \mathbf{q}_e \quad \forall \delta \mathbf{q}_e \quad (4.23)$$

portando tutti i termini al primo membro si ottiene

$$\left[\mathbf{q}_e^t \int_0^L \mathbf{B}'(x, \bar{\boldsymbol{\beta}}_y, \bar{\boldsymbol{\beta}}_z) \cdot \mathbf{k}(x) \cdot \mathbf{B}(x, \bar{\boldsymbol{\beta}}_y, \bar{\boldsymbol{\beta}}_z) dx - \mathbf{Q}_e^t \right] \cdot \delta \mathbf{q}_e = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q}_e \quad (4.24)$$

poiché l'eq. (4.24) deve essere soddisfatta per un arbitrario campo di spostamenti $\delta \mathbf{q}_e$ si ha

$$\mathbf{q}_e^t \int_0^L \mathbf{B}'(x, \bar{\boldsymbol{\beta}}_y, \bar{\boldsymbol{\beta}}_z) \cdot \mathbf{k}(x) \cdot \mathbf{B}(x, \bar{\boldsymbol{\beta}}_y, \bar{\boldsymbol{\beta}}_z) dx = \mathbf{Q}_e^t \quad (4.25)$$

e in forma compatta

$$\mathbf{q}_e^t \mathbf{K}_e^t = \mathbf{Q}_e^t \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Q}_e = \mathbf{K}_e \mathbf{q}_e \quad (4.26)$$

essendo $\mathbf{K}_e$

$$\mathbf{K}_e = \int_0^L \mathbf{B}^t(x, \bar{\beta}_y, \bar{\beta}_z) \cdot \mathbf{k}(x) \cdot \mathbf{B}(x, \bar{\beta}_y, \bar{\beta}_z) dx \quad (4.27)$$

la matrice di rigidezza dell'elemento finito trave che dipende dallo stato corrente dell'elemento attraverso i vettori $\bar{\beta}_y, \bar{\beta}_z$.

In Figura 43 è riportato, mediante diagramma di flusso, lo schema di aggiornamento della matrice di rigidezza dell'elemento.

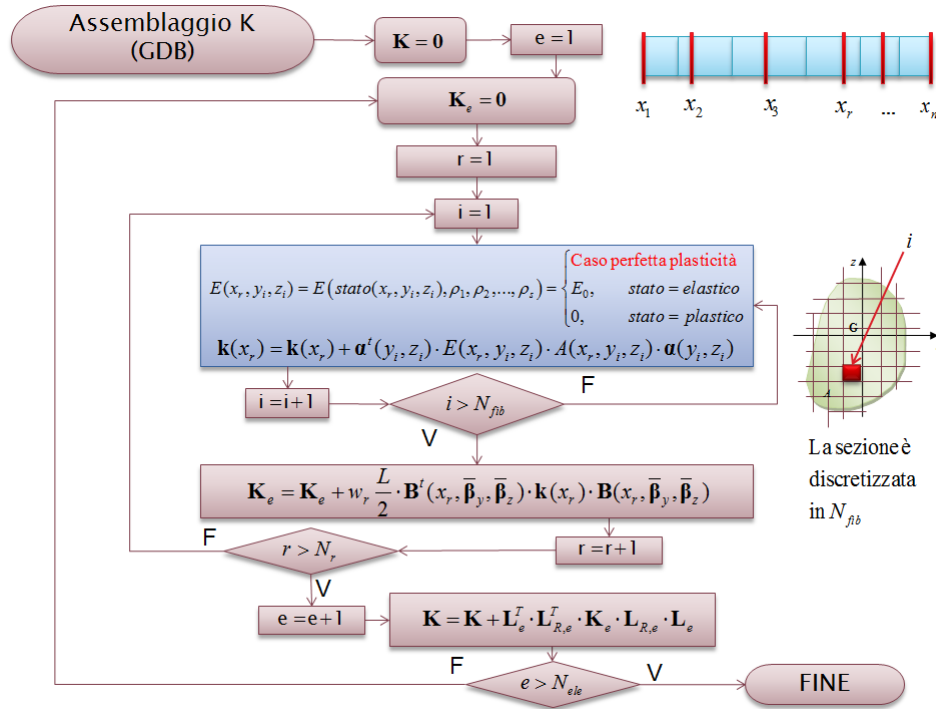


Figura 43 – Diagramma di flusso per l'assemblaggio della matrice di rigidezza dell'elemento finito GDB

4.8 Forze nodali reattive

Il vettore delle forze nodali dell'elemento (element resisting forces), $\mathbf{Q}_e$, viene determinato applicando il principio dei lavori virtuali

$$\delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{Q}_e = \int_0^L \delta \mathbf{d}^T(x) \mathbf{D}(x) dx \quad (4.28)$$

Sostituendo l'eq. (4.14) nella eq. (4.28) si ottiene

$$\delta \mathbf{q}_e^T \mathbf{Q}_e = \delta \mathbf{q}_e^T \int_0^L \mathbf{B}^T(x, \bar{\boldsymbol{\beta}}_y, \bar{\boldsymbol{\beta}}_z) \cdot \mathbf{D}(x) dx \quad (4.29)$$

Portando tutti i termini al primo membro si ha

$$\delta \mathbf{q}_e^T \cdot \left[\mathbf{Q}_e - \int_0^L \mathbf{B}^T(x, \bar{\boldsymbol{\beta}}_y, \bar{\boldsymbol{\beta}}_z) \cdot \mathbf{D}(x) dx \right] = 0 \quad \forall \delta \mathbf{q}_e \quad (4.30)$$

Tale relazione deve essere soddisfatta per un arbitrario campo di spostamenti $\delta \mathbf{q}_e$ per cui dovrà essere

$$\mathbf{Q}_e = \int_0^L \mathbf{B}^T(x, \bar{\boldsymbol{\beta}}_y, \bar{\boldsymbol{\beta}}_z) \cdot \mathbf{D}(x) dx \quad (4.31)$$

Con riferimento alle procedure di analisi non lineare basate sull'algoritmo di Newton-Raphson la determinazione del vettore delle forze nodali $\mathbf{Q}_e$ avviene tramite integrazione numerica dell'eq.(4.31). Nel caso in cui si adotti il metodo di integrazione alla Gauss l'eq. (4.31) diventa

$$\mathbf{Q}_e = \int_0^L \mathbf{B}^T(x, \bar{\boldsymbol{\beta}}_y, \bar{\boldsymbol{\beta}}_z) \cdot \mathbf{D}(x) dx \approx \sum_{r=1}^{N_r} \mathbf{B}^T(x_r, \bar{\boldsymbol{\beta}}_y, \bar{\boldsymbol{\beta}}_z) \cdot \mathbf{D}(x_r) \cdot w_r \frac{L}{2} \quad (4.32)$$

essendo w_r i pesi di Gauss.

Appare evidente che a differenza dell'approccio agli spostamenti standard, i vettore delle forze nodali oltre a dipendere dai valori correnti delle caratteristiche della sollecitazione nelle sezioni di controllo risulta anche influenzato dalla variabilità delle funzioni di forma.

4.9 Determinazione dello stato dell'elemento

La determinazione dello stato dell'elemento (*Element State Determination*) consente la determinazione delle forze nodali dell'elemento $\Delta \mathbf{Q}_e$ che scaturiscono da un campo di spostamenti nodali imposti $\Delta \mathbf{q}_e$. La procedura proposta è molto simile a quella adottata nell'approccio classico agli spostamenti, già esposta nel capitolo 1 (cfr. § 1.3.3.5). L'unica differenza è associata alla necessità di aggiornare i vettori $\bar{\beta}_y, \bar{\beta}_z$ che collezionano i salti nella rigidezza flessionale in accordo alla rigidezza corrente delle sezioni di controllo. Con riferimento all'elemento finito trave a plasticità diffusa GDB e per un fissato incremento del vettore degli spostamenti nodali $\Delta \mathbf{q}_e$, la sequenza delle operazioni, espresse simbolicamente

dall'eq. **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.**, è riassumibile nei seguenti punti:

- 1) Per un incremento finito di spostamenti nodali $\Delta \mathbf{q}_e$ si impone a ciascuna sezione x_r di controllo un campo di deformazioni generalizzate congruente $\Delta \mathbf{d}(x_r)$ tramite l'eq. (1.20):

$$\Delta \mathbf{d}^j(x_r) = \mathbf{B}(x_r, \bar{\beta}_y^{j-1}, \bar{\beta}_z^{j-1}) \cdot \Delta \mathbf{q}_e^j$$

- 2) Le caratteristiche della sollecitazione $\Delta \mathbf{D}(x_r)$ che scaturiscono dal campo di deformazioni imposto $\Delta \mathbf{d}(x_r)$ sono ottenute mediante l'analisi sezionale (Section State Determination, cfr. § 1.3.3.6) Tale procedura si può esprimere simbolicamente come $\Delta \mathbf{D}(x_r) = g[\Delta \mathbf{d}(x_r)]$

- 3) **Aggiornamento delle discontinuità.**

Per ciascuna sezione x_r di controllo si eseguono le seguenti operazioni:

- a) **Aggiornamento della discontinuità $\bar{\beta}_y^j$.** Sia $\bar{\beta}_{y,r}^{j-1}$ e $\bar{\beta}_{y,r}^j$ l'intensità della discontinuità nella sezione r -esima rispettivamente valutate nell'iterazione precedente ($j-1$) ed in quella corrente (j);

sia $\Delta\chi_y^{j-1}(x_r)$ e $\Delta\chi_y^j(x_r)$ l'incremento della curvatura nella sezione r -esima valutati rispettivamente nell'iterazione precedente ($j-1$) ed in quella corrente (j).

Se $\bar{\beta}_{y,r}^{j-1} > 0$ e se $\Delta\chi_y^{j-1}(x_r) \cdot \Delta\chi_y^j(x_r) < 0$ allora si è in presenza di uno scarico da una fase di carico plastico. In tal caso si assegna una intensità della discontinuità nulla alla sezione di controllo r -esima: $\bar{\beta}_{y,r}^j = 0$

Viceversa, se $\Delta\chi_y^j(x_r) \neq 0$, si calcola la rigidezza corrispondente $EI_{y,r}^j = \Delta M_y^j(x_r) / \Delta\chi_y^j(x_r)$ per cui l'intensità della discontinuità è fornita dalla eq.(4.5): $\bar{\beta}_{y,r}^j = (EI_{y0} - EI_{y,r}^j) / EI_{y0}$. Se invece $\Delta\chi_y^j(x_r) = 0$ non si procede all'aggiornamento di $\bar{\beta}_{y,r}^j$ e si conserva il suo valore assunto all'iterazione precedente $\bar{\beta}_{y,r}^{j-1}$

b) Aggiornamento della discontinuità $\bar{\beta}_z^j$. Si ripete quanto detto al punto a) considerando le corrispondenti quantità vettoriali che riportano il pedice z .

- 4) Noti gli incrementi delle caratteristiche della sollecitazione $\Delta\mathbf{D}(x_r)$ nelle sezioni di controllo è possibile calcolare l'incremento delle forze nodali reattive (resisting forces) tramite l'eq.(4.31)

$$\Delta\mathbf{Q}_e^j = \sum_{r=1}^{N_r} \mathbf{B}^T(x_r, \bar{\beta}_y^j, \bar{\beta}_z^j) \cdot \Delta\mathbf{D}^j(x_r) \cdot w_r \frac{L}{2}$$

Il valore cumulato del vettore delle forze nodali $\mathbf{Q}_e$ è ottenuto, infine, sommando l'incremento calcolato al valore ottenuto nell'iterazione precedente

$$\mathbf{Q}_e^j = \mathbf{Q}_e^{j-1} + \Delta\mathbf{Q}_e^j$$

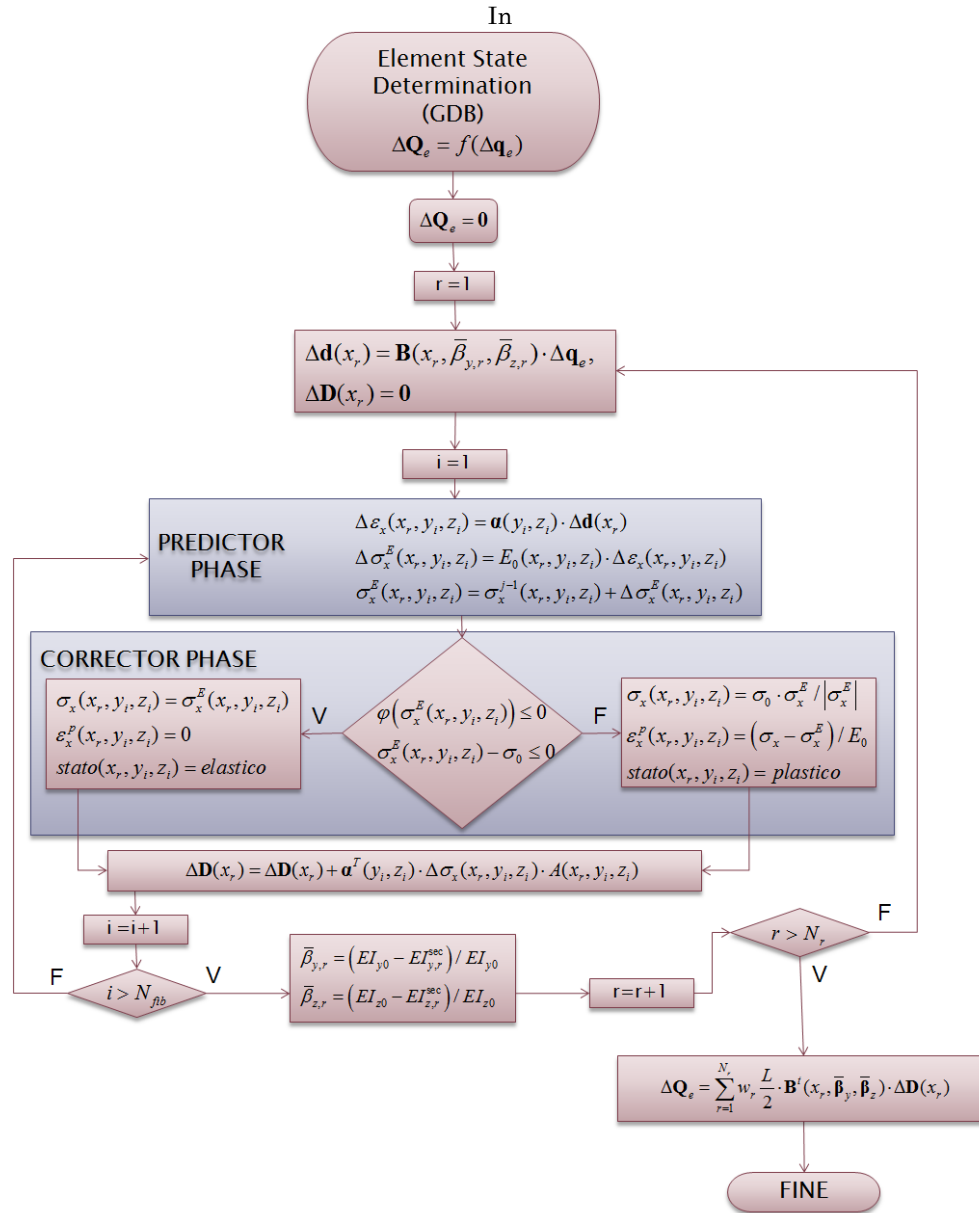


Figura 44 è riportato il diagramma di flusso relativo alla procedura adottata.

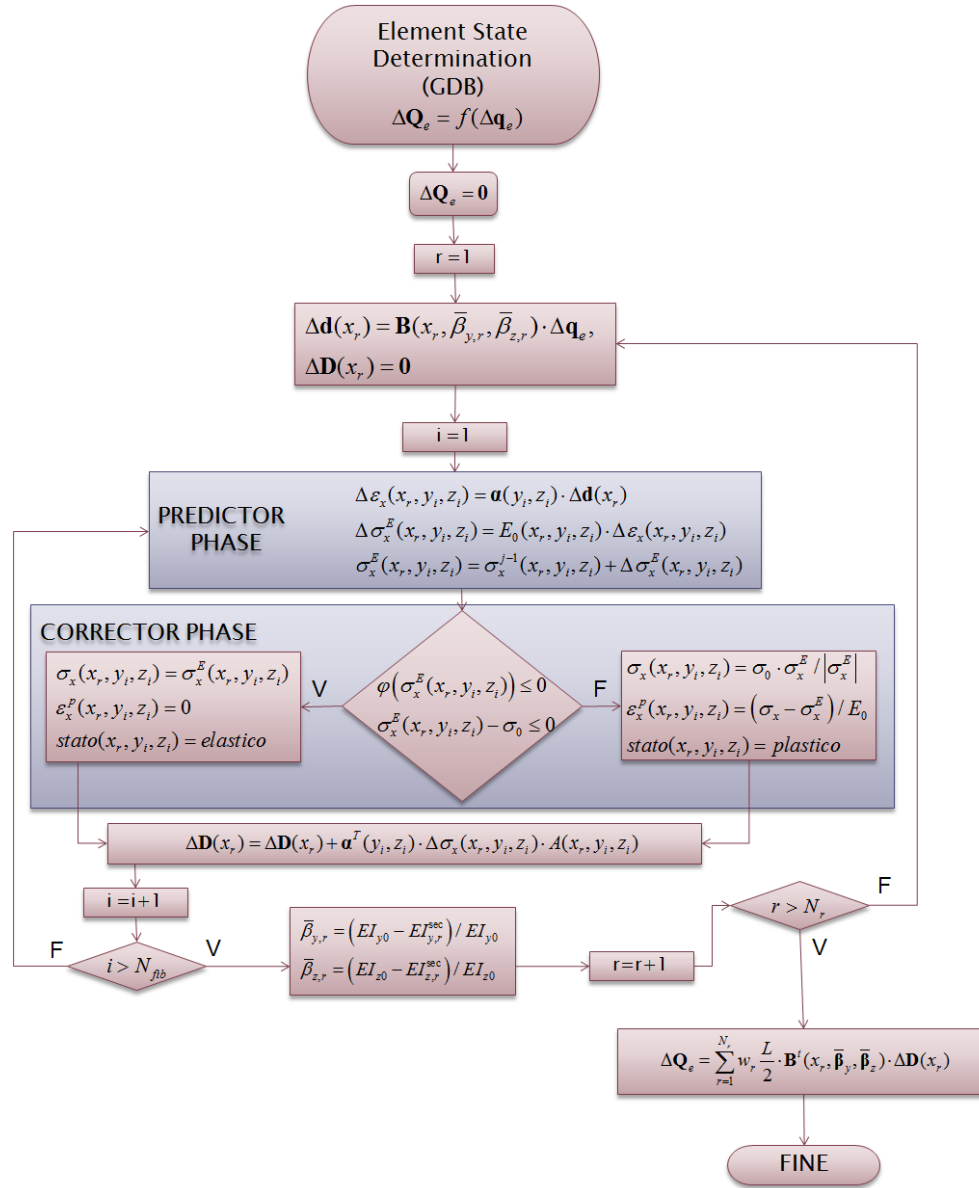


Figura 44 – Diagramma di flusso dell'Element State Determination dell'elemento finito proposto

Capitolo 5

APPLICAZIONI NUMERICHE

5.1 Premessa

In questo capitolo si riportano alcuni esempi applicativi dell'elemento finito proposto GDB. I risultati ottenuti vengono confrontati con quelli ottenuti attraverso elementi finiti DB e FB già implementati nei software ADINA, SeismoStruct e OpenSees.

Le prime applicazioni sono relative ad una trave a mensola costituito da materiale elastico perfettamente plastico le cui caratteristiche sono riportate in tabella 5.1. La trave si assume caricata in corrispondenza dell'estremo libero. Le applicazioni successive sono relative ad un semplice telaio piano costituito dallo stesso materiale elasto-plastico considerato per la mensola e soggetto ad una distribuzione costante di carichi verticali e azioni orizzontali crescenti fino alla condizione di incipiente collasso. Tali applicazioni sono orientate ad effettuare una prima validazione del modello proposto mediante analisi statiche non lineari su modelli semplici ma sufficientemente rappresentativi.

.

Tabella 5.1 – Parametri meccanici del legame costitutivo

E_0	σ_0
[MPa]	[MPa]
37439	17.43

Legenda:

E_0 = modulo di Young; σ_0 = tensione al limite elastico.

