

**METODI DI ANALISI NON LINEARE
DI STRUTTURE IN CALCESTRUZZO ARMATO**

**MODELLAZIONE DEL FENOMENO DELL'ADERENZA - SCORRIMENTO
FRA ACCIAIO E CALCESTRUZZO**

*Tesi per il conseguimento del titolo di Dottore di Ricerca
in Ingegneria delle Strutture*

Francesco FAZIO

Tutor: Prof. ing. Loredana CONTRAFATTO

Coordinatore: Prof. ing. Giuseppe OLIVETO



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale
Dottorato di Ricerca in Ingegneria delle Strutture
XXIV ciclo

Indice

Indice	7
Indice delle figure.....	11
Sommario.....	19
CAPITOLO 1	21
INTRODUZIONE.....	21
1.1. Prefazione.....	21
1.2. Motivazione, metodologia ed obiettivi	23
1.3. Contenuto della tesi	30
CAPITOLO 2	33
METODOLOGIE DI ANALISI	33
2.1. Introduzione	33
2.2. Classificazione degli approcci presenti in letteratura per la modellazione della frattura nel calcestruzzo armato.....	36
2.2.1. Smearred crack approach	37
2.2.2. Discrete crack approach	43
2.2.3. Il modello FEM a fibre.....	43
CAPITOLO 3	61
ANALISI SECONDO L'APPROCCIO "DISCRETE CRACK"	61
3.1. Introduzione	61
3.2. Modello cinematico.....	69
3.3. Legami costitutivi	71
3.4. Formulazione energetica del problema	73
3.5. Matrice di rigidezza degli elementi monodimensionali	74
3.5.1. L'elemento monodimensionale soggetto a trazione	75
3.5.2. L'elemento monodimensionale soggetto a flessione.....	82

3.6. Elementi cracked ed uncracked.....	92
CAPITOLO 4	101
IMPLEMENTAZIONE NEL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI.	101
4.1. Introduzione	101
4.2. Implementazione dell'elemento finito monodimensionale.....	109
4.3. Legami costitutivi	103
4.3.1. L'acciaio	75
4.3.2. Il calcestruzzo e la frattura coesiva	82
4.3.2.1. Il comportamento a trazione.....	82
4.3.2.2. Il criterio di attivazione dell'interfaccia	82
4.3.3. L'interfaccia	82
4.3.3.1. I modelli presenti in letteratura.....	82
4.3.3.2. Il modello proposto.....	82
4.4. Funzioni di forma e geometria.....	133
4.5. Deformazioni e tensioni	200
4.6. Matrice di rigidità tangente elementare	204
4.7. Forze nodali.....	206
CAPITOLO 5	207
SOLUZIONE DEL PROBLEMA NON LINEARE	207
5.1. Introduzione	207
5.2. Integrazione numerica	208
5.3. Strategia di soluzione	211
5.4. Soluzione del problema dell'equilibrio con un Metodo alla Newton - Raphson modificato.....	213
CAPITOLO 6	219
APPLICAZIONI NUMERICHE.....	219
6.1. Introduzione	219
6.2. L'elemento soggetto a trazione ed il confronto con casi sperimentali presenti in letteratura	222
6.3. L'elemento soggetto a flessione ed i relativi risultati preliminari	252
6.4. Considerazioni sulla convergenza	260
6.5. Considerazioni preliminari sulla stabilità della frattura	260
Conclusioni	267

APPENDICE A.....	271
PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI E SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI	271
A.1 Il Principio dei Lavori Virtuali per la scrittura delle equazioni di equilibrio.....	271
A.1.1. L'elemento monodimensionale soggetto a trazione	272
A.1.2. L'elemento monodimensionale soggetto a flessione.....	274
A.2 Sistema di equazioni differenziali nel problema dell'equilibrio .	278
A.2.1. L'elemento monodimensionale soggetto a trazione	279
A.2.2. L'elemento monodimensionale soggetto a flessione.....	281
BIBLIOGRAFIA.....	293

Indice delle figure

- Figura 1.1: Ponte con tiranti in conglomerato cementizio armato.
- Figura 1.2: Travi da ponte in calcestruzzo armato.
- Figura 1.3: Prove di laboratorio su travi in calcestruzzo armato.
- Figura 1.4: Fessurazione di travi in calcestruzzo armato.
- Figura 2.1: Modi di apertura e sollecitazione di una frattura.
- Figura 2.2: Fictitious Crack Model, FCM (Hillerborg et al., 1976).
- Figura 2.3: Leggi trazione-separazione a) lineare b) bilineare c) esponenziale.
- Figura 2.4: Curva tensione spostamento per un'interfaccia rigido-dissipativa.
- Figura 2.5: Curva tensione spostamento per un'interfaccia elasto-dissipativa.
- Figura 2.6: Meccanismi di fessura coesiva nel calcestruzzo e modello softening.
- Figura 2.7: Modello costitutivo monodimensionale per il calcestruzzo.
- Figura 3.1: Caratterizzazione dei tipi di elementi finiti.
- Figura 3.2: Elemento finito di base soggetto a trazione (BFE-TM).
- Figura 3.3: Elemento finito elementare soggetto a trazione (EFE-TM).
- Figura 3.4: Elemento differenziale soggetto a trazione (DE-TM).
- Figura 3.5: Modello meccanico dell'EFE-TM.
- Figura 3.6: Elemento finito di base soggetto a flessione (BFE-FM).
- Figura 3.7: Elemento finito elementare soggetto a flessione (EFE-FM/DR).
- Figura 3.8: Elemento differenziale soggetto a flessione (DE-FM/DR).
- Figura 3.9: Modello meccanico dell'EFE-FM (DR).
- Figura 3.10: Elemento finito elementare soggetto a flessione (EFE-FM/SR).
- Figura 3.11: Elemento differenziale soggetto a flessione (DE-FM/SR).
- Figura 3.12: Modello meccanico dell'EFE-FM (SR).
- Figura 3.13: Legame costitutivo acciaio.
- Figura 3.14: Legame costitutivo calcestruzzo.
- Figura 3.15: Legame costitutivo interfaccia acciaio - calcestruzzo.
- Figura 3.16: Legame trazione - separazione interfaccia.
- Figura 3.17: Modello meccanico del BFE-FM (cracked).

- Figura 3.18: Modello meccanico del BFE-FM (cracked).
- Figura 4.1: Discretizzazione per elementi finiti. Elemento finito n -esimo e numerazione locale dei nodi.
- Figura 4.2: Assemblaggio EE.FF. e tabella incidenze o matrice di connettività.
- Figura 4.3: Comportamento dell'acciaio da prove sperimentali.
- Figura 4.4: Comportamento bilineare elasto-plastico senza incrudimento.
- Figura 4.5: Comportamento bilineare elasto-plastico con incrudimento.
- Figura 4.6: Legge tensione-deformazione monotona per le armature.
Caso particolare del tension stiffening.
- Figura 4.7: Modello Menegotto-Pinto per l'acciaio senza e con incrudimento.
- Figura 4.8: Provino cilindrico portato a rottura.
- Figura 4.9: Curve tensione-deformazione ottenute con prove di compressione triassiale su provini cilindrici - resistenza del calcestruzzo non confinato.
- Figura 4.10: Confronto delle curve di legame del calcestruzzo in compressione nel caso confinato e nel caso non confinato.
- Figura 4.11: Modello di Kent, Park e Scott per il calcestruzzo.
- Figura 4.12: Comportamento isteretico secondo Karsan e Jirsa.
- Figura 4.13: Raggiungimento tensione positiva con deformazione negativa.
- Figura 4.14: Raggiungimento tensione positiva con deformazione positiva.
- Figura 4.15: Schema della prova brasiliana.
- Figura 4.16: Diversi legami σ - w proposti in letteratura.
- Figura 4.17: Softening lineare.
- Figura 4.18: Softening bi-lineare.
- Figura 4.19: Softening bi-lineare con "Penalty stiffness".
- Figura 4.20: Softening esponenziale.
- Figura 4.21: Pull-out test proposto da Rehm (1961).
- Figura 4.22: Legame τ - s locale.
- Figura 4.23: Cunei di conglomerato a monte della nervatura (Tepfers, 1979) (a), spinte radiali da essi esercitate (b) e fessure trasversali e longitudinali da *splitting* (Gambarova e Karako, 1982) (c).
- Figura 4.24: Fessurazioni nel calcestruzzo.
- Figura 4.25: Possibili meccanismi locali di collasso dell'aderenza.
- Figura 4.26: Definizione parametri geometrici per calcolo indice d'aderenza.
- Figura 4.27: Caratteristiche geometriche barra nervata idealizzata (Rehm, 1961).

Figura 4.28: Rottura per splitting e rottura per pull-out (Rehm, 1961).

Figura 4.29: Andamento qualitativo tensioni principali e superfici di rottura nelle mensole di calcestruzzo sotto l'azione di nervature anulari (barra idealizzata) (Leonhardt, 1977).

Figura 4.30: Tensioni d'aderenza in funzione dell'indice f_R (Rehm, 1969).

Figura 4.31: Comportamento aderenza in relazione alla resistenza a compressione semplice del calcestruzzo: prova d'estrazione per differenti posizioni di betonaggio e diversi valori di scorrimento terminale (Martin e Noakowski, 1981).