5.2 Trave a mensola

La prima applicazione è relativa ad una trave a mensola avente sezione rettangolare 30x50 cm e lunghezza $L=3.00\text{m}$, soggetta ad un carico applicato all'estremo libero fino al raggiungimento della condizione di incipiente collasso. Nella modellazione che utilizza l'elemento finito proposto GDB, sono stati implementati due tipi di modelli con differente discretizzazione: il primo indicato con la sigla M1-GDB prevede la modellazione delle trave con un solo elemento finito, il secondo indicato con la sigla M2-GDB considera una discretizzazione associata all'utilizzo di 2 elementi finiti. Ciascun elemento presenta 7 sezioni di controllo localizzate in corrispondenza dei punti di integrazione di Gauss-Lobatto. Ciascuna sezione, a sua volta, è discretizzata in 8×34 fibre ed il legame costitutivo associato ad ogni fibra è assunto elastico perfettamente plastico ($E=37439\text{ MPa}$, $\sigma_0 = 17.43\text{ MPa}$).

I risultati numerici sono stati confrontati con quelli ottenuti mediante modelli basati su elementi finiti trave tradizionali DB, implementati nei codici di calcolo commerciali ADINA e SeismoStruct, nonché attraverso modelli basati su elementi finiti FB presenti nei codici di calcolo OpenSees e SeismoStruct. Per tutti i modelli sono state condotte analisi statiche non lineari incrementali facendo crescere monotonicamente il carico applicato.

Nei successivi sottoparagrafi si riportano i risultati ottenuti nei diversi approcci. I primi risultati, riportati nel successivo sottoparagrafo, sono relativi ad un applicazione in ADINA coerente con un approccio agli spostamenti classico, basato sulla discretizzazione mediante i polinomi cubici di Hermite.

5.2.1 ADINA – modelli DB

Le analisi numeriche condotte con il codice ADINA sono state eseguite impiegando l'elemento finito “nonlinear elasto-plastic beam element” in cui viene adottato il metodo di integrazione numerica di Newton-Cotes. Sono stati utilizzati tre diversi livelli di discretizzazione. Nel modello

A1-DB5 la trave viene modellata con un solo elemento finito in cui sono presenti 5 sezioni di controllo localizzate in corrispondenza dei punti di integrazione del metodo di Newton-Cotes.

Nel modello A1-DB7 la trave viene modellata ancora con un solo elemento finito in cui sono presenti 7 sezioni di controllo.

Il modello A10-DB5 è relativa ad una discretizzazione accurata in cui la trave viene discretizzata in 10 elementi finiti e ciascun elemento finito presenta 5 sezioni di controllo.

Il legame costitutivo della sezione è stato assegnato fornendo le coppie di valori che mettono in relazione le caratteristiche della sollecitazione con le deformazioni generalizzate. Tali coppie di valori sono state ottenute attraverso un'analisi momento-curvatura della sezione della trave per vari valori di sforzo normale attraverso una discretizzazione per fibre coerente con quella adottata nella modellazione proposta.

Nelle seguenti figure si riportano i grafici della risposta dei diversi modelli considerati. La risposta è espressa in termini di (a) spostamento, (b) curvatura, (c) curvatura plastica e (d) momento flettente.

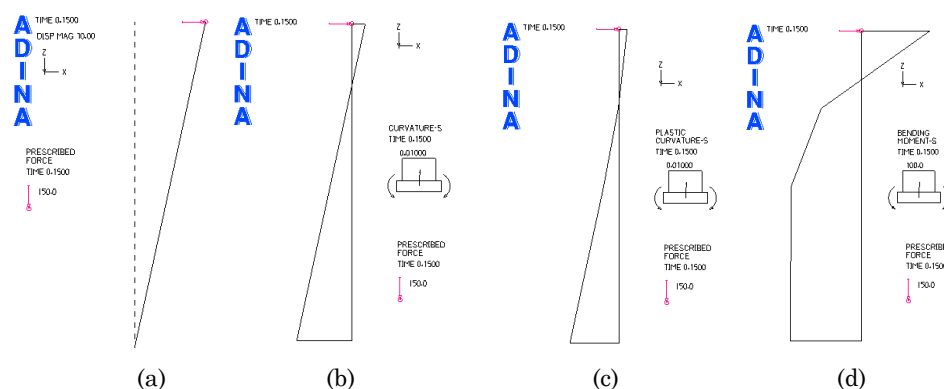


Figura 45 – ADINA: modello A1-DB. Risposta della trave modellata con un elemento finito DB 5 sezioni di controllo ($\lambda=0.15$): (a) spostamento, (b) curvatura, (c) curvatura plastica, (d) momento.

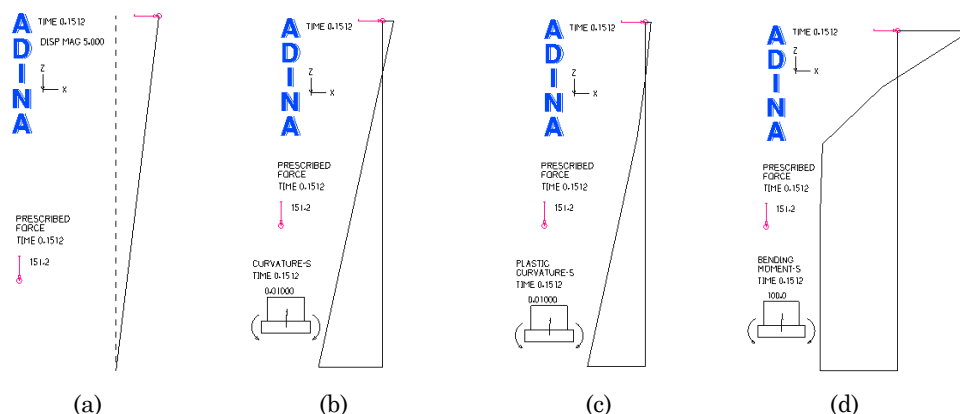


Figura 46 – ADINA: modello A1-DB7. Risposta della trave modellata con un elemento finito DB 7 sezioni di controllo ($\lambda=0.15$): (a) spostamento, (b) curvatura, (c) curvatura plastica, (d) momento.

Le figure 45 e 46 sono relative ad una discretizzazione basata sull'utilizzo di un solo elemento finito, vi è assoluta evidenza dell'inaccuratezza della soluzione. Il diagramma del momento flettente è palesemente errato ed inoltre l'elemento prevede una distribuzione di curvatura plastica per tutta la lunghezza, contro l'evidenza fisica. Dai risultati ottenuti, peraltro ben noti nella letteratura, emerge con assoluta evidenza che operando con l'approccio Displacement Based classico non è accettabile la discretizzazione che prevede l'utilizzo di un solo elemento.

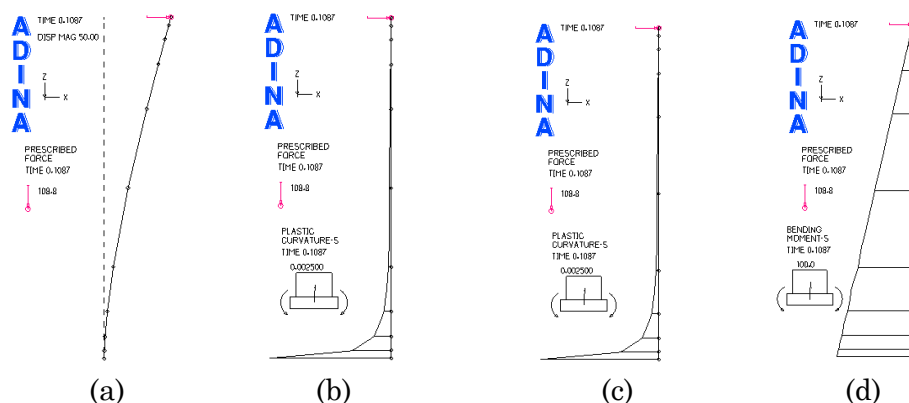


Figura 47 – ADINA: modello A10-DB. Risposta della trave modellata con 10 elementi finiti DB ($\lambda=0.1087$): (a) spostamento, (b) curvatura, (c) curvatura plastica, (d) momento.

In figura 47 si riporta la risposta del modello ADINA, denominato A10-DB5, in cui la trave viene discretizzata con 10 elementi finiti DB. In questo caso i risultati hanno raggiunto un grado di accuratezza accettabile ai fini ingegneristici, il diagramma del momento flettente risulta pressochè lineare e si riscontrano sensibili aumenti nel diagramma delle curvature in corrispondenza delle sezioni in cui si ha la diffusione della plasticità.

5.2.2 SeismoStruct – modelli DB e FB

Le analisi numeriche condotte con il codice SeismoStruct sono state eseguite impiegando l'elemento finito "Inelastic frame elements - infrmDB", formulato in termini di spostamenti secondo Hellebrand and Scordelis (1981) e Mari and Scordelis (1984), in cui viene adottato il metodo di integrazione numerica di Gauss-Lobatto.

Nel modello SS1-DB5 la trave viene modellata con un solo elemento finito in cui sono presenti 5 sezioni di controllo localizzate in corrispondenza dei punti di integrazione del metodo di Gauss-Lobatto.

Nel modello SS1-FB7 la trave viene modellata con un solo elemento finito "Inelastic frame elements - infrmFB" formulato in termini di forze secondo Spacone et al. (1996), in cui sono presenti 7 sezioni di controllo localizzate in corrispondenza dei punti di integrazione del metodo di Gauss-Lobatto.

In tutti i modelli ogni sezione di controllo viene modellata mediante discretizzazione a fibre ed il legame costitutivo delle fibre è elastico-perfettamente plastico. I parametri che caratterizzano questo legame costitutivo sono riportati nel § 5.2.

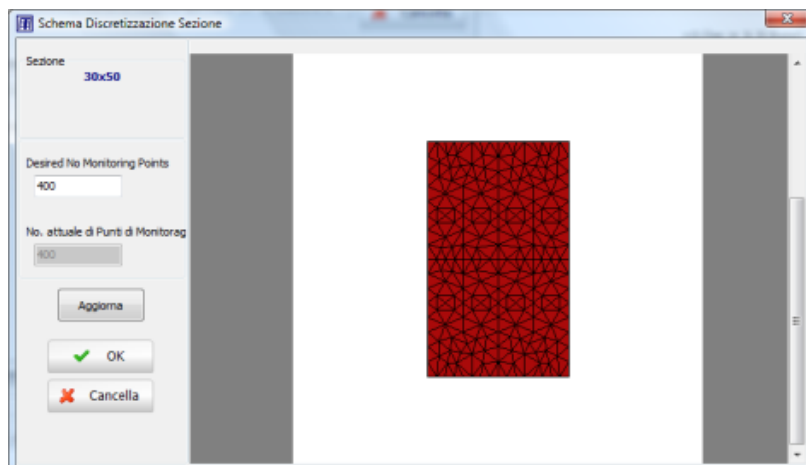


Figura 48 – SeismoStruct: discretizzazione in fibre delle sezioni di controllo

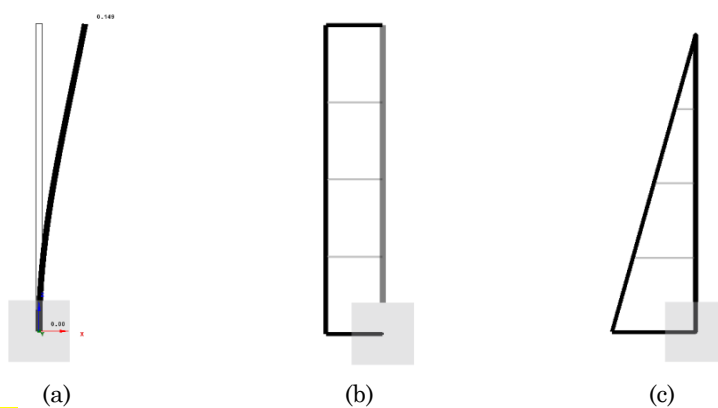


Figura 49 – SeismoStruct: modello SS1-DB5 ($\lambda=0.125$): risposta in termini di (a) spostamenti, (b) sforzo di taglio e (c) momento flettente

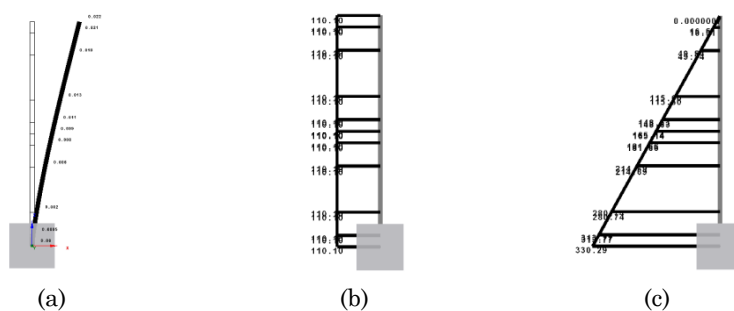


Figura 50 – SeismoStruct: modello SS10-DB5 ($\lambda=0.110$): risposta in termini di (a) spostamenti, (b) sforzo di taglio e (c) momento flettente

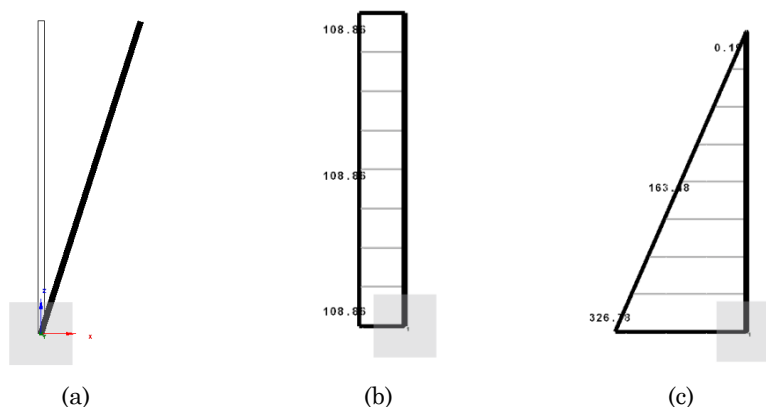


Figura 51 – SeismoStruct: modello SS1-FB7 ($\lambda=0.10865$): risposta in termini di (a) spostamenti, (b) sforzo di taglio e (c) momento flettente

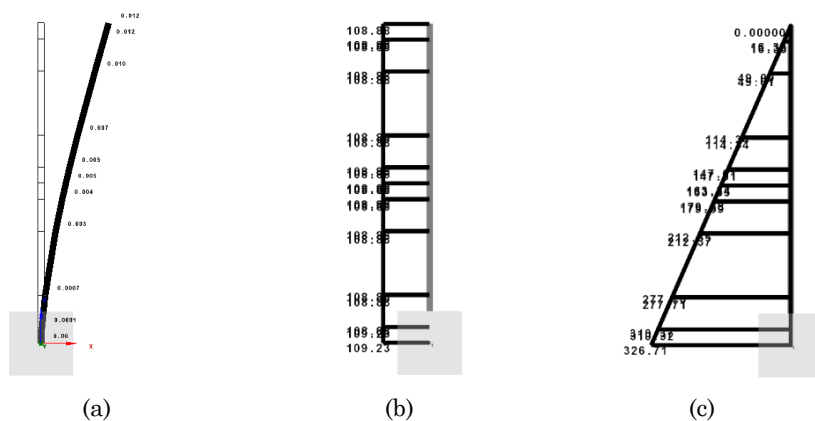


Figura 52 – SeismoStruct: modello SS10-FB7: risposta in termini di (a) spostamenti, (b) sforzo di taglio e (c) momento flettente ($\lambda=0.109232$).

Occorre rilevare che l'approccio agli spostamenti operato in SeismoStruct con l'adozione di un solo elemento restituisce un diagramma dei momenti lineare, a differenza dell'ADINA, tuttavia i confronti riportati nel seguito tra i diversi approcci evidenziano l'inaccuratezza in termini di carico ultimo.

5.2.3 OpenSees – modello FB

In questo paragrafo si riportano i risultati delle analisi numeriche condotte con il codice di calcolo OpenSees in cui è stato impiegato l'elemento finito “Nonlinear Beam Column Element” formulato in termini di forze in accordo all'approccio proposto da Neuenhofer and Filippou (1997), che presenta il vantaggio di non richiedere ulteriori iterazioni associate alla ‘fase element state determination’.

Nei modelli OS1-FB5 e OS1-FB7 la trave viene modellata con un solo elemento finito in cui sono presenti rispettivamente 5 e 7 sezioni di controllo localizzate in corrispondenza dei punti di integrazione del metodo di Gauss-Lobatto. Ogni sezione di controllo viene modellata mediante discretizzazione a fibre ed il legame costitutivo delle fibre è elastico-perfettamente plastico. I parametri che caratterizzano questo legame costitutivo sono riportati nel § 5.2.

I risultati sono riportati nelle figure 53 e 54.

E' interessante rilevare come in entrambe le discretizzazioni l'elemento riesce a cogliere concentrazioni di curvatura in corrispondenza delle zone soggette a plasticizzazione.

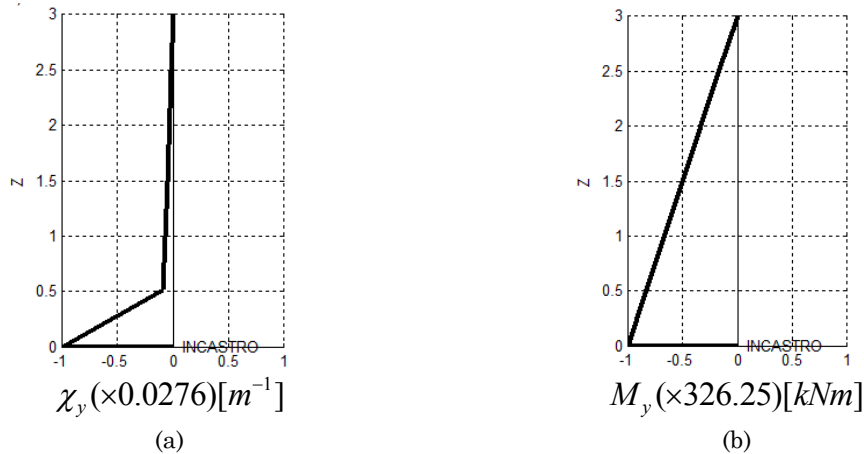


Figura 53 – OpenSees: modello OS1-FB5 ($\lambda=0.10875$): risposta in termini di (a) curvatura, (b) momento.

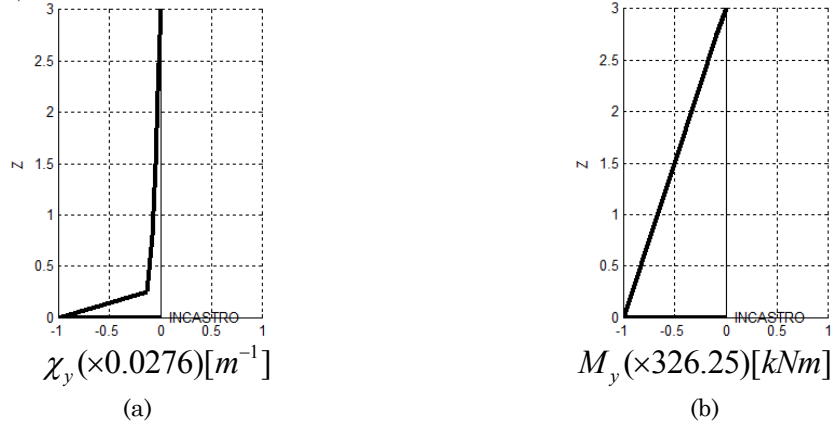


Figura 54 – OpenSees: modello OS1-FB7 ($\lambda=0.10875$): risposta in termini di (a) curvatura, (b) momento flettente.