Figura 4.32: Esempi di confinamento: (a) confinamento misto (parte attivo, parte passivo) di un ancoraggio; (b) confinamento passivo con staffe di una giunzione per sovrapposizione; (c) ancoraggio in confinamento attivo (Gambarova and Rosati, 1997) e (d) azione di confinamento di una staffa su una splitting crack (Giuriani et al., 1991)

Figura 4.33: Effetto del confinamento sulle modalità di rottura (Nagatomo and Kaku, 1992)

Figura 4.34 a,b: Variazione del legame locale t - s dopo 1 e 10 cicli di carico con inversione dello stato di sollecitazione [Eligehausen et al., 1983]

Figura 4.35: Legame d'aderenza proposto da [Eligehausen et al., 1983]

Figura 4.36: Legame d'aderenza proposto da Eligehausen (1983) per carichi ciclici

Figura 4.37: Legame d'aderenza: (I) quando l'acciaio lavora in campo elastico, (II) quando l'acciaio lavora in campo plastico, proposto in (Huang et al., 1996).

Figura 4.38: Legame di aderenza proposto da (Sigrst, 1995) e distribuzione deformazioni e tensioni conseguenti al legame proposto.

Figura 4.39: Legame d'aderenza proposto in (Shima et al, 1987).

Figura 4.40: Formazione delle fessure di splitting secondo (Tepfers, 1982).

Figura 4.41: Comportamento elastico (ELS), parzialmente fessurato-elastico (ECR) e plastico (PLS) del modello suggerito da (Tepfers, 1982).

Figura 4.42: Legame d'aderenza idealizzato (Giuriani, 1991).

Figura 4.43: Legame d'aderenza trovato sperimentalmente da (Nilson, 1972).

Figura 4.44: Schema del dettaglio della disposizione delle fessure interne intorno ad una sezione fessurata trasversalmente.

Figura 4.45: Diagramma τ - s in formulazione proposta da Mirza e Houde.

Figura 4.46: Local Bond Stress - Slip relationship adottata.

Figura 4.47: Funzioni di forma N_s elemento EFE-TM $\rho = 4.00\%$.

- Figura 4.48: Funzioni di forma N_C elemento EFE-TM $\rho = 4.00\%$.
- Figura 4.49: Funzione di forma N_{SIS} elemento EFE-TM al variare di ρ .
- Figura 4.50: Funzione di forma N_{CIS} elemento EFE-TM al variare di ρ .
- Figura 4.51: Funzione di forma N_{SSS} elemento EFE-TM al variare di ρ .
- Figura 4.52: Funzione di forma N_{CJS} elemento EFE-TM al variare di ρ .
- Figura 4.53: Funzione di forma N_{SIC} elemento EFE-TM al variare di ρ .
- Figura 4.54: Funzione di forma N_{CIC} elemento EFE-TM al variare di ρ .
- Figura 4.55: Funzione di forma N_{SJC} elemento EFE-TM al variare di ρ .
- Figura 4.56: Funzione di forma N_{CJC} elemento EFE-TM al variare di ρ .
- Figura 4.57: Funzioni di forma N_{STIST} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.58: Funzioni di forma N_{SCIST} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.59: Funzioni di forma N_{COIST} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.60: Funzioni di forma $N_{\Phi IST}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.61: Funzioni di forma N_{VIST} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.62: Funzioni di forma N_{STJST} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.63: Funzioni di forma N_{SCJST} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.64: Funzioni di forma N_{COJST} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.65: Funzioni di forma $N_{\Phi JST}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.66: Funzioni di forma N_{VJST} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.67: Funzioni di forma N_{STISC} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.68: Funzioni di forma N_{SCISC} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.69: Funzioni di forma N_{COISC} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.70: Funzioni di forma $N_{\Phi ISC}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.71: Funzioni di forma N_{VISC} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.72: Funzioni di forma N_{STJSC} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.73: Funzioni di forma N_{SCJSC} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.74: Funzioni di forma N_{COJSC} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.75: Funzioni di forma $N_{\Phi JSC}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.76: Funzioni di forma N_{VJSC} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.77: Funzioni di forma N_{STICO} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.78: Funzioni di forma N_{SCICO} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.79: Funzioni di forma N_{COICO} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.80: Funzioni di forma $N_{\Phi ICO}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.81: Funzioni di forma N_{VICO} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
- Figura 4.82: Funzioni di forma N_{STJCO} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

Figura 4.83: Funzioni di forma N_{SCjCO} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.84: Funzioni di forma N_{COjCO} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.85: Funzioni di forma $N_{\Phi jCO}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.86: Funzioni di forma N_{VjCO} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.87: Funzioni di forma $N_{STi\Phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.88: Funzioni di forma $N_{SCi\Phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.89: Funzioni di forma $N_{COi\Phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.90: Funzioni di forma $N_{\Phi i\Phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.91: Funzioni di forma $N_{Vi\Phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.92: Funzioni di forma $N_{STj\Phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.93: Funzioni di forma $N_{SCj\Phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.94: Funzioni di forma $N_{COj\Phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.95: Funzioni di forma $N_{\Phi j\Phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.96: Funzioni di forma $N_{Vj\Phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.97: Funzioni di forma N_{STiV} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.98: Funzioni di forma N_{SCiV} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.99: Funzioni di forma N_{COiV} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.100: Funzioni di forma $N_{\Phi iV}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.101: Funzioni di forma N_{ViV} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.102: Funzioni di forma N_{STjV} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.103: Funzioni di forma N_{SCjV} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.104: Funzioni di forma N_{COjV} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.105: Funzioni di forma $N_{\Phi jV}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 4.106: Funzioni di forma N_{VjV} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .
Figura 5.1: Metodo incrementale.
Figura 5.2: Procedura standard Newton-Raphson.
Figura 5.3: Combinazione metodo incrementale e metodo di Newton-Raphson.
Figura 5.4: Procedura modificata di Newton-Raphson.
Figura 5.5: Diagramma di flusso generica procedura iterativa.
Figura 6.1: Diagramma di flusso algoritmo di calcolo non lineare.
Figura 6.2: Provino relativo al Caso di Studio 1° - Modello A.
Figura 6.3: Modello meccanico del Caso di Studio 1° - Modello A.
Figura 6.4: Modello meccanico del Caso di Studio 1° - Modello A cracked.
Figura 6.5: Spostamenti barra acciaio $U_s(x)$ (mm).
Figura 6.6: Spostamenti del calcestruzzo $U_c(x)$ (mm).

- Figura 6.7: Scorrimenti tra acciaio e calcestruzzo $S(x)$ (mm).
- Figura 6.8: Confronto spostamenti barra acciaio $U_S(x)$ (mm) con funzioni di forma esponenziali (rosso) e lineari (blu).
- Figura 6.9: Confronto spostamenti del calcestruzzo $U_C(x)$ (mm) con funzioni di forma esponenziali (verde) e lineari (blu).
- Figura 6.10: Confronto scorrimenti tra acciaio e calcestruzzo $S(x)$ (mm) con funzioni di forma esponenziali (magenta) e lineari (blu).
- Figura 6.11: Tensioni barra acciaio $\sigma_S(x)$ (MPa).
- Figura 6.12: Tensioni nel calcestruzzo $\sigma_C(x)$ (MPa).
- Figura 6.13: Tensioni di aderenza $\tau(x)$ (MPa).
- Figura 6.14: Confronto spostamenti barra acciaio $U_S(x)$ (mm) (rosso), spostamenti del calcestruzzo $U_C(x)$ (mm) (verde) e scorrimenti tra acciaio e calcestruzzo $S(x)$ (mm) (magenta).
- Figura 6.15: Tensioni barra acciaio $\sigma_S(x)$ (MPa) - Elemento integro.
- Figura 6.16: Tensioni barra acciaio $\sigma_S(x)$ (MPa) - Elemento fessurato.
- Figura 6.17: Tensioni barra acciaio $\sigma_S(x)$ (MPa) - Elemento fessurato.
- Figura 6.18: Ampiezza fessura w (mm) in funzione di U_{Sj} (mm).
- Figura 6.19: Grafico F_{Sj} (N) - U_{Sj} (mm).
- Figura 6.20: Grafico F_{Sj} (N) - U_{Sj} (mm).
- Figura 6.21: Grafico F_{Sj} (N) - U_{Sj} (mm).
- Figura 6.22: Grafico F_{Sj} (N) - U_{Sj} (mm).
- Figura 6.23: Grafico F_{Sj} (N) - U_{Sj} (mm).
- Figura 6.24: Grafico F_{Sj} (N) - U_{Sj} (mm) al variare di ρ .
- Figura 6.25: Confronto con risultati numerici in [76] (Prasad M.V.K.V. et al., 2002).
- Figura 6.26: Grafico F_{Sj} (N) - U_{Sj} (mm).
- Figura 6.27: Grafico F_{Sj} (N) - U_{Sj} (mm) con funzioni interpolanti lineari.
- Figura 6.28: Grafico F_{Sj} (N) - U_{Sj} (mm) con funzioni interpolanti esponenziali.
- Figura 6.29: Ampiezza fessura w (mm) in funzione di U_{Sj} (mm).
- Figura 6.30: Provino relativo al Caso di Studio 2° - Modello B.
- Figura 6.31: Modello meccanico del Caso di Studio 2° - Modello B.
- Figura 6.32: Grafico F_{Sj} (N) - U_{Sj} (mm). ($F_{SjU} = 46.3$ kN - $U_{SjU} = 0.52$ mm)
- Figura 6.33: Grafico F_{Sj} (N) - U_{Sj} (mm). ($F_{SjU} = 96.3$ kN - $U_{SjU} = 0.14$ mm)
- Figura 6.34: Spostamenti barra acciaio $U_S(x)$ (mm).
- Figura 6.35: Spostamenti del calcestruzzo $U_C(x)$ (mm).

Figura 6.36: Scorrimenti tra acciaio e calcestruzzo $S(x)$ (mm).
Figura 6.37: Tensioni barra acciaio $\sigma_S(x)$ (MPa).
Figura 6.38: Tensioni nel calcestruzzo $\sigma_C(x)$ (MPa).
Figura 6.39: Tensioni di aderenza $\tau(x)$ (MPa).
Figura 6.40: Provino relativo al Caso di Studio 3° - Modello C.
Figura 6.41: Modello meccanico del Caso di Studio 3° - Modello C.
Figura 6.42: Modello meccanico del Caso di Studio 3° - Modello C cracked.
Figura 6.43: Curvatura $\chi(x)$ (mm^{-1}).
Figura 6.44: Tensione nella fibra inferiore del calcestruzzo $\sigma_C(x, -h/2)$ (mm).
Figura 6.45: Momento flettente $M(x)$ (Nmm).
Figura 6.46: Rotazione $\Phi(x)$ (mm).
Figura 6.47: Spostamento verticale $V(x)$ (mm).
Figura 6.48: Tensioni nell'acciaio $\sigma_{ST}(x)$ (MPa).
Figura 6.49: Tensioni nell'acciaio $\sigma_{SC}(x)$ (MPa).
Figura 6.50: Tensioni nel calcestruzzo $\sigma_{CO}(x)$ (MPa).
Figura 6.51: Tensioni di aderenza $\tau_T(x)$ (MPa).
Figura 6.52: Scorrimento $S_T(x)$ (mm).
Figura 6.53: Schema di provino simmetrico.
Figura 6.54: Modello semplificato.

Sommario

La risposta non lineare di un sistema strutturale, simulata mediante l'uso di modelli continui standard con ipotesi di materiali omogenei, trova il suo stato critico e di fallimento nella modellazione di quei materiali che presentano la formazione di fessure macroscopiche, sotto certe condizioni di carico, dal normale esercizio fino all'azione sismica.

Diverse sono le formulazioni ed i modelli numerici presenti in letteratura per la simulazione del fenomeno della fessurazione e della frattura coesiva, molti dei quali risultano spesso abbastanza sofisticati ed onerosi dal punto di vista computazionale.

Lo studio svolto nella presente tesi è stato rivolto alla modellazione ed all'analisi dei processi di fessurazione in elementi monodimensionali in cemento armato, quali tiranti e travi, attraverso una modellazione agli elementi finiti, avendo come obiettivo quello di modellare il fenomeno mediante una strategia numerica che non comporti profonde modifiche ai codici di calcolo impiegati nel metodo degli elementi finiti.

In particolare, nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti e piccoli gradienti di spostamento, il principale oggetto di studio è stato quello della formulazione analitica di un modello meccanico, idoneo a simulare il comportamento di tiranti e travi in calcestruzzo armato, che include l'interazione fra le barre di armatura e il conglomerato cementizio e che è in grado di seguire l'evoluzione del quadro fessurativo all'interno dell'elemento, tenendo in considerazione in maniera completa l'energia di frattura del materiale calcestruzzo.

Gli elementi strutturali sono stati modellati come dei compositi costituiti da una matrice in calcestruzzo e da un insieme di fibre longitudinali di acciaio, interconnesse con elementi di interfaccia che simulano il fenomeno dell'aderanza - scorrimento tra i predetti elementi del composito, sfruttando una formulazione energetica del problema.

Tutte le equazioni che governano il problema in esame sono state ottenute mediante l'uso di un funzionale energetico misto.

I legami costitutivi dei materiali calcestruzzo ed acciaio sono quelli classici, reperiti in letteratura, mentre il comportamento dell'interfaccia tra di essi è stato simulato con una variante logaritmica del legame indicato nel CEB FIP Model Code 90.

Nella fase coesiva di apertura delle fessure all'interno della matrice in calcestruzzo, per le interfacce che le simulano sono stati adottati modelli costitutivi del calcestruzzo a trazione di tipo softening (lineare, bilineare, trilineare, esponenziale), tratti dalla copiosa letteratura al riguardo.

L'attenzione è stata focalizzata sull'analisi di un tirante in composito calcestruzzo ed acciaio, per il quale sono stati implementati degli algoritmi di calcolo che consentono di seguire il comportamento non lineare dell'elemento dalla fase integra alla fase fessurata fino al collasso. Partendo dalla definizione delle caratteristiche geometriche e meccaniche delle membrature, l'algoritmo determina le funzioni di forma degli spostamenti generalizzati, le matrici di rigidezza, i campi di spostamento, lo stato deformativo e quello tensionale.

Viene illustrata, in dettaglio, la tecnica adoperata per implementare, in ambiente Mathematica e Matlab, un elemento finito monodimensionale a due nodi in grado di catturare discontinuità nel campo di spostamento, nel caso del tirante.

Analogo studio è stato svolto per gli elementi compositi travi in calcestruzzo cementizio armato e per essi si sono definiti tutti gli elementi preliminari fino alla fase di incipiente fessurazione, necessari per la successiva formulazione dell'analisi non lineare fino al collasso.

La procedura e l'elemento finito implementato sono stati validati mediante confronti con risultati noti in letteratura e con quelli di prove sperimentali standard, tratte dalla stessa letteratura ed impiegate classicamente nell'ambito dello studio del fenomeno della fessurazione e della meccanica della frattura.

CAPITOLO 1

INTRODUZIONE

1.1. Prefazione

A partire dalla seconda metà del secolo scorso, tra le esigenze di primaria importanza per la durabilità delle strutture in conglomerato cementizio armato, si sono messe in risalto la prevenzione ed il controllo del quadro fessurativo: allo stesso periodo risalgono, infatti, le prime indagini sperimentali rivolte alla valutazione degli effetti prodotti dal quadro fessurativo sulla deformabilità delle travi.

La presenza di fessure nelle strutture in calcestruzzo armato non è generalmente indice di pericolo di collasso, ma la fessurazione può limitare pesantemente la funzionalità dell'opera. Fessure molto ampie, infatti, oltre a determinare un incremento della deformabilità, permettono all'acqua e alle sostanze aggressive di penetrare e corrodere le armature, compromettendo l'integrità del manufatto e le sue prestazioni nel tempo.

La meccanica della frattura studia da un punto di vista fenomenologico il comportamento di quei materiali per i quali si osserva, a livello macroscopico, la formazione di fessure in corrispondenza di certi stati tensionali e/o deformativi.

Tali meccanismi macroscopici di degradazione sono governati oltre che dai fattori che intervengono nella meccanica classica, quali le caratteristiche del materiale, le condizioni di carico e le condizioni di vincolo

degli elementi strutturali esaminati, anche da una serie di altri fattori, quali l'energia di frattura, che ne definiscono un diverso modello di comportamento e ne determinano gli effetti scala.

Da un punto di vista fenomenologico, tali fattori comportano la degradazione delle caratteristiche meccaniche di resistenza e/o rigidità del materiale e sono caratterizzati da un comportamento costitutivo di tipo softening, ovvero che presenta diminuzione dello stato tensionale per successivi incrementi di deformazione.

La sfida attuale in questo ramo specifico della meccanica dei materiali è, principalmente, quella di pervenire a schemi numerici robusti, capaci di simulare il processo della frattura in modo "efficiente", "efficace" e soprattutto "oggettivo".

Lo studio di questi complessi meccanismi di degradazione, dei problemi teorico-matematici e di quelli computazionali ad essi connessi e delle loro possibili modellazioni sta avendo un notevole sviluppo, favorito anche dalla diffusione e dall'avanzamento della tecnologia dei processori, come è dimostrato dalla gran quantità di pubblicazioni scientifiche specializzate che si occupano dell'argomento e dalle diverse linee di ricerca proposte.

In particolare, grande attenzione viene posta all'applicazione della meccanica della frattura ai materiali quasi fragili, come il calcestruzzo; i progressi avutisi nella simulazione del fenomeno sono molto incoraggianti.

Tuttavia, i modelli proposti presentano ancora limitazioni importanti, che spingono verso la continua e costante ricerca di nuove linee di investigazione, che consentano di descrivere in maniera più esauriente i diversi aspetti del problema.

Il presente lavoro vuole inquadrarsi nell'ottica dello studio dei modelli di fessurazione del calcestruzzo cementizio armato rientranti nell'ambito dell'approccio con fratture discrete, avendo in mente come obiettivo quello della semplicità e dell'efficienza numerica.

Per consentire una maggiore applicabilità, nella pratica tecnica, si utilizzano spesso modelli semplificati, che prescindono dalla modellazione dettagliata dei componenti e dalla loro interazione. In particolare, le norme tecniche utilizzano formulazioni che derivano dall'assunzione

di una distribuzione di tensioni approssimata.

Tali modelli consentono di individuare il comportamento generale delle strutture in modo da poter costruire in sicurezza, ma non riescono a spiegare in maniera esaustiva i comportamenti locali dei materiali e le loro interazioni.

Il presente lavoro di tesi ha come oggetto principale il comportamento dei materiali ed i fenomeni che riguardano la fessurazione del conglomerato e la sua interazione con le barre d'armatura.

In particolare, ci si pone come obiettivo lo studio di una formulazione per la trave in calcestruzzo armato, che includa l'interazione fra le barre di armatura ed il conglomerato cementizio e riesca a cogliere l'evoluzione del quadro fessurativo all'interno dell'elemento, tenendo in considerazione in maniera completa l'energia di frattura del materiale calcestruzzo.

Formulazioni di questo tipo sono già state sviluppate nella meccanica del continuo, ma risultano di difficile applicazione nella pratica tecnica. La finalità del presente lavoro è, pertanto, riuscire a sviluppare il modello nell'ambito della teoria della trave con le sue consuete ipotesi. Particolare attenzione è posta nell'affrontare il caso del comportamento assiale, per poi passare al caso completo della trave armata a doppia armatura soggetta a flessione.