5.2.4 Elemento finito GDB

Nelle successive figure sono riportati i risultati ottenuti con l'approccio proposto GDB. Sono stati implementati due tipi di modelli con differente discretizzazione: il primo indicato con la sigla M1-GDB prevede la modellazione delle trave con un solo elemento finito, il secondo indicato con la sigla M2-GDB considera una discretizzazione associata all'utilizzo di 2 elementi finiti. Ciascun elemento presenta 7 sezioni di controllo localizzate in corrispondenza dei punti di integrazione di Gauss-Lobatto. Ciascuna sezione, a sua volta, è discretizzata in 8×34 fibre ed il legame costitutivo associato ad ogni fibra è assunto elastico perfettamente plastico ($E=37439$ MPa, $\sigma_0 = 17.43$ MPa). La figura 55 riporta i risultati in termini di (a) spostamento, (b) momento flettente, (c) curvatura. Inoltre la figura 55 (d) riporta le variazioni del parametro beta, in condizioni di incipiente collasso, indicative delle variazioni di rigidezza locale dell'elemento in corrispondenza dei ritenuti conci rappresentati dalle corrispondenti sezioni di controllo. E' interessante notare come il metodo proposto restituisca una sorta di trave equivalente al collasso che può ritenersi indicativa di uno stato di danneggiamento indotto, un'ulteriore immagine dello stato dell'elemento è riportata in figura 57 in cui si utilizza una scala di colore. In figura 56 si riportano alcuni

snapshoot relativi alle variazioni delle funzioni di forma durante il processo di carico.

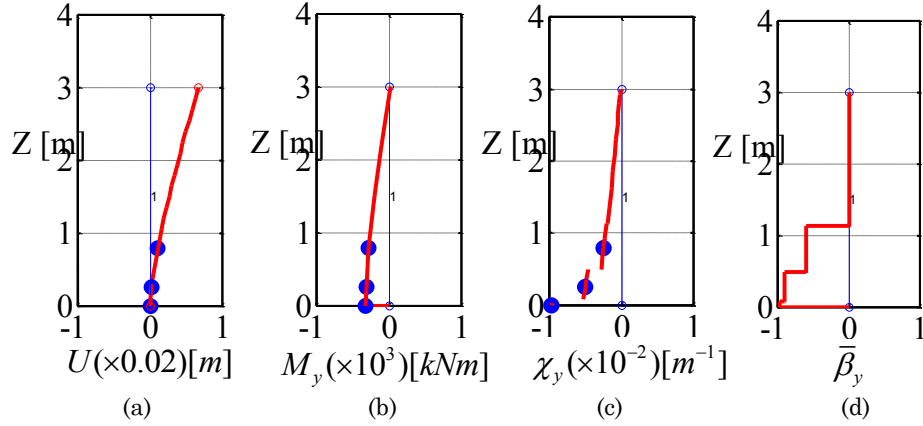


Figura 55 – Modello M1-GDB7 ($\lambda=0.11$), in blu le sezioni di controllo in cui si sono manifestate plasticizzazioni: (a) spostamenti, (b) momenti flettenti, (c) curvature, (d) intensità della discontinuità nelle curvature.

Le figure 58, 59 e 60 riportano rispettivamente le tensioni, le deformazioni totali e le deformazioni plastiche relative alle modellazioni con un solo elemento finito.

I risultati relativi all'utilizzo di due elementi finiti sono riportati nelle figure successive, si riscontra un piccolo miglioramento nell'accuratezza della soluzione. E' interessante osservare come l'elemento proposto, con approccio agli spostamenti, riesce a cogliere con sufficiente accuratezza la risposta del sistema anche attraverso l'adozione di un unico elemento finito.

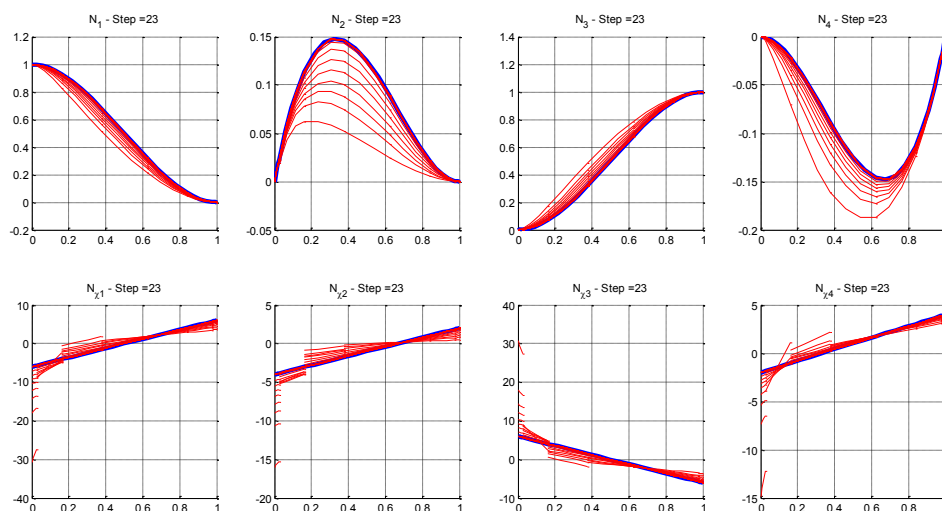


Figura 56 – Modello M1-GDB7, funzioni di forma ai vari step di carico.

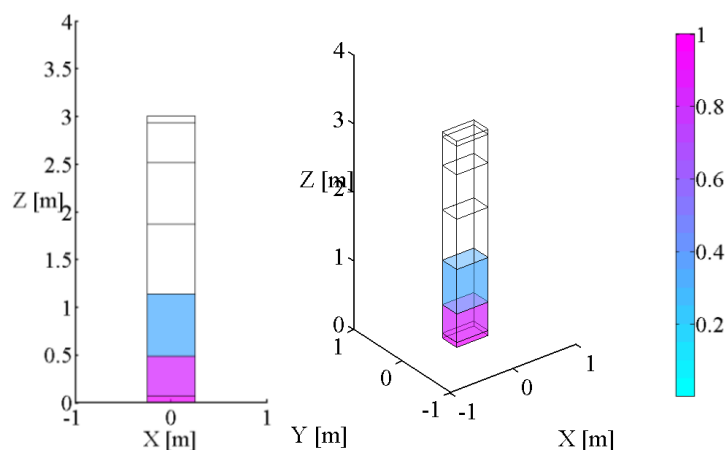


Figura 57 – Modello M1-GDB7 ($\lambda=0.11$): intensità della discontinuità $\bar{\beta}_y$

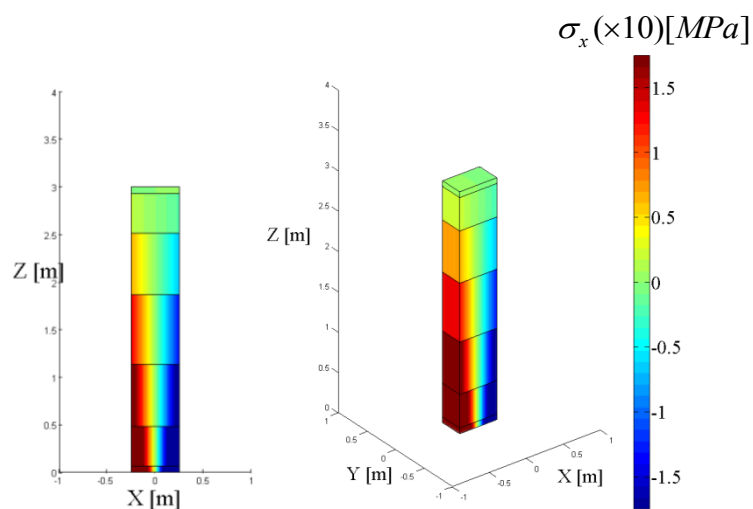


Figura 58 – Modello M1-GDB7 ($\lambda=0.11$): tensioni longitudinali ($\sigma_0 = 17.43 \text{ MPa}$)

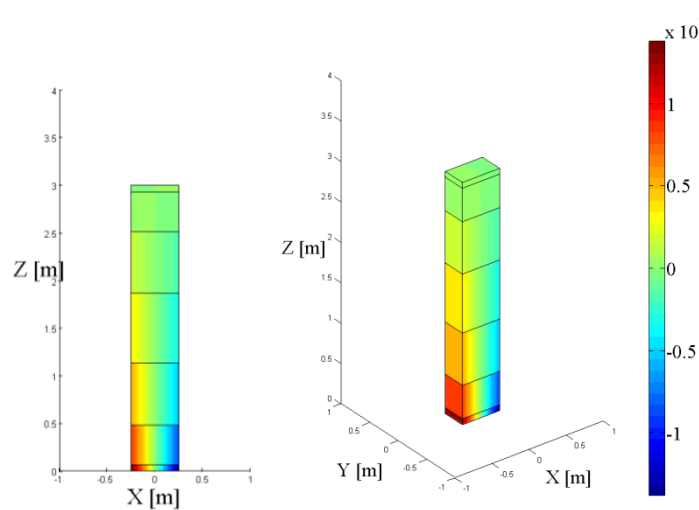


Figura 59 – Modello M1-GDB7 ($\lambda=0.11$): deformazioni longitudinali ϵ_x

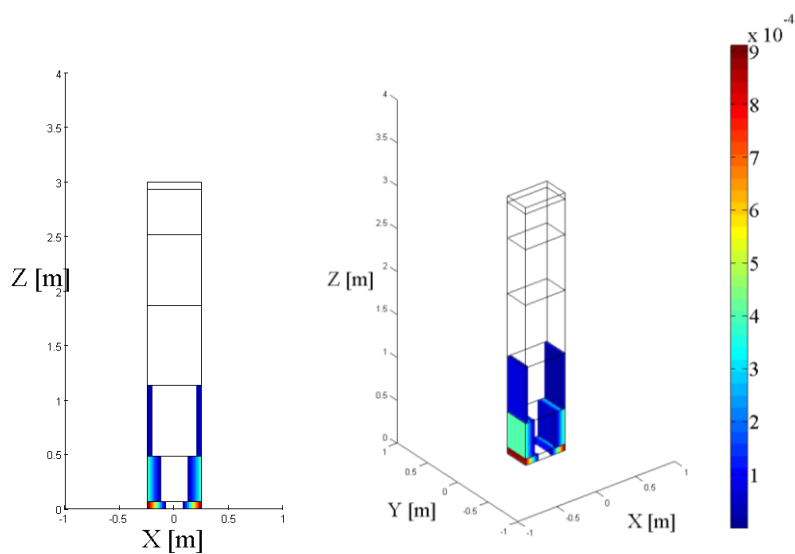


Figura 60 – Modello M1-GDB7 ($\lambda=0.11$): deformazioni plastiche ε_x^{pl}

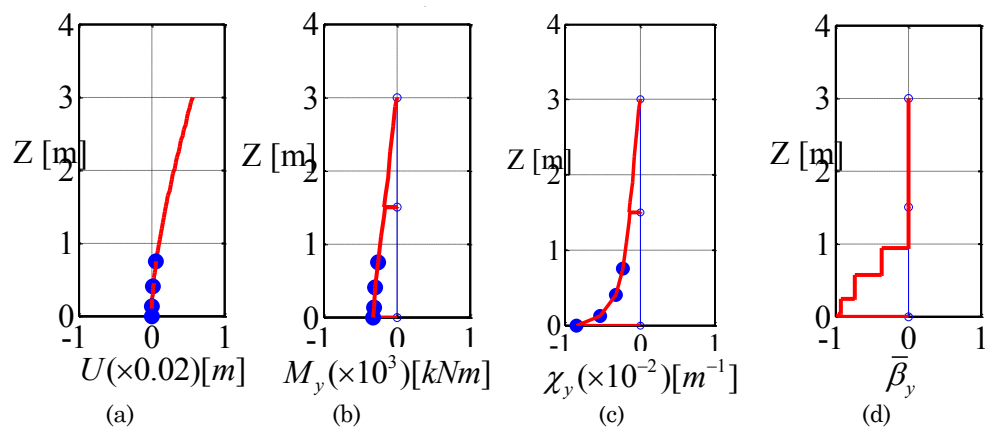


Figura 61 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=0.11$), in blu le sezioni di controllo in cui si sono manifestate plasticizzazioni: (a) spostamenti, (b) momenti flettenti, (c) curvature, (d) intensità della discontinuità nelle curvature.

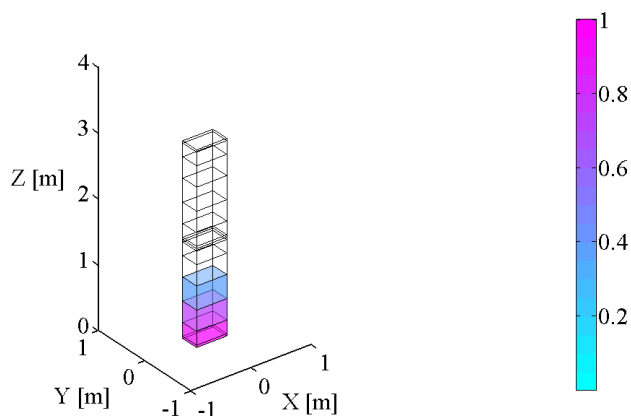


Figura 62 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=0.11$): intensità delle discontinuità $\bar{\beta}_v$

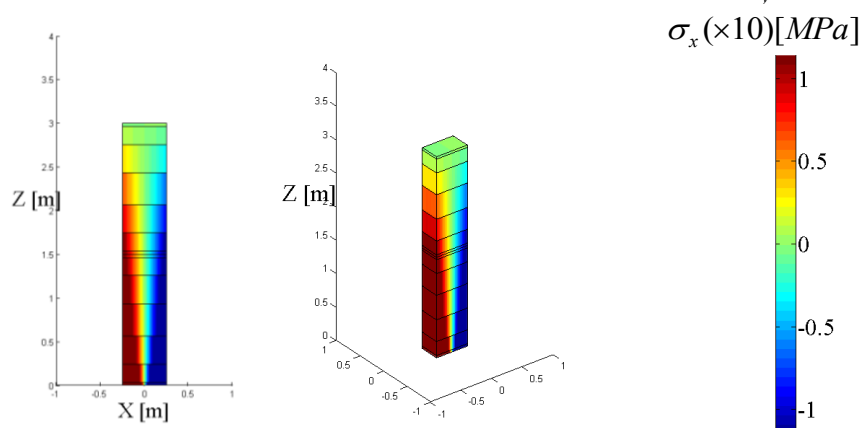


Figura 63 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=0.11$): tensioni longitudinali ($\sigma_0 = 17.43 \text{ MPa}$)

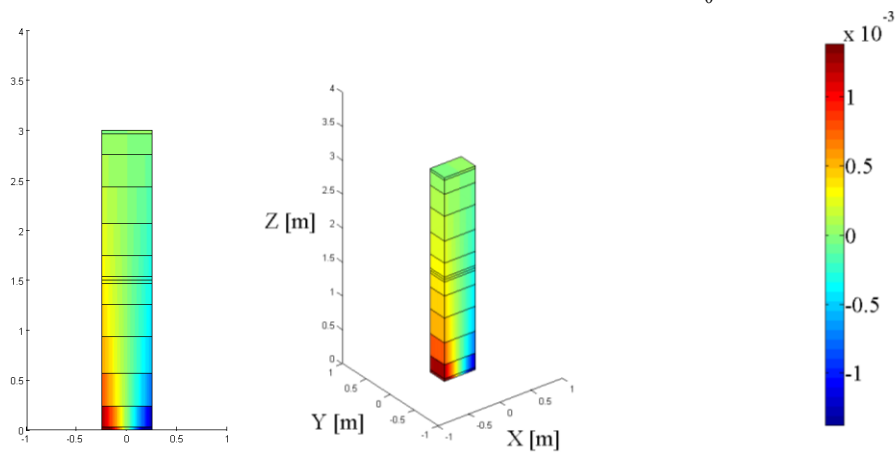


Figura 64 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=0.11$): deformazioni longitudinali

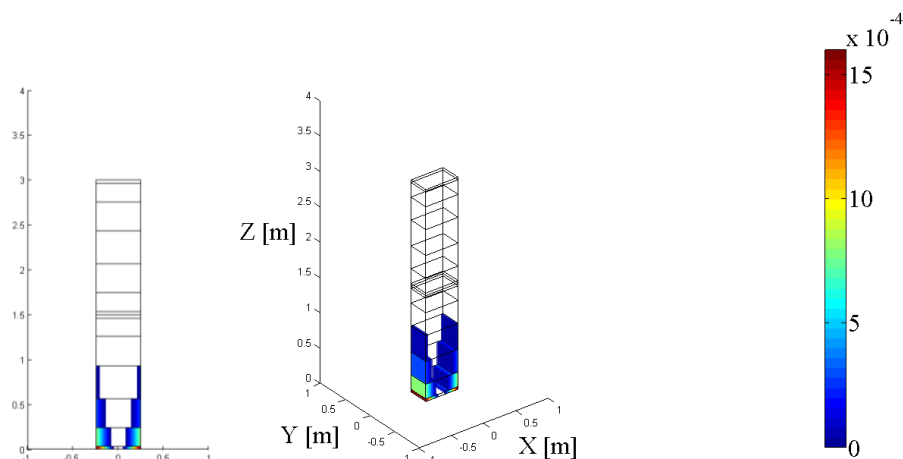


Figura 65 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=0.11$): deformazioni plastiche ε_x^{pl}

5.2.5 Curve di capacità

Un ulteriore confronto tra le diverse modellazioni adottate è riportato, nel presente paragrafo, in termini di curve di capacità. Il valore del taglio limite, $V=653.63$ kN, ottenuto dalla condizione di equilibrio al collasso, viene inoltre riportato quale ulteriore parametro utile alla valutazione dell'accuratezza dei risultati ottenuti. Dai grafici si evince che i risultati numerici ottenuti con l'elemento finito GDB sono confrontabili con quelli ottenibili mediante elementi finiti FB. In particolare è sufficiente discretizzare la trave con due elementi finiti GDB (cfr. Figura 67, curva M2-GDB7), per ottenere una risposta quasi sovrapponibile a quella ottenuta mediante un solo elemento finito FB (cfr. Figura 67, curva OS1-FB7).

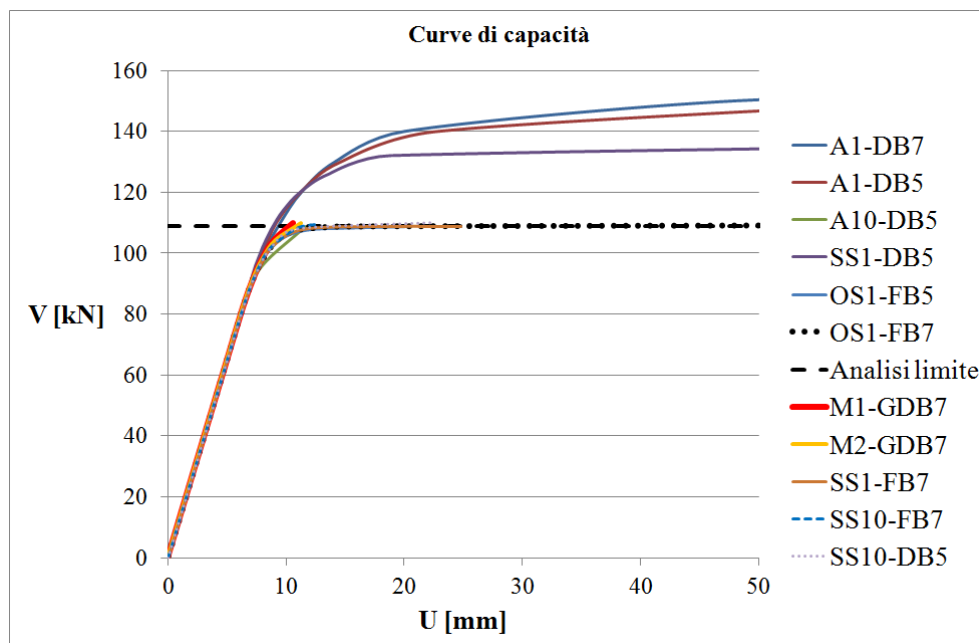


Figura 66 – Curve di capacità

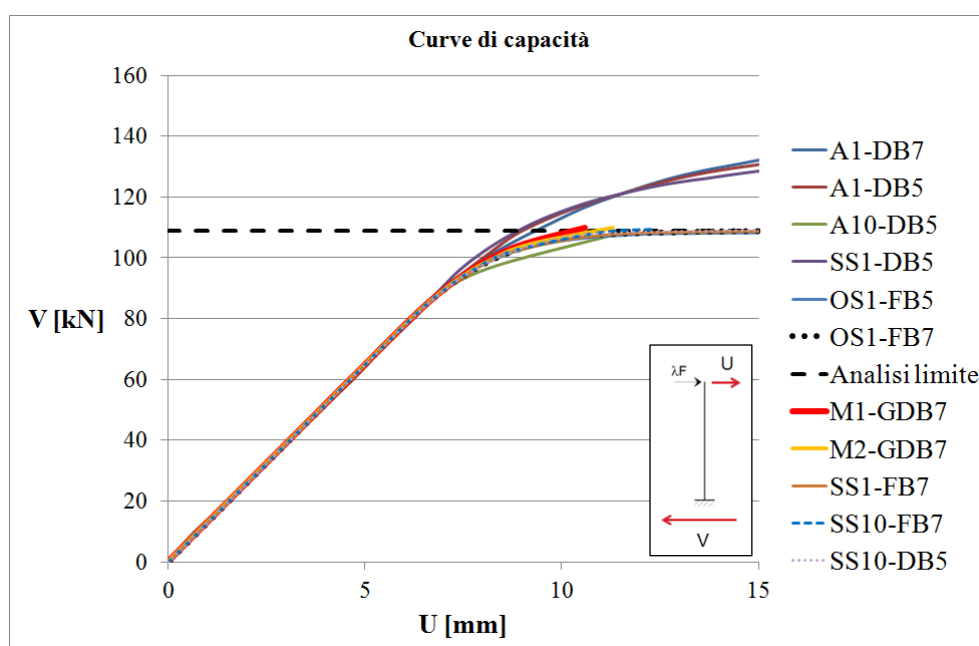


Figura 67 – Dettaglio curve di capacità

5.3 Telaio piano (legame costitutivo EPP)

La seconda modellazione è relativa ad un telaio piano composto da pilastri e travi aventi sezione rettangolare 30x50 cm e lunghezza $L=3.00\text{m}$ e $L=4.00\text{m}$ rispettivamente, soggetta a due carichi concentrati applicate alle estremità delle travi di piano, ciascuna di intensità pari a $F=1000\text{kN}$ (Figura 68). Il telaio è stato modellato mediante l'elemento finito proposto GDB. In particolare sono stati implementati due tipi di modelli: il primo indicato con la sigla M1-GDB7 prevede la modellazione delle travi e dei pilastri con un solo elemento finito, il secondo indicato con la sigla M2-GDB7 modella ciascuna trave e ciascun pilastro con 2 elementi finiti. In entrambi i modelli ciascun elemento finito presenta 7 sezioni di controllo localizzate in corrispondenza dei punti di integrazione di Gauss-Lobatto. Ciascuna sezione, a sua volta, è discretizzata in 8x34 fibre ed il legame costitutivo associato ad ogni fibra è elastico perfettamente plastico (EPP) ($E_0=37439\text{ MPa}$, $\sigma_0 = 17.43\text{ MPa}$).