In dettaglio, in questo capitolo, i rimanenti paragrafi sono organizzati come segue: nel paragrafo 1.2. si fa un rapido riferimento alle motivazioni, alla metodologia, agli obiettivi ed applicazioni pratiche che hanno favorito la nascita e l'evoluzione di questo studio; infine, nel paragrafo 1.3. si illustra l'organizzazione della tesi.

1.2. Motivazione, metodologia ed obiettivi

La continua crescita di attenzione al problema della sicurezza degli edifici nuovi e di quelli esistenti nei confronti dell'azione sismica e le recenti normative per il calcolo strutturale mettono il professionista di fronte a complessi problemi di modellazione, facendo ritenere le tradizionali analisi lineari uno strumento obsoleto e del tutto inadeguato per la stima della capacità di resistenza all'azione sismica degli edifici.

Le travi generalmente sono soggette a fessurazione già sotto i carichi gravitazionali, per cui l'apertura delle fessure avviene molto presto durante un terremoto, inducendo una significativa riduzione della rigidità.

L'influenza di tale riduzione di rigidità, influenzando sulla successiva risposta strutturale, rende poco significativo considerare gli elementi strutturali con sezione integra.

Nel caso di strutture in calcestruzzo armato, il calcolo della rigidità secante allo snervamento è solitamente eseguito, nella pratica corrente, secondo uno dei tre metodi seguenti.

Il primo si basa sull'assunzione di una rigidità flessionale ed a taglio degli elementi ridotta fino al 50% della rigidità degli elementi corrispondenti non fessurati (raccomandazione di normativa), risultando decisamente approssimato ed utile solo in fase di progetto.

Il secondo basato sulla riduzione del momento di inerzia della sezione (Paulay e Priestley, 1992), appare, anch'esso, utile solo in fase di progetto.

Il terzo basato sulla relazione, dedotta dall'evidenza sperimentale, tra rigidità e resistenza flessionale degli elementi al variare del carico assiale e della percentuale di armatura (equazione di Sugano), risulta applicabile nella fase di verifica.

Sebbene dipenda dalla tipologia strutturale (geometria, armature, caratteristiche dei materiali) se e dove si formano fessure nella struttura e, quindi, sia difficile stabilire a priori se solo alcuni elementi o tutti possono essere interessati dal fenomeno della fessurazione, si può, comunque, concludere che utilizzare una rigidità ridotta nelle analisi lineari elastiche, portando a sovrastimare gli spostamenti, permette di operare in sicurezza.

Di contro, in termini di forze di progetto, ammettere una minore rigidità significa aumentare il periodo della struttura e, quindi, ridurre l'azione del sisma.

L'obiettivo del presente lavoro di tesi è la proposta di un procedimento numerico per l'analisi non lineare di strutture in conglomerato armato, basato sulla modellazione analitica dei fenomeni complessi di formazione di cracks e propagazione di interfacce. Essi contribuiscono

alla modifica ed all'evoluzione dei parametri meccanici, che descrivono la risposta non lineare degli elementi che compongono tali organismi strutturali.

Nel presente capitolo uno, dopo aver introdotto il problema, vengono spiegate le motivazioni dell'importanza dello stesso, sia dal punto di vista teorico sia da quello applicativo.

La simulazione numerica della formazione e della propagazione di cracks, con il complesso dei fenomeni che le accompagnano, gioca un ruolo fondamentale per l'integrità del complesso strutturale globale delle strutture in conglomerato armato e per le condizioni locali dei componenti che le compongono.

A tal fine, negli ultimi anni è stato sviluppato un enorme numero di modelli per la simulazione del cosiddetto "concrete cracking", basato su differenti teorie, quali ad esempio la meccanica del danno, della frattura, la teoria della plasticità e la combinazione di tali teorie, come pure metodi ad elementi finiti avanzati, adatti alla rappresentazione dei cracks (extended finite element method ed embedded crack models).

I modelli classici del "concrete cracking" sono basati sia sul cosiddetto "smeared crack approach" sia sul "discrete crack approach".

Il primo si basa sulla teoria della meccanica del continuo ed è caratterizzato dall'ipotesi che la dissipazione di energia avvenga lungo una banda di localizzazione delle deformazioni, mentre il secondo è caratterizzato dall'introduzione di discontinuità nel campo di spostamenti, mediante la modellazione di interfacce.

È stato effettuato un esame della letteratura al riguardo e si sono suddivisi i metodi classicamente studiati nei seguenti filoni: 1) Metodi basati sulla meccanica del danno continuo; 2) Metodi basati sulla teoria della plasticità; 3) Metodi basati sulla meccanica della frattura discreta o distribuita; 4) Metodi basati su modelli di danno con approccio a fibre.

Lo sviluppo di un modello di elemento finito capace, come già detto, di cogliere, in modo "efficace" dal punto di vista della completezza della modellazione ed "efficiente" dal punto di vista computazionale, in tutto od in parte tali fenomeni, in ambito tanto globale quanto locale, rappresenta la motivazione del presente lavoro; una tale tipologia di elemento finito sembra risultare non prevista nei codici di calcolo di uso corrente.

Innumerevoli sono i problemi pratici che investono il caso della fessurazione di tiranti in calcestruzzo armato, come quello che si può vedere nella Figura 1.1.



Figura 1.1: Ponte con tiranti in conglomerato cementizio armato.

Analogo discorso può farsi per i problemi legati alla fessurazione delle travi in conglomerato cementizio armato, come quelle da ponte riportate nella Figura 1.2.



Figura 1.2: Travi da ponte in calcestruzzo armato.

I casi di travi in calcestruzzo armato sono, del resto, ampiamente studiati da anni e sperimentati in laboratorio, come riportato nella Figura 1.3 e nella Figura 1.4.



Figura 1.3: Prove di laboratorio su travi in calcestruzzo armato.



Figura 1.4: Fessurazione di travi in calcestruzzo armato.

Partendo da un breve studio della cinematica SDA (Strong Discontinuity Approach) in generale ed esaminando, in dettaglio, quella del

modello trave, attraverso la definizione e lo studio di un tale elemento finito, risulta possibile effettuare un'analisi statica non lineare di un elemento strutturale in calcestruzzo armato (tirante o trave), considerando tra le non linearità del materiale, l'interazione fra le barre di armatura e la matrice in calcestruzzo, la formazione di fessure nel calcestruzzo e la plasticizzazione dell'acciaio.

Sono stati utilizzati, allo scopo, elementi "truss" o "beam", opportunamente modellati, per ridurre l'onere computazionale delle sofisticate, ma efficaci, modellazioni 3-D.

Nei codici di calcolo esistenti vengono modellati elementi beam a plasticità concentrata e/o diffusa e l'analisi dei risultati forniti, nei due tipi di modellazione, porta, in alcuni casi, a soluzioni globali con differenze dell'ordine del 30%.

Nella presente prima fase si è tenuto conto dell'interazione armatura - calcestruzzo, per conoscere la spaziatura delle fessure e l'influenza sui risultati di diverse ipotesi di comportamento delle interfacce.

In particolare, sia nel caso della trazione (truss) sia in quello della flessione (beam), è stato condotto lo studio dell'interazione armature - calcestruzzo, mediante la modellazione analitica del complesso fenomeno dell'aderenza - scorrimento (slip) fra acciaio e calcestruzzo.

In dettaglio, si è studiato il caso del tirante in composito calcestruzzo (matrice) ed acciaio (fibre) e si è iniziato quello della trave soggetta a flessione; tale studio è finalizzato alla determinazione di quegli elementi che definiscono il comportamento dell'elemento finito (funzioni di forma degli spostamenti generalizzati, matrici di rigidezza, campi di spostamento, deformazioni, stati tensionali nella sezione, etc.).

È stato effettuato lo studio completo di un tirante in calcestruzzo armato soggetto a carico monotono crescente, estendendo la metodologia, con le dovute modifiche formali, al caso più generale della trave armata a doppia armatura.

Tale ultimo caso è stato trattato fino alla definizione degli elementi fondamentali che governano il problema della trave nella fase di post incipiente fessurazione fino al collasso, riuscendo a cogliere in modo accurato il comportamento fenomenologico del materiale.

Il modello proposto è stato concepito per una sua naturale imple-

mentazione nel metodo degli elementi finiti ed ha, pertanto, come scopo la realizzazione, nell'ambito del predetto metodo, di un elemento che sia in grado di analizzare il fenomeno della fessurazione di travi in cemento armato, senza influire in maniera negativa sui tempi di calcolo.

Nel contempo, tale elemento è in grado di osservare l'apertura delle fessure, la loro spaziatura e la stima della possibile evoluzione in funzione dei carichi esterni; se opportunamente esteso, potrà, anche, valutare l'effettivo danneggiamento, rappresentato dalla sezione fessurata, nel calcolo degli spostamenti.

A tale scopo, sono stati implementati degli algoritmi che consentono di seguire il comportamento non lineare delle sezioni dalla fase integra alla fase fessurata.

Partendo dalla definizione delle caratteristiche geometriche e meccaniche delle membrature, gli algoritmi di calcolo consentono di verificare, per ogni sezione della membratura, lo stato tensionale, mediante procedimenti di tipo iterativo.

Il comportamento a trazione del calcestruzzo non è stato modellato con una legge di tipo strain-softening, che introdurrebbe una non oggettività sul modello numerico, bensì viene introdotta nel campo degli spostamenti del calcestruzzo una discontinuità forte, la cui ampiezza è governata dalle leggi della meccanica della frattura coesiva.

A differenza di altri modelli presenti in letteratura, quale quello in [61], nel caso in esame, la sezione non viene discretizzata a fibre, ma la trave risulta del tipo alla Eulero Bernoulli e non viene allo stato posta l'ipotesi semplificativa della scelta dell'altezza critica del calcestruzzo teso, pagando di contro il costo dell'impossibilità della determinazione delle tensioni tangenziali τ da taglio e della direzione ed evoluzione della frattura (fessure solo verticali).

Attraverso l'applicazione del Principio dei lavori Virtuali è stata possibile la scrittura delle equazioni differenziali di equilibrio che governano il problema e le relative condizioni al contorno; la soluzione delle stesse permette di passare dal caso lineare a quello non lineare, mediante l'aggiunta di due molle non lineari, di cui una traslazionale ed una rotazionale, che permettono di descrivere il comportamento softening del calcestruzzo teso e la determinazione dell'apertura della fessu-

ra anche nel caso della flessione.

Nella soluzione del problema non lineare vengono utilizzate le funzioni di forma determinate nel caso lineare e l'accuratezza della soluzione trovata è stata testata con l'aumento dei punti di Gauss utilizzati nelle necessarie integrazioni.

Il confronto fra analisi statiche non lineari condotte con il codice di calcolo contenente l'elemento finito, descritto, in dettaglio, nei capitoli successivi, chiude il presente lavoro, mediante tests sull'affidabilità, sulla velocità di convergenza della soluzione e sull'onere computazionale.

Sulla base dei risultati ottenuti, vengono tratte, infine, le conclusioni sul modello implementato ed i possibili sviluppi di indagini sul metodo.

La buona corrispondenza raggiunta tra i risultati numerici e quelli sperimentali ha rappresentato, infine, la base per il progetto di future campagne di indagini sperimentali, da svolgere presso il Laboratorio Ufficiale Prove Materiali del Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale (DICA), volte allo studio del comportamento non lineare di pilastri in c.a., armati con acciai aventi differenti proprietà meccaniche.

1.3. Contenuto della tesi

La presente tesi è organizzata in sei capitoli più un'appendice e la disposizione dei capitoli cerca di seguire la linea principale di studio.

L'appendice include informazioni aggiuntive sulla ricerca e la scrittura delle equazioni che governano il problema, la cui conoscenza si ritiene importante ai fini della comprensione del lavoro stesso.

Il capitolo uno contiene informazioni circa la motivazione, la metodologia e gli obiettivi dello studio condotto.

Nel secondo capitolo si illustrano e discutono brevemente le diverse metodologie di analisi impiegate per simulare i processi di fessurazione e di frattura delle travi in calcestruzzo cementizio armato nei vari approcci presenti in letteratura, compreso il contesto del metodo degli elementi finiti a fibre, evidenziandone i vantaggi e gli svantaggi dal punto di vista numerico.

Nel terzo capitolo viene illustrata l'analisi del problema secondo l'approccio "discrete crack", mediante l'esame del modello cinematico e dei legami costitutivi, compreso il complesso fenomeno di interazione tra l'acciaio ed il calcestruzzo, attraverso cui si trasmettono gli sforzi tra i due materiali e che prende il nome di "aderenza". Viene discussa, inoltre, la formulazione energetica del problema, fino alla definizione della matrice di rigidezza degli elementi monodimensionali soggetti a trazione ed a flessione. Vengono, altresì, esposti diversi modelli che correlano la tensione tangenziale di aderenza allo scorrimento, evidenziando quello che viene utilizzato nel presente lavoro e descritto per esteso nel relativo paragrafo del capitolo quattro.

Nel quarto capitolo, dopo aver richiamato la teoria alla base della formulazione specifica del metodo degli elementi finiti, si illustra la proposta di un procedimento numerico per l'analisi del quadro fessurativo all'interno di un elemento monodimensionale in conglomerato cementizio soggetto a carico monotono; la strategia numerica usata può essere facilmente implementata nel predetto metodo, senza comportare profonde modifiche agli algoritmi numerici standard. In particolare, si illustrano in dettaglio la formulazione e l'implementazione di un elemento finito monodimensionale di tipo cracked ed uncracked, in ambiente Mathematica®.

Nel quinto capitolo si descrive la strategia di soluzione adottata nell'analisi non lineare e la scelta di un metodo alla Newton - Raphson modificato, per la soluzione del problema dell'equilibrio.

Nel capitolo sei si conducono alcune applicazioni numeriche, utilizzando il metodo e la strategia numerica illustrata ad alcune tipiche prove, i cui risultati sono presenti in letteratura; chiudono il capitolo alcune considerazioni sulla convergenza e sulla stabilità della frattura.

Sulla base dei risultati, vengono tratte, infine, le conclusioni sul modello implementato e sui possibili sviluppi di indagini sul metodo.

CAPITOLO 2

METODOLOGIE DI ANALISI

2.1. Introduzione

Nella progettazione di strutture in calcestruzzo cementizio armato, il controllo delle deformazioni gioca un ruolo fondamentale per il soddisfacimento degli stati limite di esercizio.

Per una determinazione accurata della loro deformazione, gli elementi fessurati costituenti le strutture in conglomerato armato, dovrebbero essere descritti con le loro caratteristiche di rigidità effettive, sia flessionale sia a taglio.

Nei sistemi strutturali compositi, la cui matrice presenta un comportamento fragile, la fessurazione della predetta matrice e gli scorrimenti fra le fasi costituenti il composito causano gradienti di sforzo talmente grandi da rendere necessaria la modellazione, dal punto di vista cinematico, di discontinuità forti nel campo degli spostamenti e deboli in quello delle deformazioni, in aggiunta agli usuali fenomeni dissipativi descrivibili dal punto di vista costitutivo.

Inquadrando il problema in una scala di livello macroscopico, i due contesti più accreditati per modellare i meccanismi di nascita e propagazione di fessure appaiono quello della Meccanica della Frattura e quello della Meccanica del Continuo.

La Meccanica della Frattura ha come oggetto di studio la formazione e propagazione delle fratture nei materiali fragili, in relazione alle

cause che le hanno generate.

Si occupa, inoltre, di definire quello stato tensionale, superato il quale i microdifetti si propagano in modo repentino, fino a che il materiale va in crisi per uno stato tensionale inferiore a quello di rottura.

Tali meccanismi macroscopici di degradazione sono governati oltre che da fattori che intervengono nella meccanica classica, anche da altri fattori, quali l'energia di frattura. Assume, poi, particolare importanza la presenza di difetti microscopici nel materiale, che possono costituire l'innescò di tali processi.

Come già detto in precedenza, nel calcestruzzo è tipica la presenza di micropori e discontinuità nell'interfaccia cemento-inerti, che determinano una concentrazione di tensioni, agevolando l'innescò e la propagazione di fessure macroscopiche. Tali fenomeni comportano la degradazione delle caratteristiche meccaniche di resistenza e rigidità del materiale e sono caratterizzati da un comportamento di tipo *softening*, con diminuzione dello stato tensionale per successivi incrementi di tensione.

In relazione alla modellazione della frattura, in molti materiali, tranne quelli perfettamente fragili, la formazione di una fessura libera da tensioni è preceduta da una zona definita "di processo", in cui si sviluppano deformazioni anelastiche, responsabili del processo di *softening* e del degrado della resistenza.

Tali materiali si prestano ad essere descritti mediante il modello di frattura coesiva. Nei modelli a frattura coesiva gli effetti anelastici vengono concentrati in una interfaccia di discontinuità, dove il campo di spostamenti presenta discontinuità in qualche sua componente.

Il modello di frattura coesiva venne originariamente introdotto da Dugdale (1960) per i materiali duttili e da Barenblatt [2] nel 1962 per quelli fragili.

Le tensioni trasmesse attraverso tale interfaccia sono assegnate mediante una legge di *softening*, opportunamente tarata in funzione di prove sperimentali, che lega il vettore tensione all'interfaccia con il vettore salto di spostamenti nell'interfaccia stessa.

Pertanto, ad ogni incremento di salto di spostamento corrisponde un decremento di tensione, fino a quando si supera lo spostamento cri-

tico e si ha la formazione di frattura libera da tensioni.

Resta, tuttavia, il problema di quando si attiva la frattura; la strategia che generalmente si segue è quella di introdurre un criterio di attivazione di interfaccia. Se viene verificato, la frattura si attiva e si hanno incrementi nel salto di spostamento, secondo le leggi considerate.

Esistono in letteratura molti modi di approcciare lo studio della frattura e della localizzazione delle deformazioni e, pur se si vuole tentare di classificare tali approci in gruppi generali, i confini tra questi gruppi non risulterebbero completamente chiari, poiché tali metodi spesso si confondono per alcuni aspetti.

Dal punto di vista della Meccanica del Continuo, la frattura può essere definita come una instabilità del materiale, legata alla localizzazione ed all'accumulo di intensa deformazione in ristrette bande di un solido (slip-lines nei metalli, shear bands nei terreni e cracks nei materiali quasi fragili come il calcestruzzo).

I processi dissipativi responsabili della degradazione del materiale, come il fenomeno della fessurazione, inizialmente vennero studiati per mezzo dell'introduzione di leggi costitutive tensione-deformazione non lineari, con comportamento di tipo *softening*, basate sulla teoria tradizionale della plasticità [45] o sulla teoria del danno continuo [56, 57].

L'introduzione nelle leggi costitutive locali di un comportamento *softening* al crescere della deformazione consentiva di modellare i processi di degradazione del materiale, senza abbandonare il formalismo teorico-numericò della meccanica classica dei mezzi continui. Tali modelli potevano, infatti, essere facilmente implementati nei programmi agli elementi finiti esistenti, consentendo di sfruttare gli algoritmi già sviluppati e disponibili in questi codici.

Successivamente, studi di stabilità e biforcazione del campo tensionale [82, 87] hanno dimostrato che detti modelli presentano problemi di cattiva posizione a livello delle equazioni del continuo; tutto questo si traduce, a livello numerico, nella mancanza di oggettività nella risposta rispetto alla discretizzazione spaziale.