I risultati numerici vengono confrontati con quelli ottenuti mediante modelli basati su elementi finiti trave tradizionali DB, implementati nei codici di calcolo commerciali ADINA e SeismoStruct, nonché attraverso modelli basati su elementi finiti trave FB presenti nei codici di calcolo OpenSees e SeismoStruct. I risultati vengono altresì confrontati con quelli ottenuti tramite l'analisi limite. Per tutti i modelli sono state condotte analisi statiche non lineari incrementali facendo crescere monotonicamente i carichi applicati.

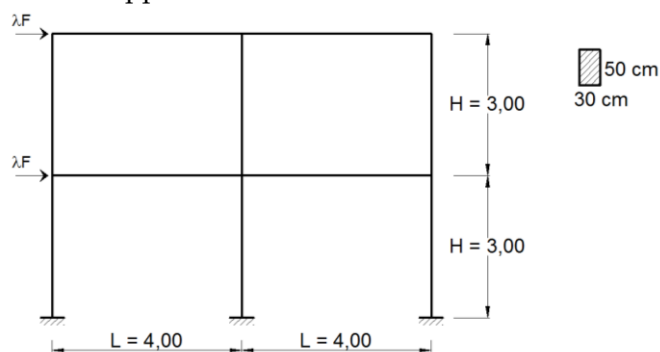


Figura 68 – Caso di studio telaio piano

5.3.1 ADINA – modelli DB

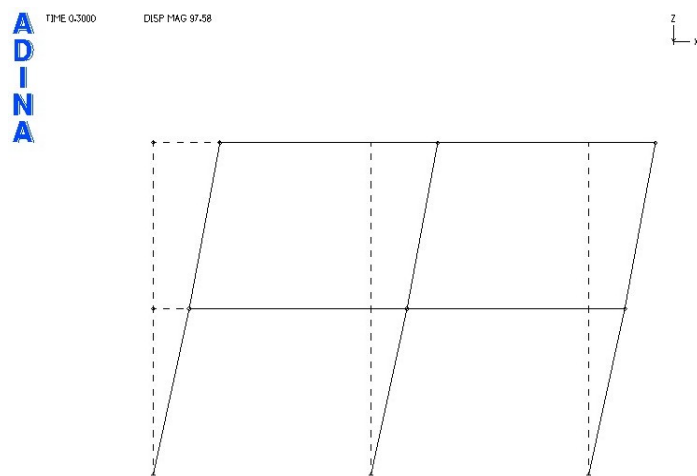


Figura 69 – ADINA, modello A1-DB5 ($\lambda=0.30$): risposta in termini di spostamenti

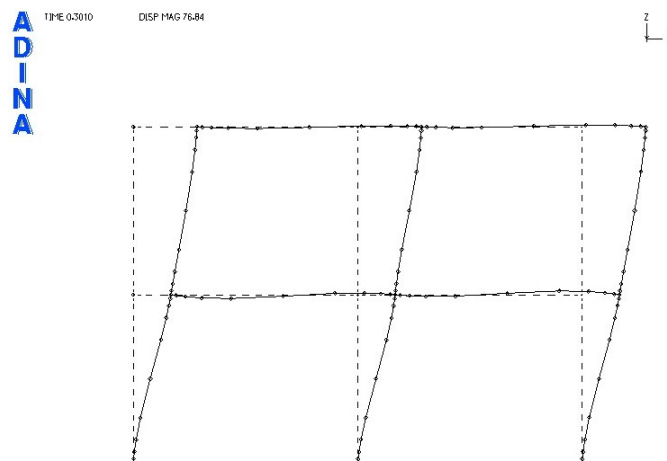
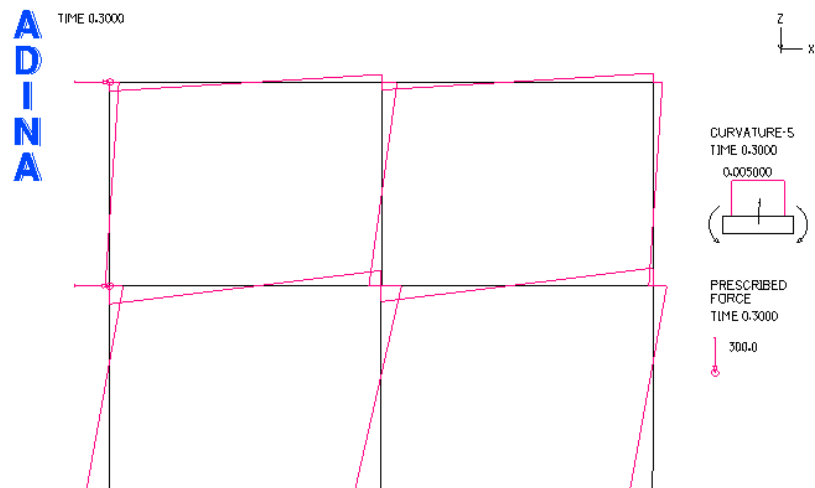
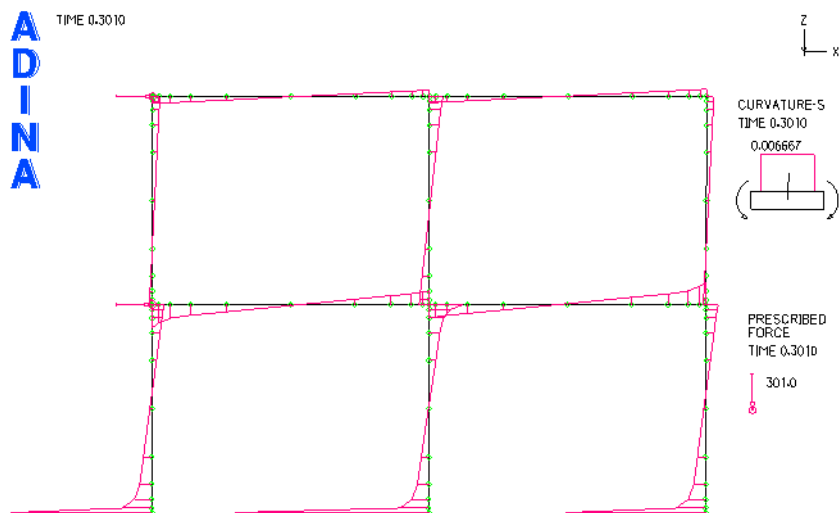


Figura 70 – ADINA, modello A10-DB5 ($\lambda=0.30$): risposta in termini di spostamenti.

Figura 71 – ADINA: modello A1-DB5 ($\lambda=0.30$). Curvature.Figura 72 – ADINA: modello A10-DB5 ($\lambda=0.30$). Curvature.

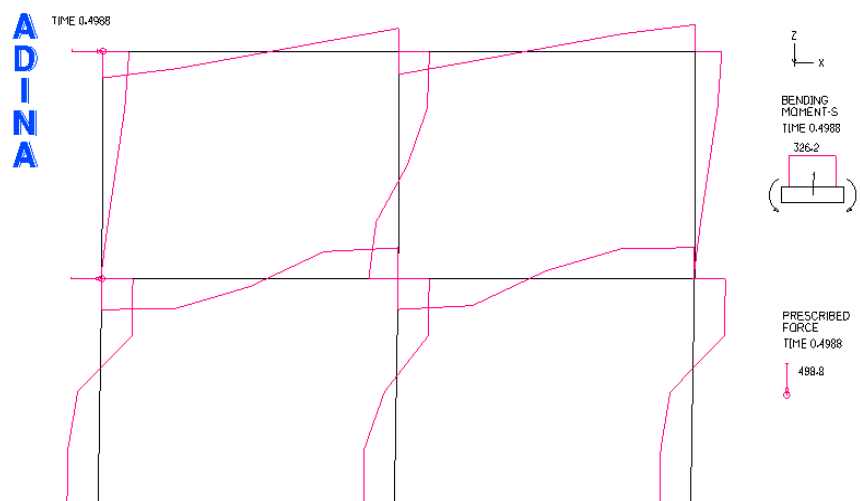


Figura 73 – ADINA: modello A1-DB5 ($\lambda=0.50$). Diagramma del momento flettente.

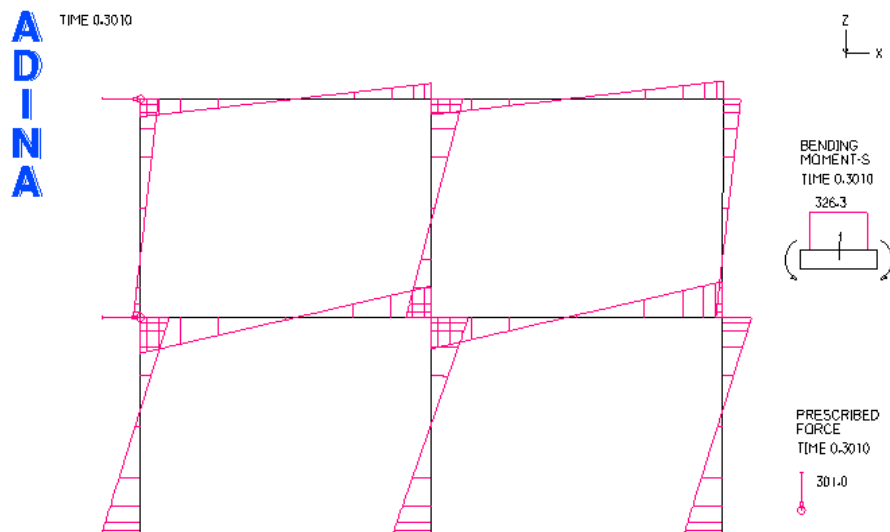


Figura 74 – ADINA: modello A10-DB5 ($\lambda=0.30$). Diagramma del momento flettente.

5.3.2 SeismoStruct – modelli DB e FB

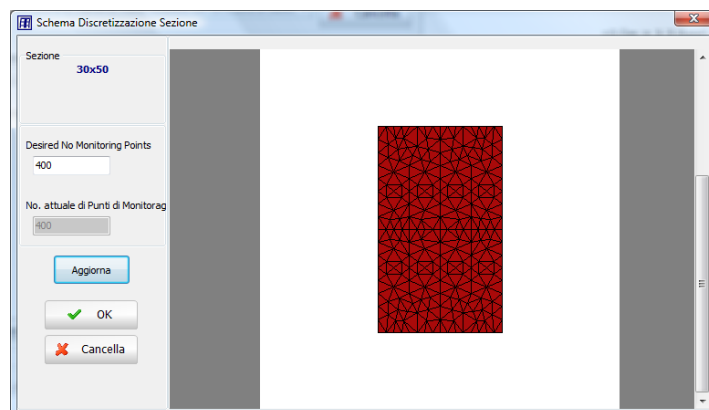


Figura 75 – SeismoStruct, discretizzazione della sezione in fibre

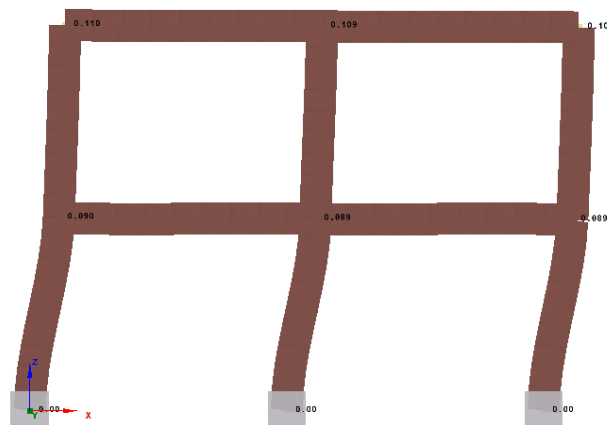


Figura 76 – SeismoStruct, modello SS1-DB5 ($\lambda=0.5539$):
risposta in termini di spostamento

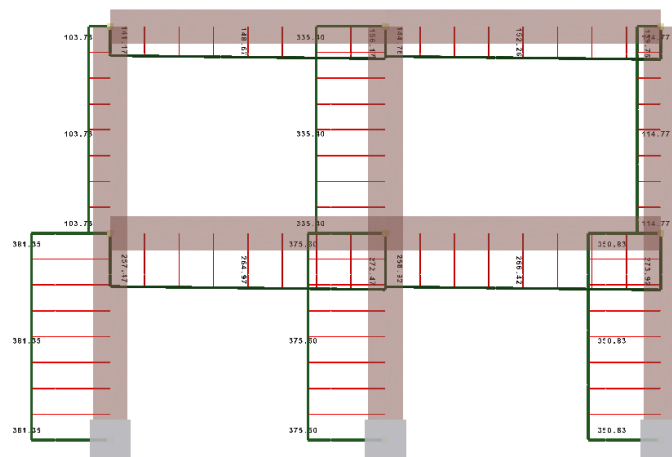


Figura 77 – SeismoStruct, modello SS1-DB5 ($\lambda=0.5539$): sforzo di taglio

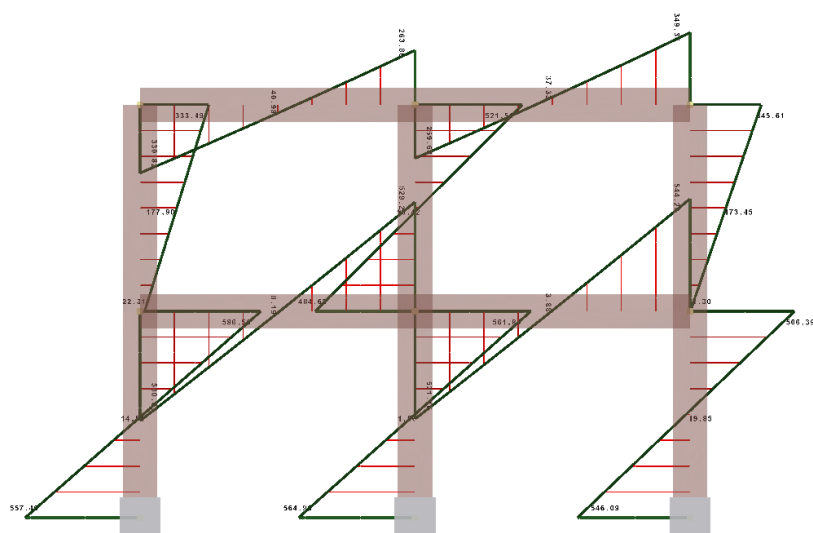


Figura 78 – SeismoStruct, modello SS1-DB5 ($\lambda=0.5539$): momento flettente

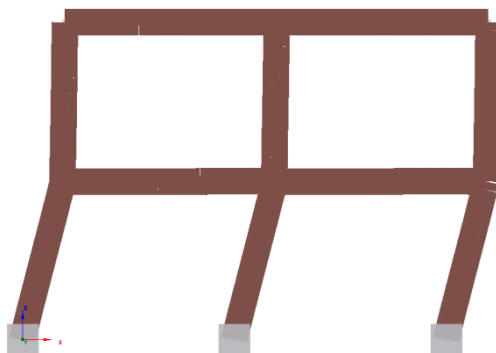


Figura 79 – SeismoStruct, modello SS10-DB5 ($\lambda=0.3332$):
risposta in termini di spostamento

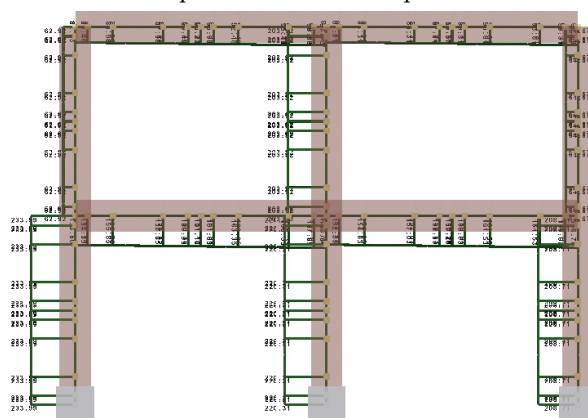


Figura 80 – SeismoStruct, modello SS10-DB5 ($\lambda=0.3332$): sforzo di taglio

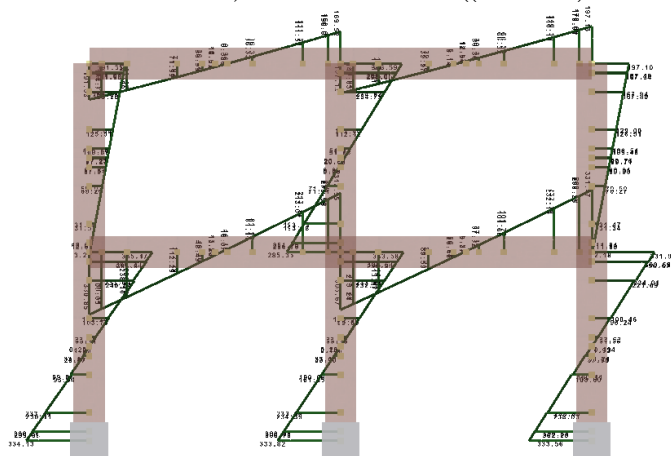
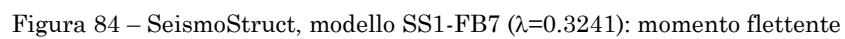
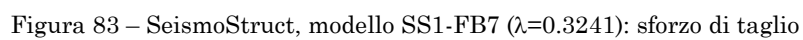
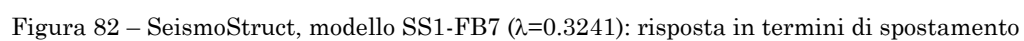


Figura 81 – SeismoStruct, modello SS10-DB5 ($\lambda=0.3332$): momento flettente



5.3.3 OpenSees – modello FB

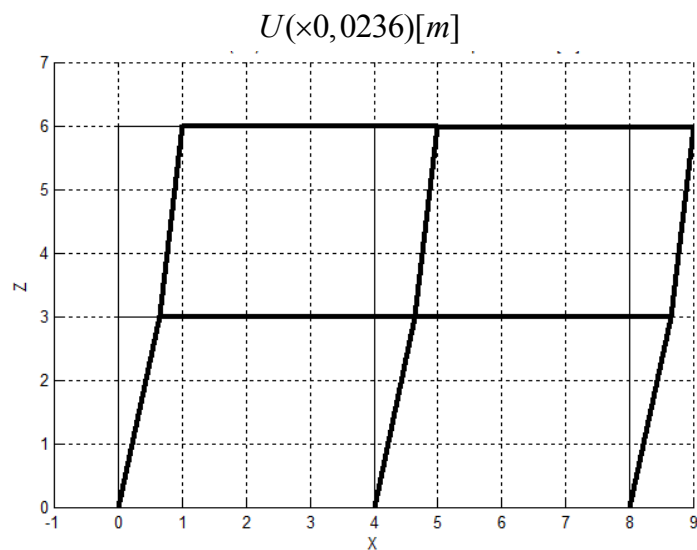


Figura 85 – OpenSees: modello OS1-FB5 ($\lambda=0.32$): risposta in termini di spostamenti.