Infatti, l'introduzione di leggi costitutive di tipo *softening* nel contesto della meccanica del continuo induce il cosiddetto fenomeno della localizzazione delle deformazioni ovvero l'accumulazione dei processi dis-

sipativi di plasticità e/o danno entro bande di volume finito. Questo conduce a patologiche conseguenze nell'implementazione nel metodo degli elementi finiti, in cui si osserva che la dimensione della banda di localizzazione dipende in maniera forte dalla dimensione caratteristica dell'elemento.

Complessivamente, i principali metodi nati per la modellazione della nascita e della propagazione delle fessure nelle strutture in calcestruzzo armato possono raggrupparsi in tre grandi classi: il metodo al continuo con fratture distribuite (smeared crack approach), quello con fratture discrete (discrete crack approach), quello inquadrato all'interno del metodo agli elementi finiti con discretizzazione a fibre, cui possono aggiungersi le ulteriori classi dei metodi element-free; alcuni di questi vengono messi a confronto in [42, 72] e dal punto di vista numerico in [103], riuscendo a fare risaltare che la scelta del metodo va legata al tipo di problema da trattare.

2.2. Classificazione degli approcci presenti in letteratura per la modellazione della frattura nel calcestruzzo armato

Come introdotto al paragrafo precedente, diversi sono i contesti presenti in letteratura che classificano i modelli maggiormente accreditati, dal punto di vista cinematico, costitutivo o numerico, per descrivere i meccanismi di frattura e di collasso dei materiali a livello macroscopico: la Meccanica della Frattura e la Meccanica del Continuo.

All'interno di questi contesti, i tre diversi aspetti citati sopra sono in realtà tra loro intimamente correlati e spesso non vi è una linea netta di separazione tra i diversi approcci.

In particolare, i modelli presenti in letteratura per la simulazione del cosiddetto "concrete cracking", sono generalmente basati su differenti teorie, quali ad esempio:

- la meccanica della frattura;
- la meccanica del continuo (teoria della plasticità e del danno);
- la combinazione di tali teorie.

La loro implementazione numerica si basa sui metodi agli elementi finiti di tipo standard e su quelli di tipo avanzato, maggiormente adatti alla rappresentazione dei cracks (extended finite element method ed embedded crack models, elementi di interfaccia, modelli con discretizzazione a fibre).

Nel seguito si analizzano, in dettaglio, alcuni tra i diversi modelli classici del “concrete cracking” ed, in particolare, quelli che da un punto di vista cinematico, costitutivo e numerico, possono essere raggruppati in tre grandi classi:

- modelli al continuo con fratture distribuite, rientranti nello “smeared crack approach”, basato sulla teoria della meccanica del continuo e caratterizzato dalla dissipazione di energia lungo la banda di localizzazione, che dal punto di vista numerico vengono discretizzati con elementi finiti standard;
- modelli con fratture discrete, tipici del “discrete crack approach”, caratterizzati dall’introduzione di discontinuità nel campo degli spostamenti mediante la modellazione di interfacce, che dal punto di vista numerico si traducono nell’utilizzo di elementi finiti avanzati (X-FEM, ED-FEM, Interface Element, Element Free Galerkin Methods, Lattice Models, Discontinuous Galerkin Methods);
- modelli FEM a fibre, basati sulla teoria della meccanica del continuo e discretizzati con elementi finiti di tipo standard.

2.2.1. Smeared crack approach

Nel metodo al continuo con fratture distribuite (Smeared crack approach), proposto da Rashid nel 1968, si immaginano infinite fessure con apertura infinitamente piccola distribuite in tutto il corpo, considerato un mezzo continuo.

Detto approccio si presta molto bene ad essere implementato nell’ambito del metodo agli elementi finiti, poichè i comportamenti del continuo e delle fratture vengono trattati in maniera unica nel contesto della meccanica del continuo. Diversi sono i contributi presenti in letteratura, tra i quali [69, 74, 92, 90].

Tuttavia, l’approccio al continuo con fratture distribuite non è scevro da problemi. L’elemento finito attraversato esibisce la completa

perdita di rigidità in corrispondenza dell'innesco della frattura. Ciò provoca malcondizionamenti della matrice di rigidità globale del sistema, che tende a diventare singolare. Inoltre, la necessità di utilizzare legami costitutivi softening per simulare il decremento delle tensioni all'aumentare delle deformazioni, una volta superato il picco, rende la risposta del sistema dipendente dalla discretizzazione adottata per il dominio (mesh dependency).

Dal punto di vista della determinazione dell'ampiezza della frattura, nell'ambito dello "smeared crack approach", viene fatta la classificazione in "crack band approach" [4] e "bond-slip approach" [98]. Come riportato anche in [90], nel primo approccio l'ampiezza della frattura viene valutata sulla base di una equivalenza energetica in una banda di localizzazione detta "crack band", mentre nel secondo viene determinata attraverso il calcolo dell'aderenza-scorrimento lungo la barra in acciaio in maniera classica.

I due precedenti approcci possono essere nuovamente riuniti attraverso l'introduzione del concetto di lunghezza caratteristica o effettiva [69] ed il calcolo dell'ampiezza della frattura viene in tal caso determinato moltiplicando la deformazione principale di trazione per la predetta lunghezza [98, 16].

In definitiva, è stato osservato che, generalmente, mentre il crack band approach si adatta bene ad elementi in calcestruzzo debolmente armati, il bond-slip approach risulta più indicato nel caso di armatura in quantità relativamente più alta.

Con riferimento al calcestruzzo, al giorno d'oggi vengono utilizzati due modelli basati sull'approccio al continuo con fratture distribuite: il modello con frattura fissa (fixed-crack model) [7] e il modello con frattura rotante (rotating-crack model) [32, 53].

Nel primo modello non appena la tensione principale di trazione raggiunge il valore di resistenza a trazione del calcestruzzo, la frattura si forma ortogonalmente alla corrispondente direzione principale, mantenendo costante la propria direzione.

Viceversa, il modello con frattura rotante prevede la possibilità che la direzione della frattura cambi durante il processo di carico. Il modello standard di frattura rotante, proposto da Cope nel 1980, è affetto da

problemi di stress locking. Alcuni autori nell'intento di ridurre le tensioni spurie hanno usato il modello in combinazione con legami costitutivi con danno.

In [32] viene formulato un modello con frattura rotante, nel quale l'effetto del bond-slip viene mediato sulla lunghezza dell'elemento, coincidente con quella della barra in acciaio, rendendo il modello in questione consistente con l'approccio a fratture distribuite, discretizzato all'interno dell'ambito degli elementi finiti standard.

In [96] viene formulato un modello con fratture distribuite con direzioni rotanti, nella fase di modellazione del fenomeno di formazione di microfatture, mentre nella successiva fase della nascita di macrofratture vien introdotto un modello a discontinuità immerse nel campo degli spostamenti, sempre all'interno dell'ambito degli elementi finiti standard.

Altra classificazione può essere fatta tra i modelli "microscopici" e quelli "macroscopici".

Nei primi vengono modificate le equazioni costitutive dei materiali acciaio [16] o calcestruzzo nella fase post cracking, mentre nei secondi si fa riferimento al meccanismo di aderenza-scorrimento di tipo semplificato tra i detti materiali [36, 89, 52].

Sotto determinate condizioni di vincolo e di legame costitutivo dell'interfaccia, in [88] è stata determinata la soluzione delle equazioni differenziali di equilibrio che governano il comportamento di una barra di acciaio singola immersa nella matrice di calcestruzzo e soggetta ad un carico assiale di tipo generico. In tale lavoro viene utilizzato il legame di aderenza proposto da [Filippou et al., 1983 b] e quello bilineare per l'acciaio; viene, inoltre, considerato trascurabile il contributo del calcestruzzo allo scorrimento relativo (caso di area di calcestruzzo grande rispetto a quella della barra in acciaio).

La soluzione in forma chiusa viene ricavata solo nel caso di legame τ - s lineare; nel caso esponenziale ad esponente frazionario viene risolta mediante sviluppo in serie di funzioni.

Nel successivo lavoro [89] viene riproposto il metodo di soluzione delle equazioni differenziali che governano il problema, eliminando la restrizione della trascurabilità del contributo della deformazione del

calcestruzzo allo scorrimento relativo. Viene, in definitiva, studiato il caso della fessurazione del provino (tirante) in acciaio e calcestruzzo soggetto a trazione monoassiale, verificando il buon accordo tra i risultati ottenuti e quelli di prove sperimentali in laboratorio reperite in letteratura [13, 84, 36].

Già nel passato approcci basati sul modello locale di aderenza avevano prodotto soluzioni in forma chiusa, solo nell'ipotesi fortemente semplificativa della trasformazione della relazione non lineare in una lineare [Lee et al., 1987] o multilineare a quattro tratti [Tassios e Yanoopoulos, 1981].

In modo analogo, in [54] viene descritta l'interazione tra acciaio e calcestruzzo secondo la legge esponenziale ad esponente frazionario indicata in [16]; la risposta del composito calcestruzzo armato viene ottenuta mediante l'estensione del concetto di energia di frattura del calcestruzzo al predetto composito, attraverso la soluzione in forma chiusa dell'equazione differenziale per il bond-slip, sotto condizioni al contorno omogenee per lo scorrimento ed il suo gradiente lineare.

Non introducendo alcuna delle leggi di *softening* definite trazione-separazione, che legano le tensioni nel calcestruzzo con una relazione tensione/apertura della frattura, i metodi che utilizzano modelli costitutivi del calcestruzzo che tengono conto della capacità di resistenza a trazione del calcestruzzo integro tra due cracks (effetto noto come "tension stiffening"), possono essere inquadrati all'interno dell'approccio esaminato nei modelli cosiddetti macroscopici; tra questi può citarsi il modello di tension stiffening descritto in [94], che evidenzia la dipendenza del ramo softening della curva esponenziale tensione-deformazione dal rapporto di armatura e da quello fra i moduli elastici tra acciaio e calcestruzzo.