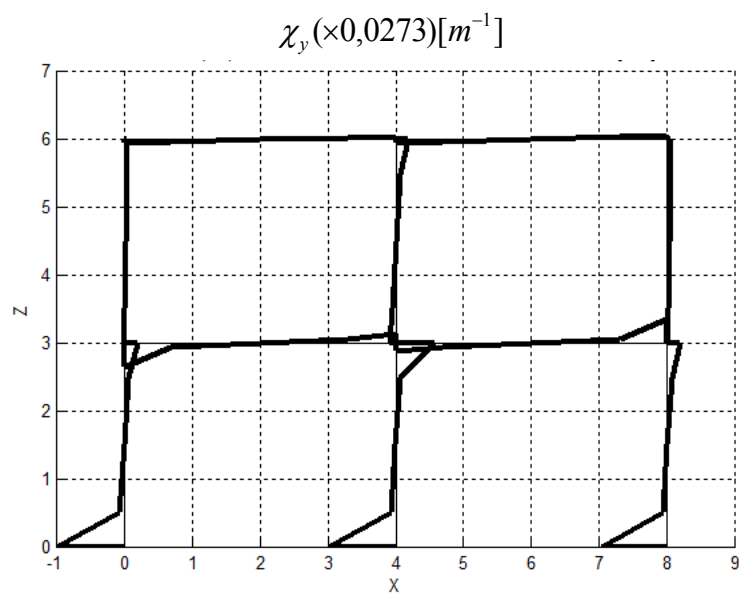


Figura 86 – OpenSees: modello OS1-FB5 ($\lambda=0.32$): risposta in termini di curvature

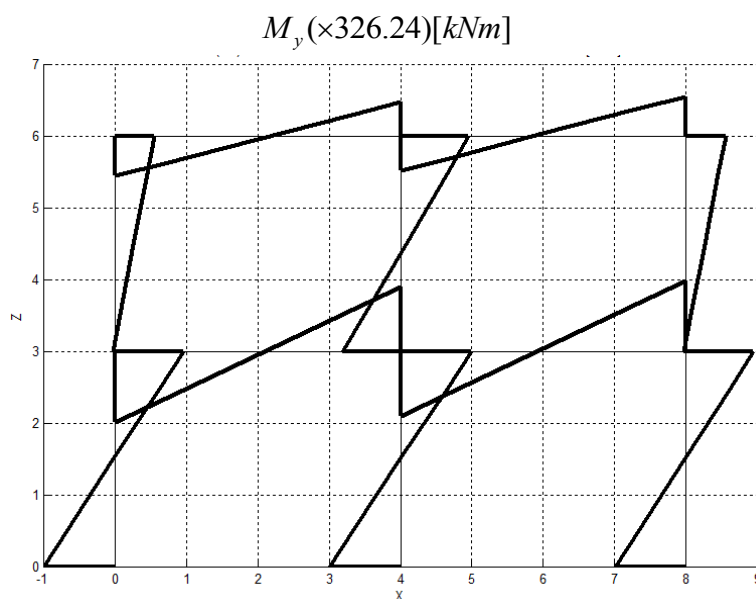


Figura 87 – OpenSees: modello OS1-FB5 ($\lambda=0.32$): momento flettente

5.3.4 Elemento finito proposto GDB

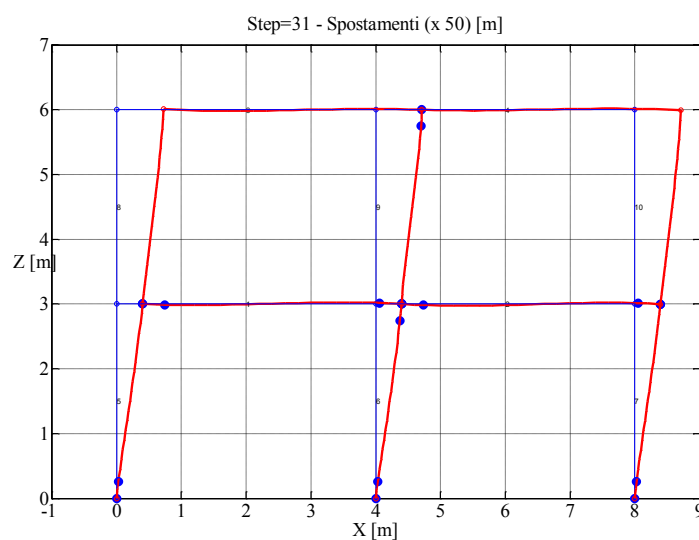


Figura 88 – Elemento finito proposto M1-GDB7 ($\lambda=0.31$): risposta in termini di spostamenti. In blu le sezioni plasticizzate.

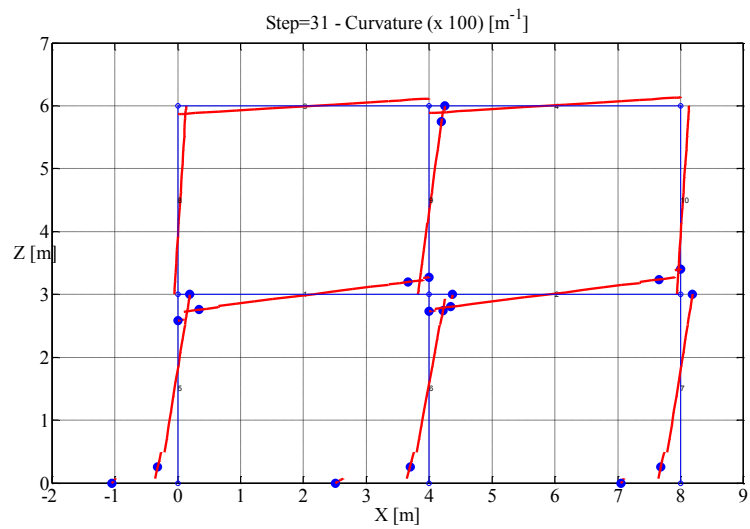


Figura 89 – Modello M1-GDB7 ($\lambda=0.31$): risposta in termini di curvature.
In blu le sezioni plasticizzate.

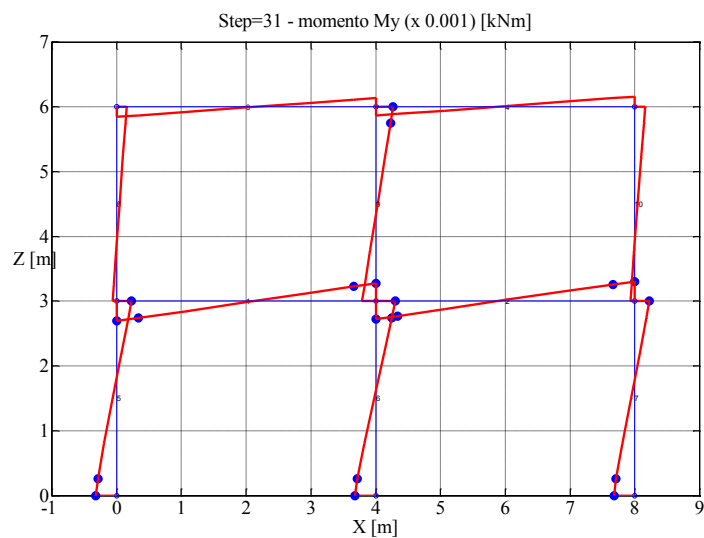


Figura 90 – Modello M1-GDB7 ($\lambda=0.31$): momento flettente.
In blu le sezioni plasticizzate.

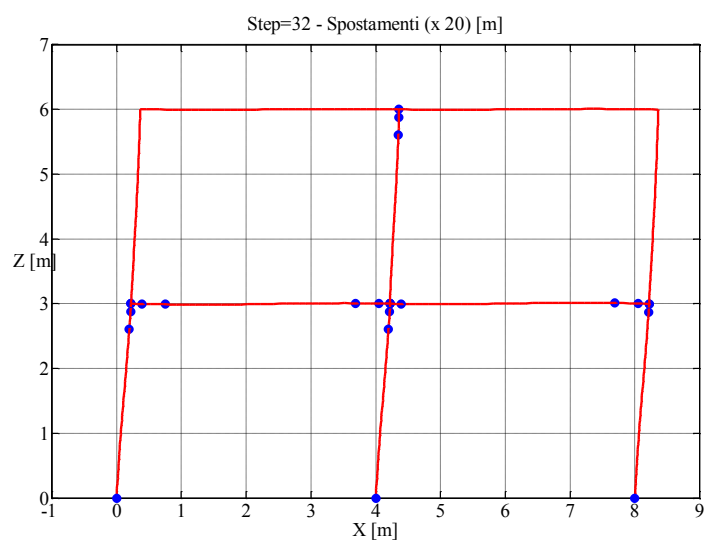


Figura 91 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=0.32$): risposta in termini di spostamenti.
In blu le sezioni plasticizzate.

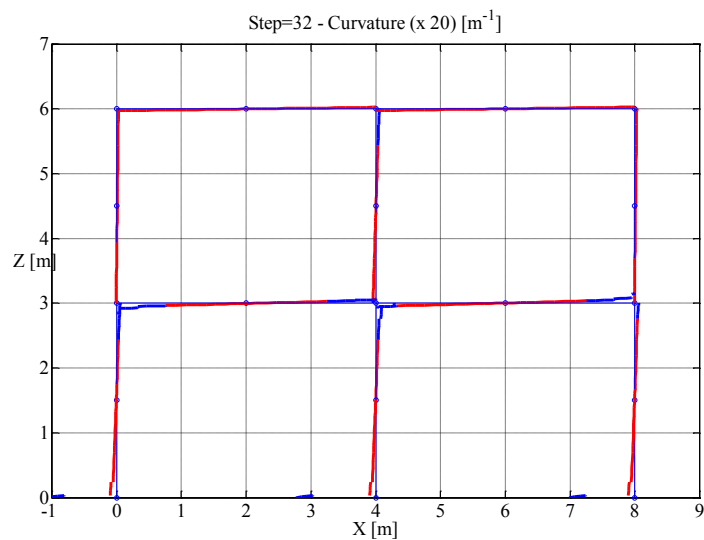


Figura 92 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=0.32$): risposta in termini di curvature.
In blu le zone plasticizzate.

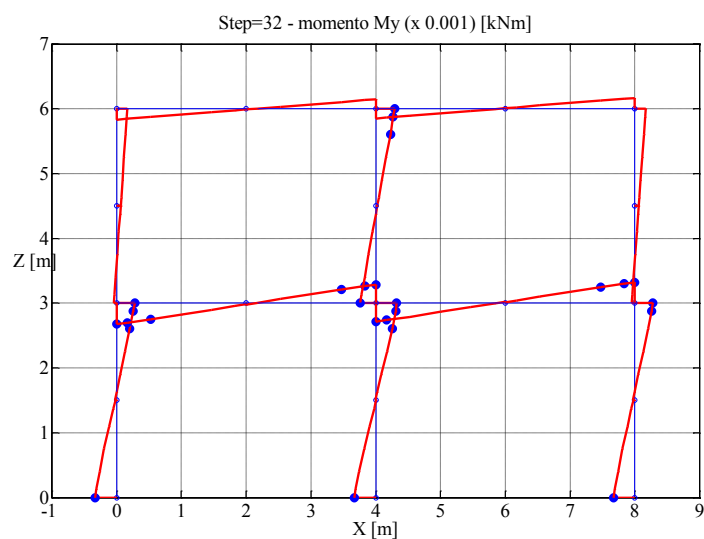


Figura 93 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=0.32$): momento flettente.
In blu le zone plasticizzate.

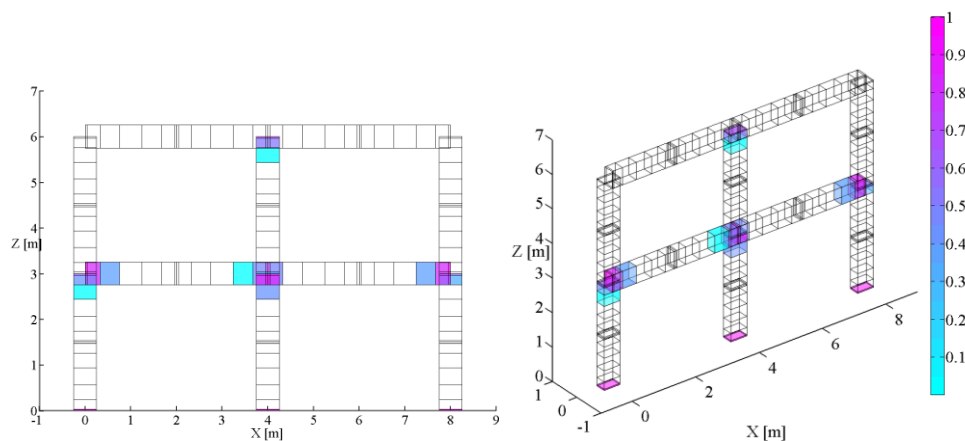


Figura 94 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=0.32$): intensità delle discontinuità

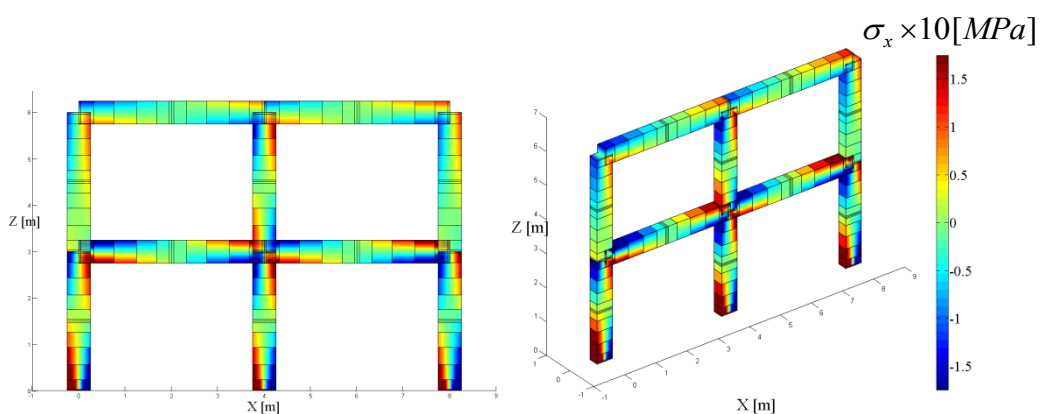


Figura 95 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=0.32$): tensioni nelle fibre.

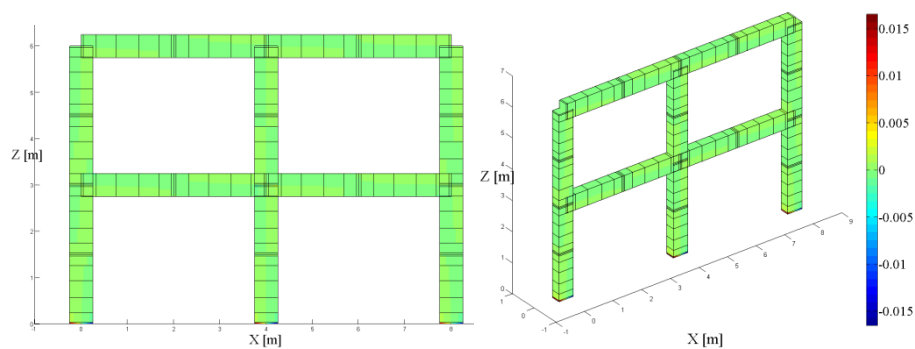


Figura 96 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=0.32$): deformazioni nelle fibre.

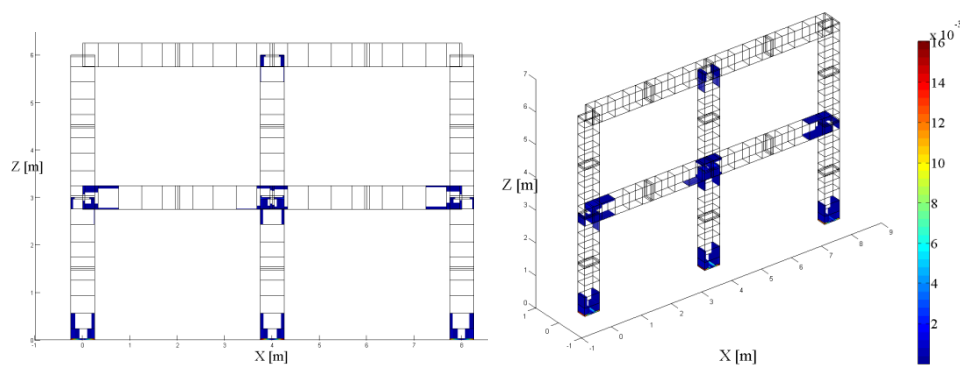


Figura 97 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=0.32$): deformazioni plastiche nelle fibre.

5.3.5 Analisi limite

La valutazione del carico limite della struttura in esame è valutabile attraverso l'applicazione del teorema cinematico dell'analisi limite. Dall'analisi dei grafici ottenuti mediante le analisi statiche non lineari si evince che le sezioni critiche sono quelle identificate con un cerchio nero in figura 109.

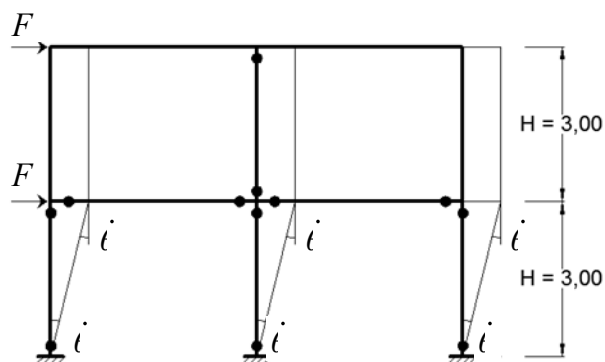


Figura 98 - Cinematismo di collasso

Poiché il momento plastico delle sezioni delle travi risulta:

$$M_p = \sigma_0 W = \sigma_0 \frac{bh^2}{4} = 326.8125 \text{ kNm}$$

Dall'analisi del cinematismo in Figura 98 il lavoro virtuale interno risulta

$$L_{vi} = 6M_p \dot{\epsilon}$$

Il lavoro virtuale esterno è pari a

$$L_{ve} = 2\lambda F h \dot{\epsilon}$$

Il moltiplicatore di collasso associato al cinematismo in figura si ottiene uguagliando il lavoro virtuale esterno ed interno

$$\lambda = 3 \frac{M_p}{Fh} = 0.3268125$$

Il tagliante alla base associato al moltiplicatore λ risulta

$$V = 2\lambda F = 653.625 \text{ kN}$$

5.3.6 Curve di capacità

Nella figura seguente si riportano il confronto delle curve di capacità ottenute mediante i diversi approcci di modellazione

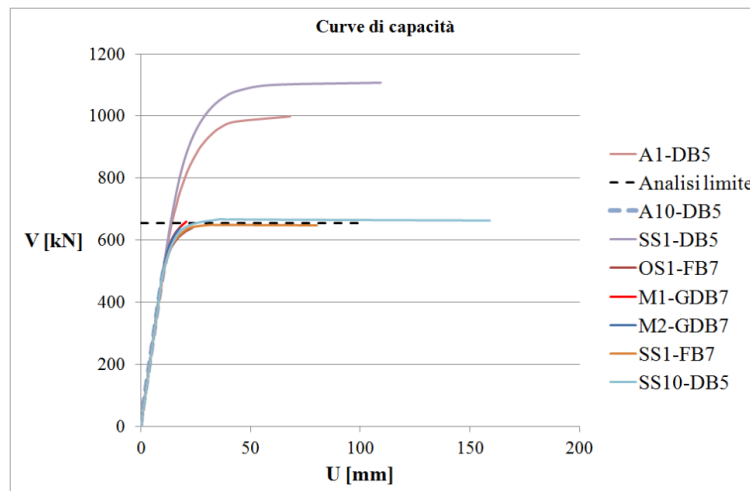


Figura 99 – Curve di capacità

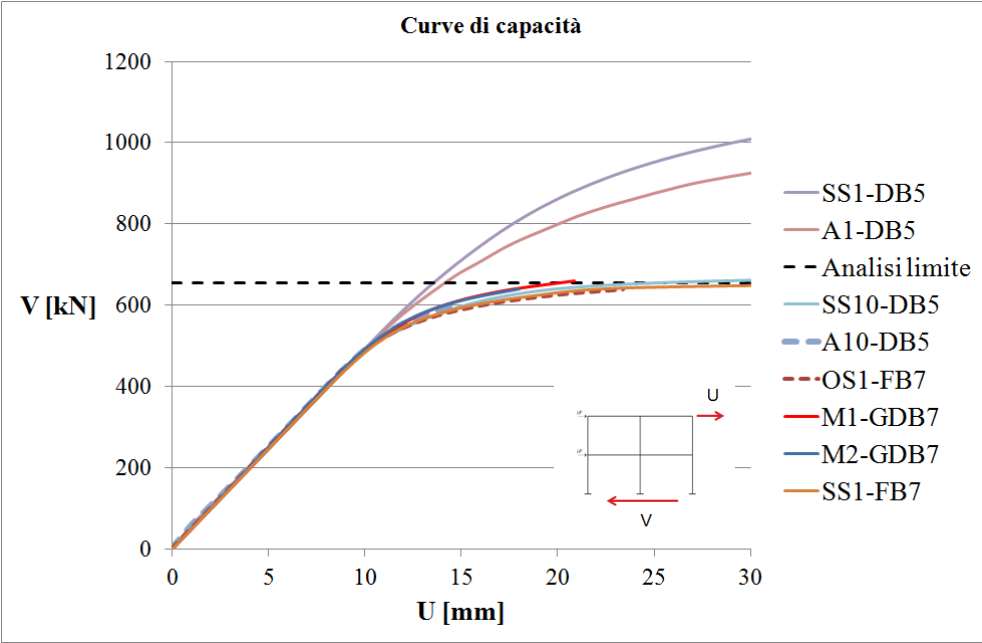


Figura 100 – Dettaglio delle curve di capacità

5.4 Telaio piano (legame costitutivo incrudente)

Nel presente paragrafo si intende analizzare la risposta del telaio piano descritto al §5.3 in cui si assume per le fibre un legame costitutivo elastoplastico con incrudimento cinematico lineare il cui modulo di elasticità tangente risulta pari a $E_t = 0.05 E_0$.

5.4.1 Elemento finito proposto GDB

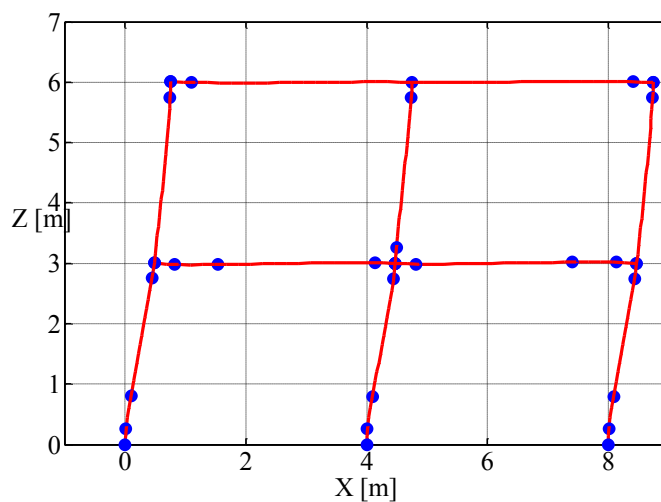


Figura 101 – Modello M1-GDB7 ($\lambda=0.45$): risposta in termini di spostamenti

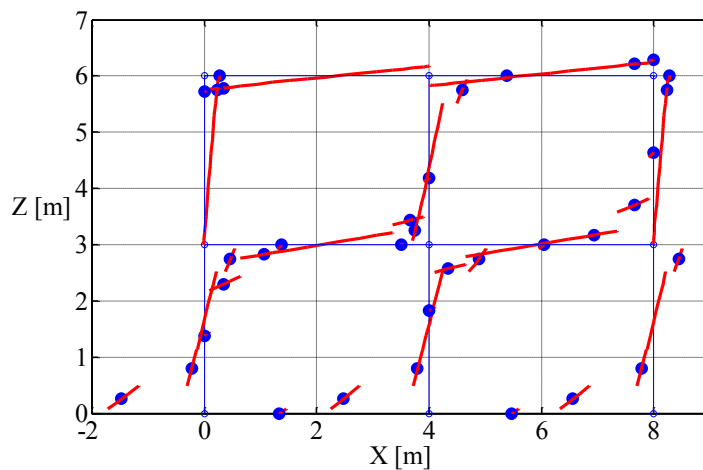


Figura 102 – Modello M1-GDB7 ($\lambda=0.45$): risposta in termini di curvatura

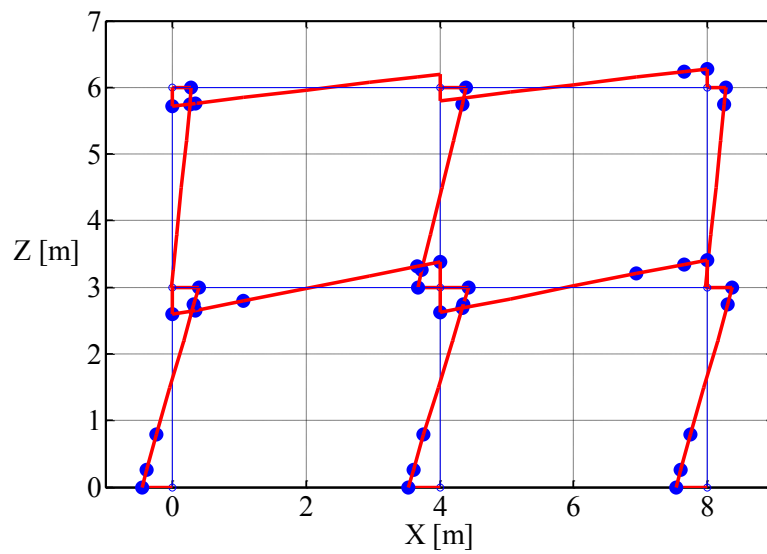


Figura 103 – Modello M1-GDB7 ($\lambda=0.45$): momento flettente (x1000) kNm.

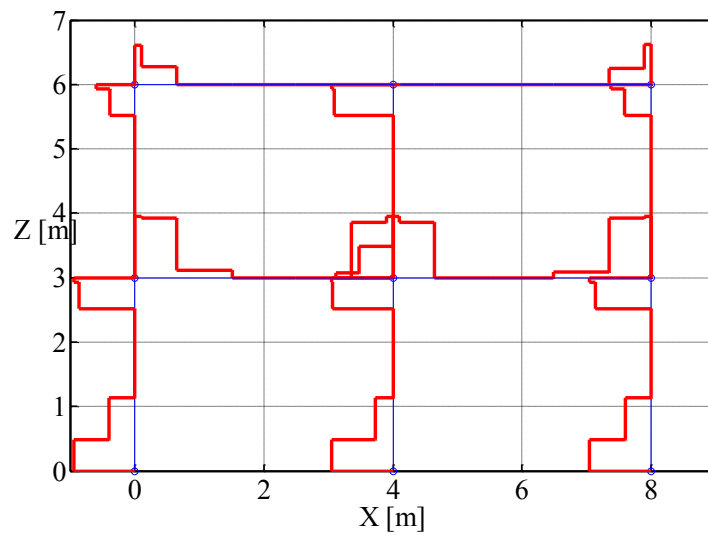


Figura 104 – Modello M1-GDB7 ($\lambda=0.45$): intensità delle discontinuità.

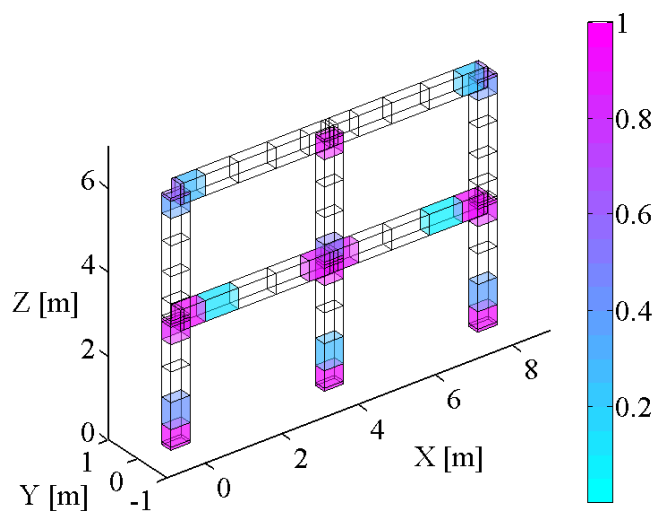


Figura 105 – Modello M1-GDB7 ($\lambda=0.45$). Intensità delle discontinuità $\sigma_x \times 10 [MPa]$

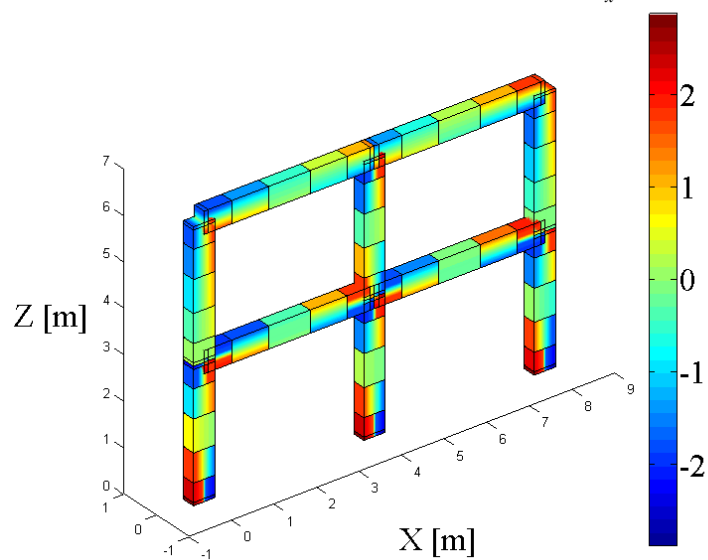


Figura 106 – Modello M1-GDB7 ($\lambda=0.45$): risposta in termini di tensioni

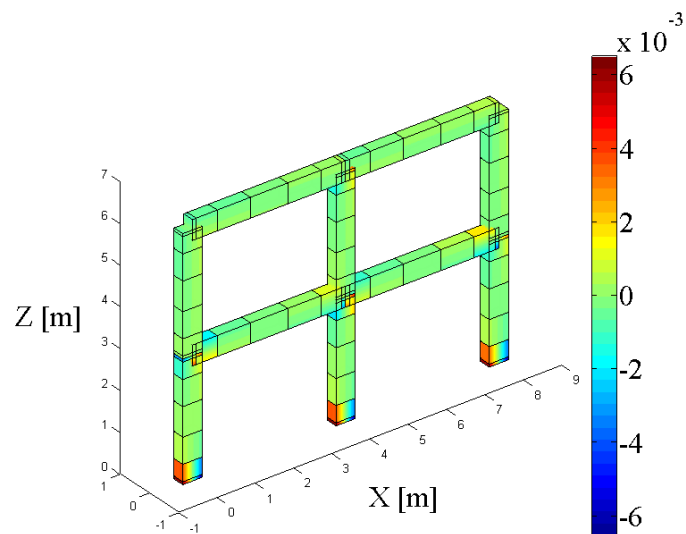


Figura 107 – Modello M1-GDB7 ($\lambda=0.45$): risposta in termini di deformazione.

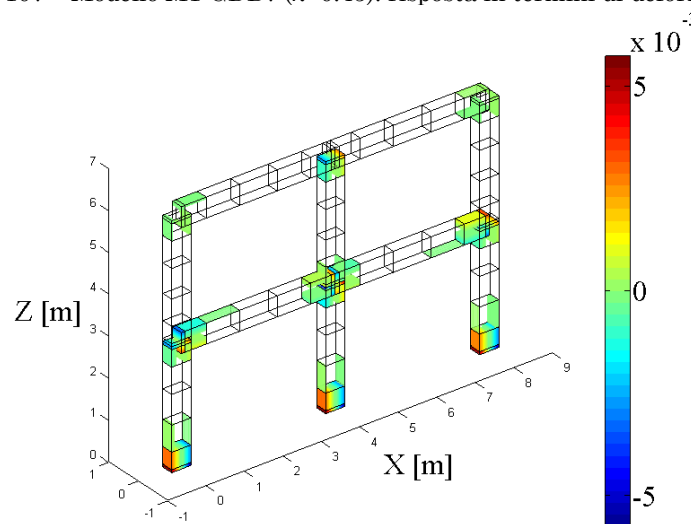


Figura 108 – Modello M1-GDB7 ($\lambda=0.45$): deformazione plastica cumulata nelle fibre

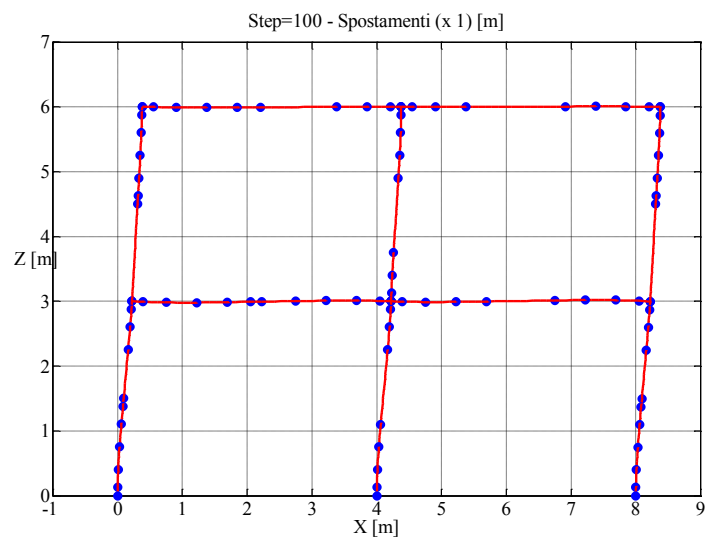


Figura 109 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=1.00$): risposta in termini di spostamenti

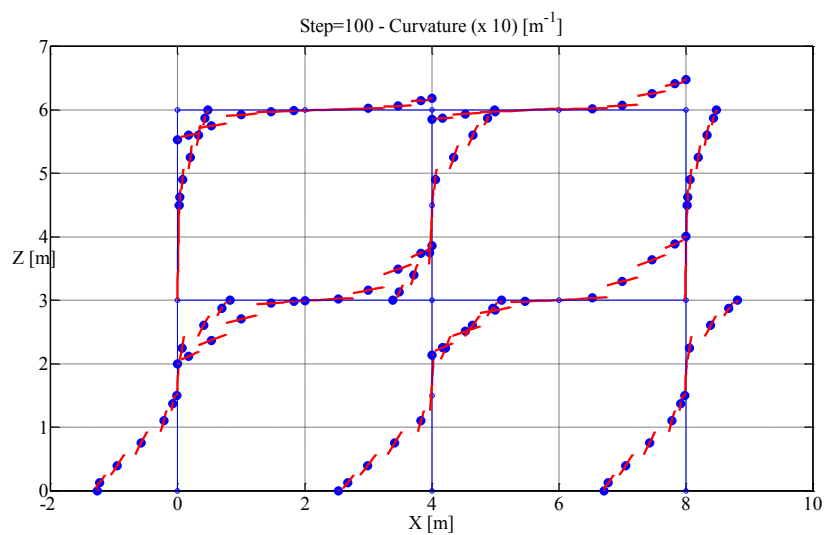


Figura 110 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=1.00$): risposta in termini di curvature

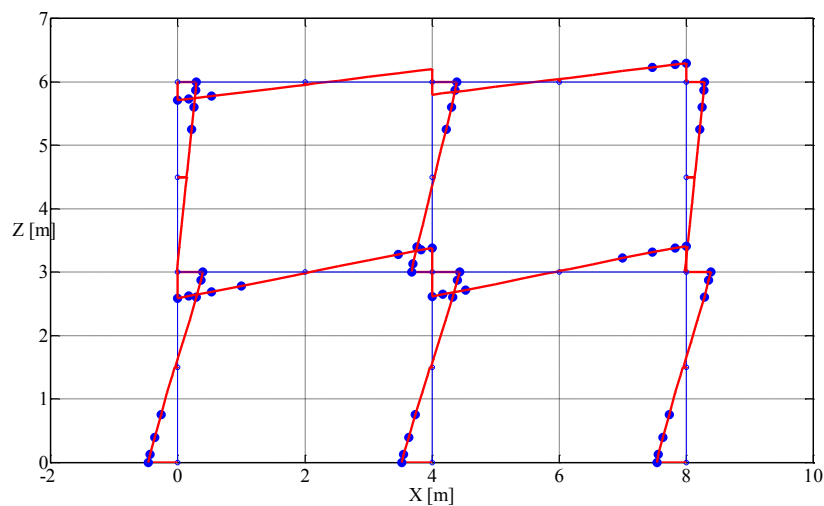


Figura 111 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=0.45$): momento flettente

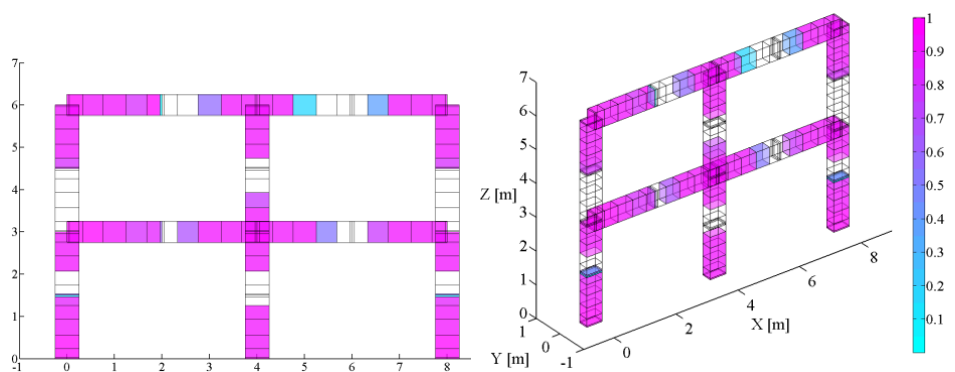


Figura 112 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=1.00$): intensità delle discontinuità