Il predetto modello viene esteso anche al caso di trave soggetta a flessione, assumendo che le fessure siano ortogonali alle armature di acciaio, attraverso il concetto di area effettiva (zona tesa nella sezione soggetta a flessione) e l'utilizzo di un modello a fibre, discretizzando la sezione a strati, soggetti a stati di sforzo uniassiale; inoltre, viene proposto un approccio semplificato per tenere conto del taglio, considerando un elemento di trave alla Timoshenko assieme ad un modello bidi-

mensionale a fratture distribuite di tipo rotante, quale quello proposto da Collins e Vecchio nel 1986.

Sempre nell'ambito dell'approccio a fratture distribuite, anche se in accordo al "fictitious crack model" di Hillerborg et al. [37] in relazione alla determinazione dell'ampiezza massima della fessura attraverso il concetto dell'energia di frattura, un modello misto che combina i due approcci a frattura fissa e rotante, viene proposto in [78].

In [15] viene presentato un nuovo approccio agli elementi finiti per modellare l'aderenza tra acciaio e calcestruzzo. In questo modello l'acciaio è rappresentato da elementi "truss" circondati da calcestruzzo, con nodi delle meshes non necessariamente coincidenti.

Come già precisato, la fessurazione nelle strutture in calcestruzzo armato è generalmente influenzata dalla distribuzione di sforzi lungo l'interfaccia tra acciaio e calcestruzzo. Per esempio, nel caso di un tirante in calcestruzzo armato, quando appare la prima fessura nel punto più debole della struttura, la tensione nel calcestruzzo nella zona fessurata scende a zero, mentre il carico viene totalmente trasferito alla barra in acciaio. Gli sforzi vengono progressivamente trasferiti dall'acciaio al calcestruzzo.

Il tener conto di questi effetti sembra essere essenziale per la corretta predizione della fessurazione nel calcestruzzo cementizio armato. Esistono diversi modelli per rappresentare l'aderenza tra acciaio e calcestruzzo. Per esempio, Ngo e Scordelis [67] proposero degli elementi molla associati ad una legge lineare per collegare i nodi del calcestruzzo e dell'acciaio. Questi elementi di collegamento di spessore nullo, introdotti all'interfaccia tra acciaio e calcestruzzo, vennero estesi permettendo l'uso di leggi non lineari [21, 60, 83].

Nel modello proposto in [15], dopo avere evidenziato che esistono già speciali elementi finiti che racchiudono nello stesso elemento il comportamento dei materiali e l'effetto dell'aderenza (X-FEM, ED-FEM), che, oltre alle difficoltà di creazione delle meshes, presentano un elevato costo computazionale, gli elementi cubici di calcestruzzo sono attraversati da un'unica fibra in acciaio con un solo nodo sulla barra in acciaio posto all'interno del cubetto; l'equilibrio delle forze di aderenza, calcolate attraverso il legame di aderenza - scorrimento tra acciaio e

calcestruzzo, viene imposto in quel punto e riportato sui nodi del cubetto di calcestruzzo tramite le funzioni di forma. L'eterogeneità delle caratteristiche meccaniche del calcestruzzo viene descritta mediante una distribuzione attorno al valore medio della resistenza del materiale lungo il provino monodimensionale. In un tale modello appare evidente che la posizione delle fessure dipende dalla distribuzione delle resistenze del calcestruzzo lungo il provino (eterogeneità del materiale), mentre lo stato finale del processo è influenzato dalla distribuzione degli sforzi che nascono per effetto dell'aderenza (scelta del legame di aderenza-scorrimento), che ha una diretta influenza sul numero finale di fessure. Le limitazioni del modello proposto stanno nelle stesse ipotesi principali, per la nascita ad esempio di concentrazioni di sforzi legati all'uso di elementi truss, eliminabili con tecniche di regolarizzazione o mediante l'utilizzo di regole per la creazione delle meshes, trascurando elementi di calcestruzzo di dimensioni inferiori al diametro della barra in acciaio.

Nel caso di travi in calcestruzzo armato soggette a flessione, un altro esempio di approccio con fratture distribuite su una lunghezza caratteristica è reperibile in [46], in cui il modello costitutivo viene applicato in un metodo iterativo sugli strati in cui è discretizzata la sezione trasversale dell'elemento, come previsto anche in [35].

Nel lavoro [81] viene trattato il comportamento dell'interfaccia acciaio calcestruzzo con espresso riferimento a dati sperimentali. Forze di trazione o compressione su una barra di acciaio immersa inducono forze di interazione nella matrice di calcestruzzo che la circonda. L'adesione fisico chimica riesce a trasferire fra i due materiali solo carichi di modesta entità, mentre carichi più elevati vengono trasferiti per mezzo dell'attrito e dell'ingranamento fra le particelle. Il limite di aderenza può essere raggiunto tramite sfilamento della barra od espulsione del copriferro. Il comportamento del legame di aderenza è fortemente influenzato dalla forma e dalle dimensioni delle nervature, dalla resistenza e composizione del calcestruzzo, dalle caratteristiche meccaniche dell'acciaio, dal confinamento garantito dalle armature trasversali, dal tipo e dalla storia di carico e dalla velocità di applicazione dello stesso.

Infine, tra le evidenze riscontrate all'interno del presente approccio a fratture distribuite è stato mostrato che nei problemi di localizzazione

l'energia dissipata da un mezzo continuo con comportamento softening è nulla, fenomeno che implica la non oggettività della risposta.

Al fine di superare tale difficoltà venne sviluppato il già citato modello, detto Crack Band Model [4], nell'ambito del quale si immagina di distribuire le fratture in una regione ristretta del corpo, chiamata banda di localizzazione e detta ipotesi si trova in accordo con le osservazioni sperimentali; per definire il legame costitutivo del continuo, in questo modello l'energia di frattura definita viene distribuita nello spessore della banda.

Infine, è il caso di evidenziare che l'approccio al continuo con fratture distribuite può dare luogo ad una sovrastima delle tensioni tangenziali che si sviluppano in seno alla struttura, effetto noto con il nome di shear locking. Inoltre, sono richieste discretizzazioni geometriche molto fitte al fine di cogliere gli spostamenti, che nella banda di localizzazione presentano brusche variazioni.

2.2.2. Discrete crack approach

L'approccio con fratture discrete è basato sul modello di frattura coesiva (cohesive crack model), come riportato ed ampiamente rivisto nel lavoro [27].

Questo approccio fu introdotto negli anni sessanta da [Dugdale, 1960] e da Barenblatt [2] nel 1962; l'estensione di tale studio sulla frattura al caso del calcestruzzo venne effettuata da Hillerborg et al. [37].

Il materiale viene caratterizzato da due coppie di leggi costitutive:

- una relazione tensione/deformazione per il continuo non danneggiato, solitamente elastica o elastoplastica con incrudimento positivo;
- una relazione tensione/apertura della frattura con comportamento softening per l'interfaccia.

Per simulare la frattura duttile o fragile si introducono diverse leggi di *softening* definite trazione-separazione del tipo:

$$\left[[u] \right] = f(t_s)$$

dove:

$$\left[[u] \right] = \left([u_n], [u_m], [u_s] \right)$$

è il vettore che ha come componenti i salti di spostamento nelle varie direzioni sulla superficie di interfaccia e

$$t_s = (\sigma_n, \sigma_{nm}, \tau_{ns})$$

è il vettore che raccoglie le tensioni che si verificano in direzione degli assi che orientano la frattura.

La legge trazione-separazione per come è stata introdotta coinvolge tutti e tre i modi di apertura della fessura. In realtà, la relazione diventa più semplice se qualche componente del salto di spostamento si può trascurare. Generalmente, la relazione trazione-separazione viene introdotta in corrispondenza del modo I di sola separazione.

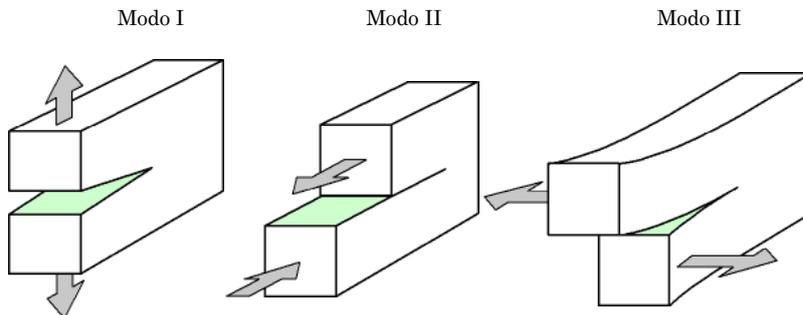


Figura 2.1: Modi di apertura e sollecitazione di una frattura.

In Figura 2.1 sono rappresentati di tre possibili modi di sollecitazione di una fessura tradizionalmente considerati nell'ambito della meccanica della frattura: modo I, in cui si ha apertura della fessura in direzione ortogonale al piano della stessa, modo II in cui si ha scorrimento nel piano della fessura secondo la direzione di propagazione, e modo III di scorrimento nel piano della fessura in direzione ortogonale alla direzione di propagazione. La formazione e propagazione di una generica fessura è data dalla combinazione dei tre modi base menzionati. La frattura risulta descritta dal seguente legame costitutivo:

$$\begin{cases} [[u]] = 0 & \sigma < f_{ct} \\ [[u]] > 0 & \sigma = f_{ct} \end{cases}$$

L'idea di base è, quindi, quella di introdurre all'interno del solido discontinuità (elementi di interfaccia) governate dalle predette leggi di trazione-separazione, quando viene soddisfatto il criterio di attivazione scelto.