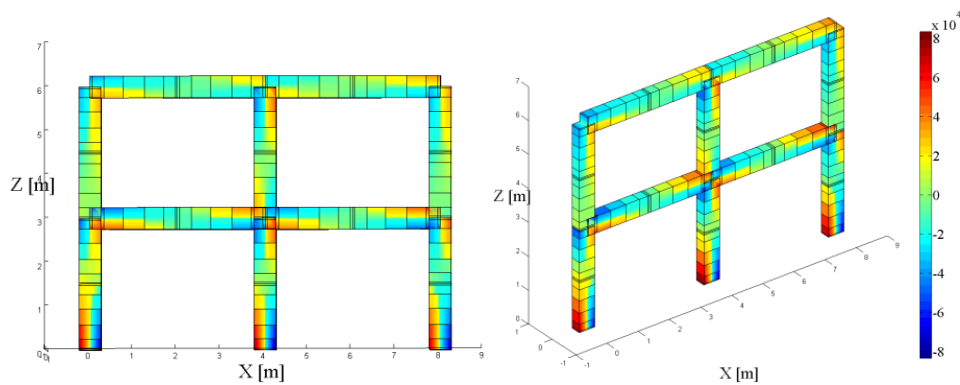
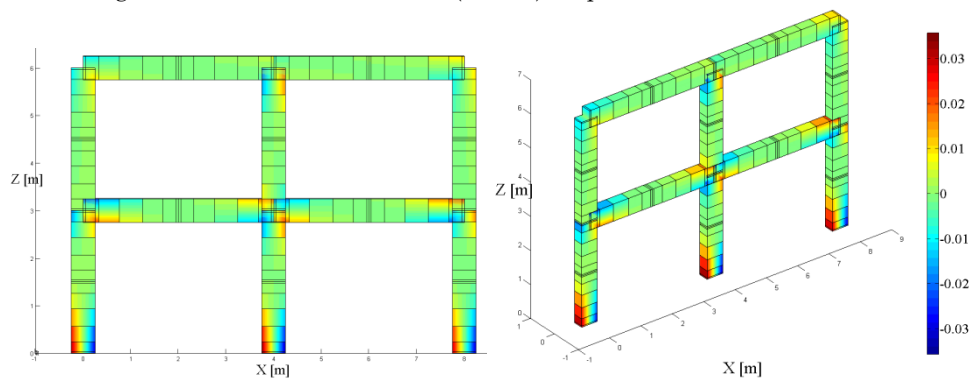
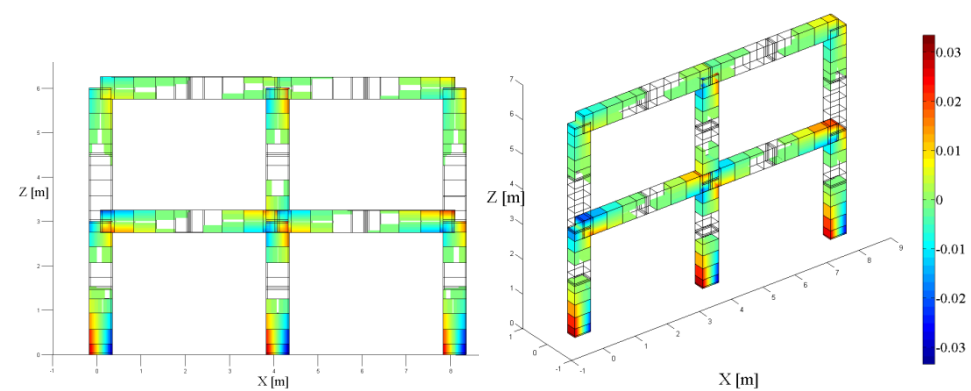


Figura 113 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=1.00$): risposta in termini di tensioniFigura 114 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=1.00$): risposta in termini di deformazioniFigura 115 – Modello M2-GDB7 ($\lambda=1.00$): risposta in termini di deformazioni plastiche

5.4.2 SeismoStruct – modelli DB e FB

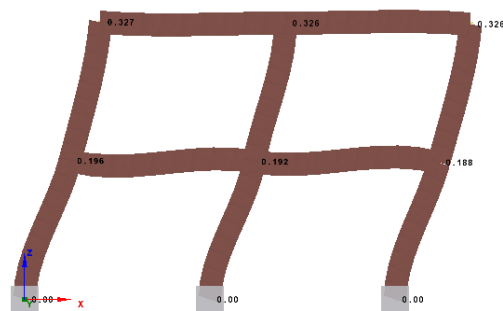


Figura 116 – Modello SS1-DB5 ($\lambda=1.00$): risposta in termini di spostamenti

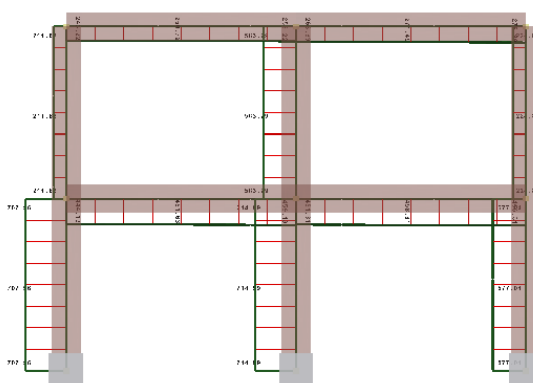


Figura 117 – Modello SS1-DB5 ($\lambda=1.00$): risposta in termini di sforzo di taglio

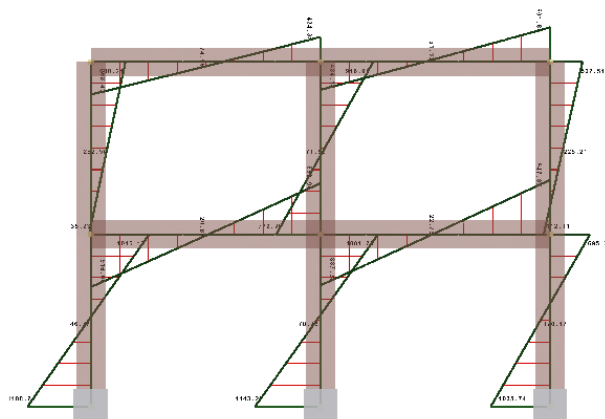
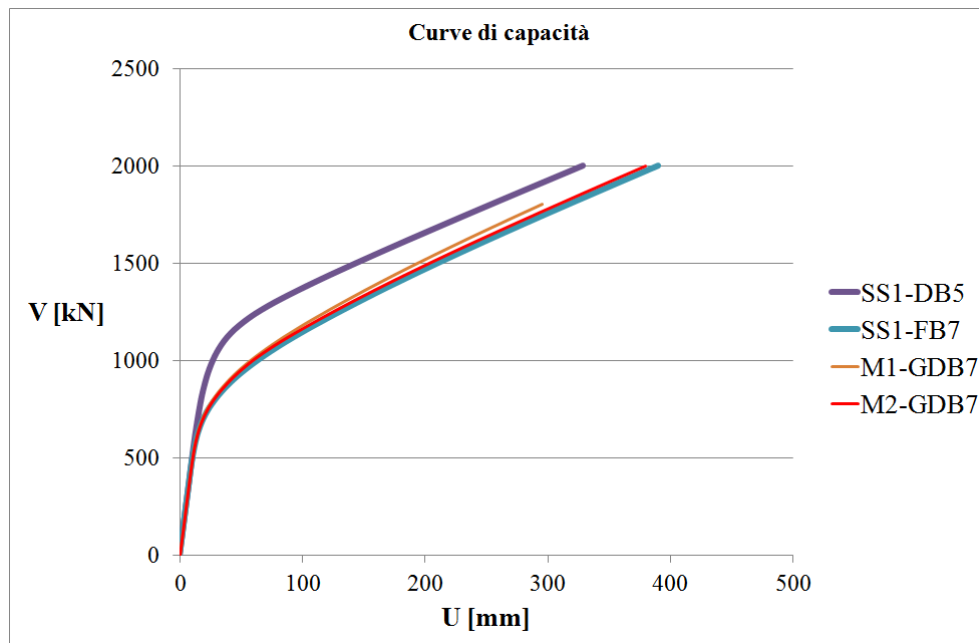


Figura 118 – Modello SS1-DB5 ($\lambda=1.00$): risposta in termini di momenti flettenti

5.4.3 Curve di capacità

Nella figura seguente si riportano il confronto delle curve di capacità ottenute mediante i diversi approcci di modellazione



5.5 Bibliografia

1. ADINA R & D, Inc., "Theory and Modeling Guide", Report ARD 08-7, February 2008.
2. Bathe K.J., 1996, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", 2nd Edition, Prentice Hall.
3. Neuenhofer A., Filippou F.C., 1997, "Evaluation of nonlinear frame finite-element models," Journal of Structural Engineering, Vol. 123, No. 7, pp. 958-966.
4. OpenSees, Pacific Earthquake Engineering Research Center (PEER), sito web: <http://opensees.berkeley.edu/index.php>
5. Seismosoft Srl, "SeismoStruct. Manuale utente per la versione 6", 2012.
6. Spacone E., Ciampi V., Filippou F.C., 1996, "Mixed formulation of nonlinear beam finite element," Computers & Structures, Vol. 58, No. 1, pp. 71-83.
7. The MathWorks, Inc., 1984–2007. "Matlab user manual".

Appendice

Appendice A: L'algoritmo di Newton-Raphson

L'analisi non lineare di strutture inelastiche può essere condotta tramite l'algoritmo di Newton-Raphson. Noto anche come metodo delle tangenti è uno dei metodi numerici noti in letteratura per il calcolo approssimato di una soluzione di un'equazione nella forma $f(x) = 0$. Le ipotesi di base sono:

- Sia $f(x)$ continua e derivabile nell'intervallo $[a, b]$
- Le derivate prima e seconda di $f(x)$ siano continue e diverse da zero.
- Sia $f(a)f(b) < 0$: si richiede che la funzione assuma segni alterni all'interno dell'intervallo; questo implica che esisterà almeno un punto $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}) = 0$;
- Sia $[a, b]$ sufficientemente piccolo. Quest'ultimo requisito scaturisce dall'approssimazione della funzione $f(x)$ che viene operata nel metodo, con lo sviluppo in serie di Taylor: è noto, infatti, che l'errore dello sviluppo del polinomio di Taylor è direttamente proporzionale alla dimensione dell'intervallo.

Dato un punto iniziale x_0 detto "punto di innesco", che appartiene all'intervallo $[a, b]$, si costruisce una successione di valori $x_1, x_2, \dots, x_n$ mediante una funzione di interazione $g(x)$ tale che $x_{n+1} = g(x_n)$. La successione così costruita, al crescere di n , converge allo zero della funzione, o in altre parole

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} \text{ e } f(\bar{x}) = 0$$

Nel metodo di Newton-Raphson il punto di innesco si ottiene considerando la tangente alla curva in uno dei due estremi dell'intervallo $[a, b]$

$$y = f(a) + f'(a)(x - a) \quad (7.1)$$

Ponendo $y = 0$ dall'eq. (7.1) si ottiene

$$x_0 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \quad (7.2)$$

La funzione $g(x)$ si ottiene considerando la tangente alla curva nel punto di innesco x_0

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (7.3)$$

Ponendo $y = 0$ si ottiene dall'eq. (7.3)

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad (7.4)$$

essendo x_1 la prima radice di tentativo della soluzione. Ripetendo il procedimento per x_1 otteniamo una nuova approssimazione della radice

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (7.5)$$

Procedendo in modo iterativo si ottiene la relazione di ricorrenza

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = g(x_n) \quad (7.6)$$

che permette di determinare successive approssimazioni della radice dell'equazione $y = f(x) = 0$. Con le ipotesi poste, si dimostra che la successione delle x_n converge alla radice piuttosto rapidamente.

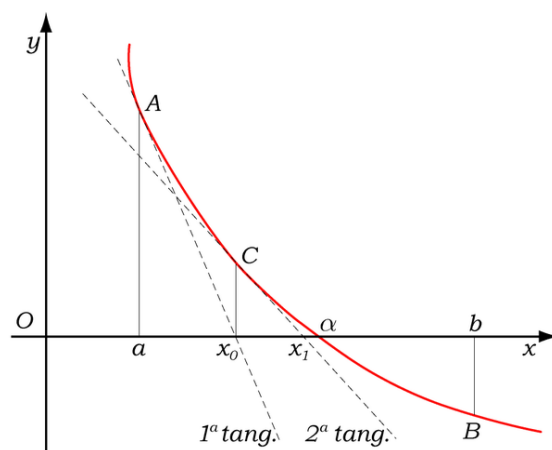


Figura 122 – Metodo di Newton-Raphson

La procedura numerica del metodo di Newton Raphson è iterativa. Ad ogni iterazione n -esima si valuta una predizione della radice x_n tramite l'eq. (7.6). Tuttavia tale radice potrebbe non soddisfare l'equazione $f(x_n)=0$ e l'errore computazionale commesso nella determinazione della soluzione, detto anche *residuo*, è pari a $R = f(x_n)$. Le iterazioni si arresteranno quando il residuo sarà al di sotto di una certa tolleranza fissata.

L'analisi statica non lineare delle strutture basata sull'algoritmo di Newton-Raphson a controllo di forza fornisce lo spostamento $\mathbf{U}$ dei gradi di libertà della struttura per un fissato vettore di carico $\mathbf{P}$. La procedura iterativa muove le sue mosse con l'assemblaggio della matrice di rigidità della struttura $\mathbf{K}$.

- 1) Si definisce $\mathbf{R}$ il vettore residuo che inizialmente viene posto pari al vettore di carico $\mathbf{P}$

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} \quad (7.7)$$

- 2) Si calcola l'incremento del vettore degli spostamenti dei gradi di libertà della struttura $\Delta\mathbf{U}$ tramite l'equazione

$$\Delta\mathbf{U} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{R} \quad (7.8)$$

Lo spostamento totale $\mathbf{U}$ è ottenuto sommando il suo incremento

$$\mathbf{U} = \mathbf{U} + \Delta\mathbf{U} \quad (7.9)$$

- 3) Il campo degli spostamenti della struttura $\Delta \mathbf{U}$ deve essere congruente con gli spostamenti nodali di ciascun elemento finito. Di conseguenza si applica a ciascun elemento finito un campo di spostamenti nodali $\Delta \mathbf{q}_e$ che soddisfi l'equazione di congruenza (1.1).
- 4) Ogni elemento finito risulta soggetto ad un campo di spostamenti nodali che, in generale, determina un campo di deformazione e di tensione interno all'elemento. Tali campi vengono determinati tramite la procedura nota come *determinazione dello stato dell'elemento* (Element State Determination, cfr. eq. (1.5)), attraverso cui è possibile, inoltre, calcolare le forze nodali $\Delta \mathbf{Q}_e$ che risultino in equilibrio con lo stesso campo di tensioni interni all'elemento.
- 5) Le forze nodali reattive (resisting forces) $\mathbf{Q}_e$ sono ottenute sommando gli incrementi $\Delta \mathbf{Q}_e$ così valutati. Tali forze nodali dovranno essere in equilibrio con il vettore dei carichi imposti alla struttura $\mathbf{P}$, ossia deve essere soddisfatta l'equazione di equilibrio (1.4). In tal caso il residuo $\mathbf{R}$ è un operatore vettoriale che risulta

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} - \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{L}_{R,e}^t \cdot \mathbf{L}_e^t \cdot \mathbf{Q}_e \quad (7.10)$$
- 6) **Verifica della convergenza.** Le iterazioni si arresteranno quando il residuo sarà al di sotto di una certa tolleranza fissata. Viceversa si dovrà iterare ripetendo la procedura dal punto 2.

In figura 10 è riportato il diagramma di flusso dell'analisi non lineare basata sull'algoritmo di Newton-Raphson a controllo di forza.

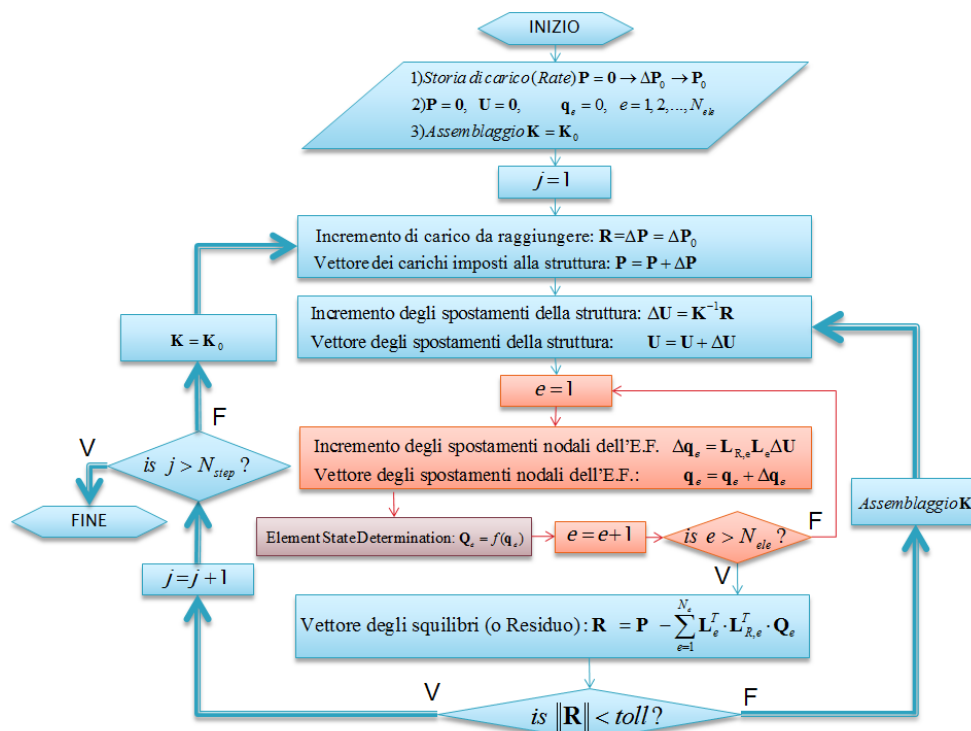


Figura 123 – Diagramma di flusso dell'algoritmo di Newton Raphson

Appendice B: Soluzione in forma chiusa della matrice di rigidità

Le espressioni in forma chiusa dei termini che compaiono nella matrice di rigidità della trave di Timoshenko con discontinuità multiple descritte al §4 sono ottenute mediante la procedura descritta in questa appendice.

Gli sforzi nodali interni adimensionalizzati (i.e., sforzi di taglio e momenti flettenti) vengono raccolti nel vettore

$$\mathbf{S}_0^T = [V_1 \quad M_1 \quad V_2 \quad M_2] = [-V(0) \quad M(0) \quad V(1) \quad -M(1)]$$

e sono messi in relazione al vettore degli spostamenti nodali adimensionalizzati $\mathbf{u}_0 = [u_1 \quad \varphi_1 \quad u_2 \quad \varphi_2]^T$ attraverso la matrice di rigidità $\mathbf{K}_b$

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{K}_b \mathbf{u}_0 \quad (7.11)$$

Dalle equazioni (3.23) e (3.25) e tenendo conto delle eq. (3.29) è possibile ricavare le espressioni che legano le forze nodali agli spostamenti nodali adimensionalizzati

$$V_1 = -V(0) = 6 \left[\frac{d_3(1)}{w} u_1 - \frac{d_3(1) + f_3(1)}{w} \varphi_1 - \frac{d_3(1)}{w} u_2 + \frac{f_3(1)}{w} \varphi_2 \right] \quad (7.12)$$

$$V_2 = V(1) = -6 \left[\frac{d_3(1)}{w} u_1 - \frac{d_3(1) + f_3(1)}{w} \varphi_1 - \frac{d_3(1)}{w} u_2 + \frac{f_3(1)}{w} \varphi_2 \right] \quad (7.13)$$

$$M_1 = M(0) = -2 \left[-\frac{d_4(1)}{w} u_1 + \frac{d_4(1) + f_4(1)}{w} \varphi_1 + \frac{d_4(1)}{w} u_2 - \frac{f_4(1)}{w} \varphi_2 \right] \quad (7.14)$$

$$M_2 = -M(1) = 2 \left[\frac{-d_4(1) + 3d_3(1)}{w} u_1 + \frac{d_4(1) + f_4(1) - 3d_3(1) - 3f_3(1)}{w} \varphi_1 + \right. \\ \left. + \frac{d_4(1) - 3d_3(1)}{w} u_2 + \frac{-f_4(1) + 3f_3(1)}{w} \varphi_2 \right] \quad (7.15)$$

Le eq. (7.12)-(7.15) possono essere scritte nella seguente forma matriciale

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{K}_b \mathbf{u}_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} V_1 \\ M_1 \\ V_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

dove

$$\begin{aligned}
k_{11} &= 6 \frac{d_3(1)}{w} & k_{12} &= -6 \frac{f_3(1) + d_3(1)}{w} & k_{13} &= -6 \frac{d_3(1)}{w} & k_{14} &= 6 \frac{f_3(1)}{w} \\
k_{21} &= 2 \frac{d_4(1)}{w} & k_{22} &= -2 \frac{d_4(1) + f_4(1)}{w} & k_{23} &= -2 \frac{d_4(1)}{w} & k_{24} &= 2 \frac{f_4(1)}{w} \\
k_{31} &= -6 \frac{d_3(1)}{w} & k_{32} &= 6 \frac{d_3(1) + f_3(1)}{w} & k_{33} &= 6 \frac{d_3(1)}{w} & k_{34} &= -6 \frac{f_3(1)}{w} \\
k_{41} &= 2 \frac{-d_4(1) + 3d_3(1)}{w} & k_{42} &= 2 \frac{d_4(1) + f_4(1) - 3d_3(1) - 3f_3(1)}{w} & k_{43} &= 2 \frac{d_4(1) - 3d_3(1)}{w} & k_{44} &= 2 \frac{-f_4(1) + 3f_3(1)}{w}
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Appendice C: Soluzione in forma chiusa della matrice di massa coerente

Le espressioni integrali della matrice di massa consistente, riportate nell'Eq. (3.41) possono fornire un'espressione in forma chiusa per il caso di massa uniformemente distribuita $m(\xi) = m$ nella maniera di seguito indicata.

Il generico termine della matrice di massa coerente è dato da:

$$M_{kl} = \int_0^1 N_{uk}(\xi) m(\xi) N_{ul}(\xi) d\xi \quad (7.18)$$

Per il calcolo degli integrali che compaiono nell'Eq.(7.18), in virtù delle Eq. (3.19), si riscrivono le espressioni delle funzioni di forma date dalle Eq.(3.32) nella seguente forma esplicita:

$$N_{uk}(\xi) = N_{uk}^\alpha(\xi) + \sum_{j=1}^{n_\beta} N_{uk}^{\beta_j}(\xi) + \sum_{i=1}^{n_\gamma} N_{uk}^{\gamma_i}(\xi) \quad (7.19)$$

dove

$$\begin{aligned} N_{uk}^\alpha(\xi) &= n_1^k + n_2^k \xi + n_3^k \xi^2 + n_4^k \xi^3 - n_4^k 6 \frac{\xi}{b r^2} \\ N_{uk}^{\beta_j}(\xi) &= \left[n_3^k \beta_j^* (\xi - \xi_{\beta_j})^2 + n_4^k \beta_j^* (\xi^3 - 3\xi_{\beta_j}^2 \xi + 2\xi_{\beta_j}^3) - 6n_4^k \frac{\beta_j^*}{b r^2} (\xi - \xi_{\beta_j}) \right] U(\xi - \xi_{\beta_j}) \\ N_{uk}^{\gamma_i}(\xi) &= \left[2n_3^k \lambda_{\gamma_i}^* (\xi - \xi_{\gamma_i}) + 6n_4^k \lambda_{\gamma_i}^* \xi_{\gamma_i} (\xi - \xi_{\gamma_i}) - 6n_4^k \frac{\lambda_{\gamma_i}^*}{b r^2} \right] U(\xi - \xi_{\gamma_i}) \end{aligned} \quad (7.20)$$

Il generico termine della matrice, fornita dalle (7.18), può essere scritto per il caso di distribuzione uniforme di massa, per via delle (7.19), come di seguito:

$$M_{kl} = m \int_0^1 \left[N_{uk}^\alpha(\xi) + \sum_{j=1}^{n_\beta} N_{uk}^{\beta_j}(\xi) + \sum_{i=1}^{n_\gamma} N_{uk}^{\gamma_i}(\xi) \right] \left[N_{ul}^\alpha(\xi) + \sum_{p=1}^{n_\beta} N_{ul}^{\beta_p}(\xi) + \sum_{q=1}^{n_\gamma} N_{ul}^{\gamma_q}(\xi) \right] d\xi \quad (7.21)$$

Gli integrali che compaiono in queste ultime equazioni possono essere risolti esplicitamente, tenendo conto delle equazioni (7.20), così come segue:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 N_{uk}^\alpha(\xi) N_{ul}^\alpha(\xi) d\xi = & n_1^k n_1^l + \frac{1}{2} n_1^l n_2^k + \frac{1}{3} n_1^l n_3^k + \frac{1}{4} n_1^l n_4^k - \frac{3n_1^l n_4^k}{br^2} + \frac{1}{2} n_1^k n_2^l + \frac{1}{3} n_2^k n_2^l + \frac{1}{4} n_3^k n_2^l + \\
& + \frac{1}{5} n_4^k n_2^l - \frac{2n_4^k n_2^l}{br^2} + \frac{1}{3} n_1^k n_3^l + \frac{1}{4} n_2^k n_3^l + \frac{1}{5} n_3^k n_3^l + \frac{1}{6} n_4^k n_3^l - \frac{3n_4^k n_3^l}{2br^2} + \frac{1}{4} n_1^k n_4^l - \frac{3n_1^k n_4^l}{br^2} + \frac{1}{5} n_2^k n_4^l + \\
& - \frac{2n_2^k n_4^l}{br^2} + \frac{1}{6} n_3^k n_4^l - \frac{3n_3^k n_4^l}{2br^2} + \frac{1}{7} n_4^k n_4^l + \frac{12n_4^k n_4^l}{b^2 r^4} - \frac{12n_4^k n_4^l}{5br^2}
\end{aligned} \tag{7.22}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 N_{uk}^\alpha(\xi) N_{ul}^{\beta_j}(\xi) d\xi = & n_4^l \frac{\beta_j^{**}}{br^2} \left[-2n_2^k - \frac{3}{2} n_3^k + 3n_2^k \xi_{\beta_j} + 2n_3^k \xi_{\beta_j} - 3n_1^k (1 - 2\xi_{\beta_j}) \right] + \\
& + 3n_4^k n_4^l \frac{\beta_j^{**}}{br^2} \left[\frac{4}{br^2} - \frac{6}{br^2} \xi_{\beta_j} - \frac{1}{10} (4 - 5\xi_{\beta_j}) \right] - n_4^k \frac{1}{br^2} \left[\frac{1}{2} n_3^k (3 - 8\xi_{\beta_j} + 6\xi_{\beta_j}^2) + \frac{6}{5} n_4^l (1 - 5\xi_{\beta_j}^2 + 5\xi_{\beta_j}^3) \right] + \\
& + \beta_j^* n_2^k \left[\frac{1}{12} n_3^l (3 - 8\xi_{\beta_j} + 6\xi_{\beta_j}^2) + \frac{1}{5} n_4^l (1 - 5\xi_{\beta_j}^2 + 5\xi_{\beta_j}^3) \right] + \\
& + \frac{1}{60} \beta_j^* n_3^k \left[2n_3^l (6 - 15\xi_{\beta_j} + 10\xi_{\beta_j}^2) + 5n_4^l (2 - 9\xi_{\beta_j}^2 + 8\xi_{\beta_j}^3) \right] + \\
& + \frac{1}{12} \beta_j^* n_1^k \left[4n_3^l (1 - 3\xi_{\beta_j} + 3\xi_{\beta_j}^2) + 3n_4^l (1 - 6\xi_{\beta_j}^2 + 8\xi_{\beta_j}^3) \right] + \\
& + n_4^k \beta_j^* \left[\frac{1}{60} n_3^l (10 - 24\xi_{\beta_j} + 15\xi_{\beta_j}^2) + \frac{1}{70} n_4^l (10 - 42\xi_{\beta_j}^2 + 35\xi_{\beta_j}^3) \right] + \\
& + n_4^l \xi_{\beta_j}^2 \frac{\beta_j^{**}}{br^2} \left[\frac{6}{br^2} n_4^k \xi_{\beta_j} - \frac{1}{10} (30n_1^k + 10n_2^k \xi_{\beta_j} + 5n_3^k \xi_{\beta_j}^2 + 3n_4^k \xi_{\beta_j}^3) \right] + n_4^k \xi_{\beta_j}^4 \beta_j^* \frac{1}{br^2} \left(\frac{1}{2} n_3^l + \frac{6}{5} n_4^l \xi_{\beta_j} \right) + \\
& - \frac{1}{12} n_1^k \xi_{\beta_j}^3 \beta_j^* (4n_3^l + 9n_4^l \xi_{\beta_j}) - \frac{1}{60} n_2^k \xi_{\beta_j}^4 \beta_j^* (5n_3^l + 12n_4^l \xi_{\beta_j}) + \\
& - \xi_{\beta_j}^5 \beta_j^* \left[\frac{1}{60} n_3^k (2n_3^l + 5n_4^l \xi_{\beta_j}) + n_4^k \xi_{\beta_j} \left(\frac{1}{60} n_3^l + \frac{3}{70} n_4^l \xi_{\beta_j} \right) \right]
\end{aligned} \tag{7.23}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 N_{uk}^\alpha(\xi) N_{ul}^{\gamma_i}(\xi) d\xi = & n_3^l (1 - \xi_{\gamma_i})^2 \lambda_{\gamma_i}^* \left\{ n_1^k + \frac{1}{3} n_2^k (2 + \xi_{\gamma_i}) + \frac{1}{6br^2} n_3^k (3 + 2\xi_{\gamma_i} + \xi_{\gamma_i}^2) + \right. \\
& \left. - \frac{1}{10br^2} n_4^k [20(2 + \xi_{\gamma_i}) - (4 + 3\xi_{\gamma_i} + 2\xi_{\gamma_i}^2 + \xi_{\gamma_i}^3)] \right\} + \\
& + n_4^l \frac{\lambda_{\gamma_i}^*}{br^2} \left\{ \frac{3}{2} n_4^k (1 - \xi_{\gamma_i}^2) \left[\frac{12}{br^2} - (1 + \xi_{\gamma_i}^2) \right] - (1 - \xi_{\gamma_i}) [6n_1^k + 3n_2^k (1 + \xi_{\gamma_i}) + 2n_3^k (1 + \xi_{\gamma_i} + \xi_{\gamma_i}^2)] \right\} + \\
& + (1 - \xi_{\gamma_i})^2 n_4^l \xi_{\gamma_i} \lambda_{\gamma_i}^* \left\{ 3n_1^k + n_2^k (2 + \xi_{\gamma_i}) + \frac{1}{2br^2} n_3^k (3 + 2\xi_{\gamma_i} + \xi_{\gamma_i}^2) + \right. \\
& \left. - \frac{3}{br^2} n_4^k [2(2 + \xi_{\gamma_i}) - \frac{1}{10} (4 + 3\xi_{\gamma_i} + 2\xi_{\gamma_i}^2 + \xi_{\gamma_i}^3)] \right\}
\end{aligned} \tag{7.24}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 N_{uk}^{\beta_j}(\xi) N_{ul}^{\beta_p}(\xi) d\xi &= \frac{1}{7} n_4^k n_4^l \beta_j^* \beta_p^* \left(1 - \max_{\xi_{\beta_j \beta_p}} \xi^7\right) + \frac{1}{6} (n_4^k n_3^l + n_3^k n_4^l) \beta_j^* \beta_p^* \left(1 - \max_{\xi_{\beta_j \beta_p}} \xi^6\right) + \\
&+ \xi_{\beta_j} \xi_{\beta_p} \left(1 - \max_{\xi_{\beta_j \beta_p}} \xi\right) \left[6n_4^k \frac{\beta_j^*}{br^2} + \xi_{\beta_j} (n_3^k + 2n_4^k \xi_{\beta_j}) \beta_j^* \right] \left[6n_4^l \frac{\beta_p^*}{br^2} + \xi_{\beta_p} (n_3^l + 2n_4^l \xi_{\beta_p}) \beta_p^* \right] + \\
&- \frac{1}{5} \left(1 - \max_{\xi_{\beta_j \beta_p}} \xi^5\right) \left\{ 6n_4^k n_4^l \frac{\beta_p^*}{br^2} \beta_j^* + 6n_4^k n_4^l \frac{\beta_j^*}{br^2} \beta_p^* - n_3^k \beta_j^* \beta_p^* (n_3^l - 2n_4^l \xi_{\beta_j}) + \right. \\
&\quad \left. + n_4^k \beta_j^* \beta_p^* \left[2n_3^l \xi_{\beta_p} + 3n_4^l (\xi_{\beta_j}^2 + \xi_{\beta_p}^2) \right] \right\} + \\
&- \frac{1}{4} \left(1 - \max_{\xi_{\beta_j \beta_p}} \xi^4\right) \left\{ 6n_4^l (n_3^k - n_4^k \xi_{\beta_p}) \frac{\beta_p^*}{br^2} \beta_j^* + 6n_4^k (n_3^l - n_4^l \xi_{\beta_j}) \frac{\beta_j^*}{br^2} \beta_p^* + \right. \\
&\quad \left. + n_3^k \beta_j^* \beta_p^* \left[2n_3^l (\xi_{\beta_j} + \xi_{\beta_p}) - n_4^l (\xi_{\beta_j}^2 - 3\xi_{\beta_p}^2) \right] + \right. \\
&\quad \left. + n_4^k \beta_j^* \beta_p^* \left[n_3^l (3\xi_{\beta_j}^2 - \xi_{\beta_p}^2) - 2n_4^l (\xi_{\beta_j}^3 + \xi_{\beta_p}^3) \right] \right\} + \\
&- \frac{1}{2} \left(1 - \max_{\xi_{\beta_j \beta_p}} \xi^2\right) \left\{ 36n_4^k n_4^l \frac{\beta_j^*}{br^2} \frac{\beta_p^*}{br^2} (\xi_{\beta_j} + \xi_{\beta_p}) + \right. \\
&\quad \left. + 6n_4^k \xi_{\beta_p} \frac{\beta_j^*}{br^2} \beta_p^* \left[n_3^l (2\xi_{\beta_j} + \xi_{\beta_p}) + n_4^l \xi_{\beta_p} (3\xi_{\beta_j} + 2\xi_{\beta_p}) \right] + \right. \\
&\quad \left. + 6n_4^l \xi_{\beta_j} \beta_j^* \frac{\beta_p^*}{br^2} \left[n_3^k (\xi_{\beta_j} + 2\xi_{\beta_p}) + n_4^k \xi_{\beta_j} (2\xi_{\beta_j} + 3\xi_{\beta_p}) \right] + \right. \\
&\quad \left. + n_4^k \xi_{\beta_j}^2 \xi_{\beta_p} \beta_j^* \beta_p^* \left[6n_4^l \xi_{\beta_p} (\xi_{\beta_j} + \xi_{\beta_p}) + n_3^l (4\xi_{\beta_j} + 3\xi_{\beta_p}) \right] + \right. \\
&\quad \left. + n_3^k \xi_{\beta_p} \xi_{\beta_j} \beta_j^* \beta_p^* \left[2n_3^l (\xi_{\beta_j} + \xi_{\beta_p}) + n_4^l \xi_{\beta_p} (3\xi_{\beta_j} + 4\xi_{\beta_p}) \right] \right\} + \\
&+ \frac{1}{3} \left(1 - \max_{\xi_{\beta_j \beta_p}} \xi^3\right) \left\{ 36n_4^k n_4^l \frac{\beta_j^*}{br^2} \frac{\beta_p^*}{br^2} + 6n_4^k \frac{\beta_j^*}{br^2} \beta_p^* \left[3n_4^l \xi_{\beta_p}^2 + n_3^l (\xi_{\beta_j} + 2\xi_{\beta_p}) \right] + \right. \\
&\quad \left. 6n_4^l \beta_j^* \frac{\beta_p^*}{br^2} \left[3n_4^k \xi_{\beta_j}^2 + n_3^k (2\xi_{\beta_j} + \xi_{\beta_p}) \right] + n_4^k \xi_{\beta_j}^2 \beta_j^* \beta_p^* \left[9n_4^l \xi_{\beta_p}^2 + 2n_3^l (\xi_{\beta_j} + 3\xi_{\beta_p}) \right] + \right. \\
&\quad \left. n_3^k \beta_j^* \beta_p^* \left[2n_4^l \xi_{\beta_p}^2 (3\xi_{\beta_j} + \xi_{\beta_p}) + n_3^l (\xi_{\beta_j}^2 + 4\xi_{\beta_j} \xi_{\beta_p} + \xi_{\beta_p}^2) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{7.25}$$

dove $\max_{\xi_{\beta_j \beta_p}} \xi = \max \{ \xi_{\beta_j}, \xi_{\beta_p} \}$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 N_{uk}^{\beta_j}(\xi) N_{ul}^{\gamma_i}(\xi) d\xi &= \frac{2}{5} n_4^k \left(1 - \max_{\xi_{\gamma_i \beta_j}} \xi^5\right) (n_3^l + 3n_4^l \xi_{\gamma_i}) \beta_j^* \lambda_{\gamma_i}^* + \\
&- 2\xi_{\beta_j} \left(1 - \max_{\xi_{\gamma_i \beta_j}} \xi\right) \left[6n_4^k \frac{\beta_j^*}{br^2} + \xi_{\beta_j} \left(n_3^k + 2n_4^k \xi_{\beta_j}\right) \beta_j^*\right] \left[n_3^l \xi_{\gamma_i} \lambda_{\gamma_i}^* + 3n_4^l \left(\frac{\lambda_{\gamma_i}^*}{br^2} + \xi_{\gamma_i}^2\right)\right] + \\
&+ \frac{1}{2} \beta_j^* \lambda_{\gamma_i}^* \left(1 - \max_{\xi_{\gamma_i \beta_j}} \xi^4\right) \left[\left(n_3^k - n_4^k \xi_{\gamma_i}\right) (n_3^l + 3n_4^l \xi_{\gamma_i}) - 3n_4^l n_4^k \frac{\lambda_{\gamma_i}^*}{br^2}\right] + \\
&- \frac{2}{3} \left(1 - \max_{\xi_{\gamma_i \beta_j}} \xi^3\right) \left\{6n_4^k \frac{\beta_j^*}{br^2} \lambda_{\gamma_i}^* (n_3^l + 3n_4^l \xi_{\gamma_i}) + 3n_3^k n_4^l \beta_j^* \frac{\lambda_{\gamma_i}^*}{br^2} + \right. \\
&\quad \left. + \beta_j^* \lambda_{\gamma_i}^* (n_3^l + 3n_4^l \xi_{\gamma_i}) \left[3n_4^k \xi_{\beta_j}^2 + n_3^k (2\xi_{\beta_j} + \xi_{\gamma_i})\right]\right\} + \\
&+ \left(1 - \max_{\xi_{\gamma_i \beta_j}} \xi^2\right) \left\{6n_4^k \frac{\beta_j^*}{br^2} \left[3n_4^l \frac{\lambda_{\gamma_i}^*}{br^2} + \lambda_{\gamma_i}^* (\xi_{\beta_j} + \xi_{\gamma_i}) (n_3^l + 3n_4^l \xi_{\gamma_i})\right] + \right. \\
&\quad \left. + 3n_4^l \xi_{\beta_j} \beta_j^* \frac{\lambda_{\gamma_i}^*}{br^2} (2n_3^k + 3n_4^k \xi_{\beta_j}) + \right. \\
&\quad \left. + \xi_{\beta_j} \beta_j^* \lambda_{\gamma_i}^* (n_3^l + 3n_4^l \xi_{\gamma_i}) \left[n_3^k (\xi_{\beta_j} + 2\xi_{\gamma_i}) + n_4^k \xi_{\beta_j} (2\xi_{\beta_j} + 3\xi_{\gamma_i})\right]\right\} \quad (7.26)
\end{aligned}$$

dove $\max_{\xi_{\gamma_i \beta_j}} \xi = \max\{\xi_{\gamma_i}, \xi_{\beta_j}\}$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 N_{uk}^{\gamma_i}(\xi) N_{ul}^{\gamma_p}(\xi) d\xi &= 3n_4^k \frac{\lambda_{\gamma_i}^*}{br^2} \left[\left(1 - \max_{\xi_{\gamma_i, \gamma_p}} \xi\right) 6n_l^4 \frac{\lambda_{\gamma_p}^*}{br^2} + \right. \\
&\quad \left. + (n_l^3 + 3n_l^4 \xi_{\gamma_p}) \lambda_{\gamma_p}^* (-1 + 2\xi_{\gamma_p} + \max_{\xi_{\gamma_i, \gamma_p}} \xi^2 - 2 \max_{\xi_{\gamma_i, \gamma_p}} \xi_{\gamma_i} \xi_{\gamma_p})\right] + \\
&+ (n_k^3 + 3n_k^4 \xi_{\gamma_i}) \lambda_{\gamma_i}^* \left\{3n_l^4 (-1 + \max_{\xi_{\gamma_i, \gamma_p}} \xi) \frac{\lambda_{\gamma_p}^*}{br^2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{3} (n_l^3 + 3n_l^4 \xi_{\gamma_p}) \left(1 - \max_{\xi_{\gamma_i, \gamma_p}} \xi\right) \lambda_{\gamma_p}^* \left[2(1 + \max_{\xi_{\gamma_i, \gamma_p}} \xi) - 3(\xi_{\gamma_i} + \xi_{\gamma_p})\right]\right\} \quad (7.27)
\end{aligned}$$

dove $\max_{\xi_{\gamma_i, \gamma_p}} \xi = \max\{\xi_{\gamma_i}, \xi_{\gamma_p}\}$