Nell'ambito del metodo degli elementi finiti, a cui restringiamo la nostra attenzione, esistono due diverse strategie che consentono di introdurre le discontinuità nel campo di spostamento.

Una possibilità è quella di considerare discontinuità nel campo di spostamento tra le interfacce interelemento ovvero tra le interfacce poste tra elementi finiti adiacenti.

Un'altra alternativa è quella di considerare le discontinuità nel campo di spostamento lungo interfacce intraelemento tramite speciali funzioni di arricchimento dell'interpolazione agli elementi finiti.

Questi metodi consentono di cogliere una frattura comunque orientata, mantenendo la discretizzazione invariabile. Essi richiedono la definizione di un metodo, che consenta di stabilire l'orientazione della frattura nel solido.

Allo stato attuale esistono due grandi famiglie di metodi che arricchiscono la cinematica, consentendo di incorporare discontinuità forti intraelemento.

In molti materiali, fatta eccezione per quelli perfettamente fragili, la formazione di una frattura libera da tensioni è preceduta dalla formazione di una zona di processo (*Fracture Process Zone*, FPZ) ovvero di una regione caratterizzata dallo sviluppo e dalla crescita di microfessure o altri difetti che riducono la coesione del materiale e sono responsabili del comportamento softening.

Per modellare questo comportamento sono comparsi i modelli di frattura coesiva, che assumono che gli effetti anelastici irreversibili e dissipativi, legati alla microfessurazione nella zona di processo, si concentrano in una interfaccia di spessore nullo attraverso la quale il campo di spostamento presenta discontinuità in qualche sua componente e attraverso la quale è possibile il trasferimento di sforzi.

Come già detto, i primi modelli di frattura coesiva risalgono ai lavori di [Dugdale, 1960] e Barenblatt [12]. Modelli di questo tipo sono stati proposti per i metalli e i materiali compositi con il nome di *Cohesive*

Zone Models e per il calcestruzzo sotto il nome di *Fictitious Crack Models (FCM)*, Hillerborg et al., 1976 [37]) (v. Figura 2.2).

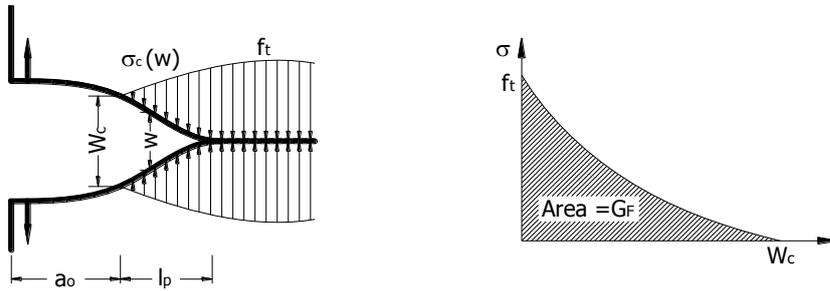


Figura 2.2: Fictitious Crack Model, FCM (Hillerborg et al., 1976).

Le trazioni trasmesse all'interfaccia sono prescritte tramite una legge costitutiva trazione-separazione (*traction separation law*), che lega il vettore tensione all'interfaccia al vettore salto di spostamento, detto anche vettore separazione, che ha per componenti gli spostamenti relativi tra i due lembi dell'interfaccia di discontinuità. In presenza di carichi monotoni le tensioni all'interfaccia via via decrescono fino ad annullarsi quando viene raggiunto un certo spostamento critico e l'interfaccia diviene libera da tensioni (*traction free*). I diversi processi dissipativi coinvolti vengono introdotti in forma fenomenologica nella legge costitutiva dell'interfaccia.

Per simulare la frattura fragile o duttile sono state introdotte diverse leggi trazione separazione di tipo lineare, bilineare o esponenziale. Nella Figura 2.3 sono rappresentate tre leggi coesive trazione -separazione stilizzate:

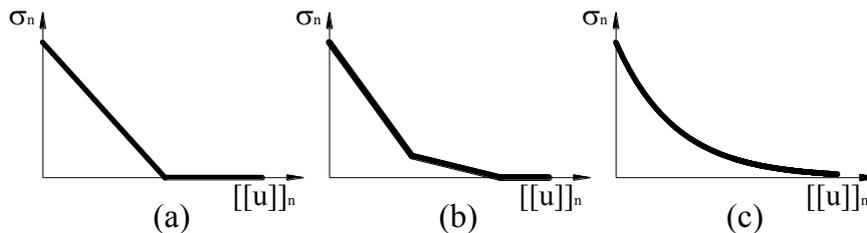


Figura 2.3: Leggi trazione-separazione a) lineare b) bilineare c) esponenziale.

in cui σ_n è la componente normale del vettore tensione e $[[u]]_n$ è la componente normale del salto di spostamento (apertura della frattura coesiva).

Spesso le leggi trazione separazione vengono descritte in termini di due parametri indipendenti, che possono essere la resistenza a trazione f_t e l'energia di frattura o lavoro di separazione G_f , che rappresenta il lavoro necessario per creare una superficie unitaria di frattura pienamente sviluppata, ovvero priva di tensioni.

La scelta della legge coesiva è importante per materiali quasi fragili. Nella Figura 2.4 viene rappresentato tale legame per un'interfaccia rigido dissipativa nel caso monodimensionale.

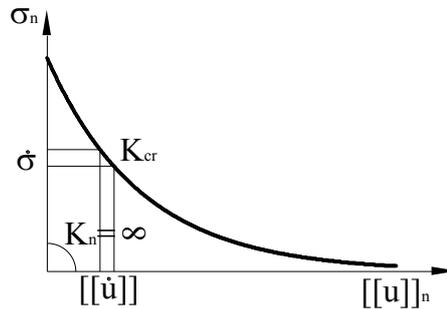


Figura 2.4: Curva tensione spostamento per un'interfaccia rigido-dissipativa.

L'area sottesa dalla curva rappresenta l'energia per unità di area della superficie di discontinuità necessaria per avere la completa decoesione del materiale e viene denominata energia di frattura per modo I.

Nel caso generale, la filosofia è quella di introdurre un criterio di attivazione dell'interfaccia e di far avvenire gli incrementi negli spostamenti relativi quando il criterio risulta soddisfatto.

È possibile considerare anche un'interfaccia elasto-dissipativa. In questo caso, l'interfaccia ha un comportamento inizialmente elastico e la separazione delle superfici di interfaccia adiacenti è possibile anche prima che venga raggiunta la resistenza limite per la presenza di una parte elastica reversibile.

Nella Figura 2.5 viene rappresentato il predetto legame tensione-salto di spostamento per una interfaccia elasto-dissipativa.

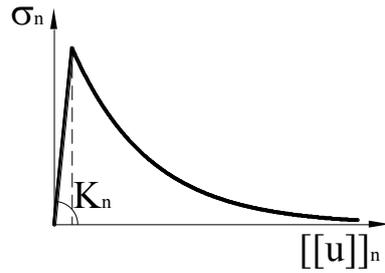


Figura 2.5: Curva tensione spostamento per un'interfaccia elasto-dissipativa.

In realtà, il fenomeno è di tipo dissipativo e l'introduzione di un'elasticità iniziale non è in accordo con l'evidenza fisica. L'impiego di una elasticità fittizia iniziale viene effettuato solo per motivi numerici, cercando di ridurre gli effetti di natura elastica trattando i coefficienti elastici come parametri di penalizzazione e, quindi, cercando di fissare il loro valore più alto possibile in modo che il comportamento elastico tenda a quello rigido [102, 75]. Ovviamente, il limite di questo metodo sta nel fatto che la rigidità non può essere accresciuta oltre un certo valore, che dipende dalle proprietà computazionali del calcolatore e del linguaggio di programmazione usato.

Nei modelli con interfaccia rigido plastica la distribuzione delle forze di coesione è sconosciuta e può essere determinata non dalla legge costitutiva ma dall'equilibrio.

Esistono diversi approcci numerici che consentono di includere il modello di frattura coesiva nel metodo degli elementi finiti.

L'uso del modello di interfaccia coesiva è stato inizialmente legato all'uso di elementi di interfaccia interelemento. In questo caso occorre conoscere a priori il percorso della frattura, da dati sperimentali o perché suggerito dalla particolare struttura del materiale, in modo da poter posizionare gli elementi di interfaccia lungo le linee di frattura potenziale oppure occorre ricorrere all'uso di sofisticate tecniche di *remeshing* per poter seguire il percorso della fessura. Questo fatto costituisce senza dubbio un grosso svantaggio dal punto di vista computazionale. Nel caso di questi modelli discreti per evitare problemi numerici è spesso necessario introdurre un'interfaccia inizialmente elastica cercando di fissare la rigidità elastica il più alta possibile compatibilmente con i

limiti numerici.

In seguito alla comparsa dei cosiddetti *Elements with Embedded Discontinuities* [25], ovvero di elementi con discontinuità incorporate, in cui la cinematica a livello elementare viene arricchita in modo da potere introdurre discontinuità nel campo di spostamento all'interno dell'elemento finito, il concetto di frattura coesiva è stato introdotto per descrivere il comportamento dell'interfaccia immersa nell'elemento finito.

Successivamente, in seguito alla comparsa del metodo detto X-FEM (eXtended Finite Element Method) [8], che arricchisce la cinematica per mezzo del concetto di partizione dell'unità, il modello di frattura coesiva è stato impiegato anche in tale contesto [99].

In ciascuno di questi metodi si fa uso di discontinuità forti ovvero di discontinuità nel campo di spostamento, le quali a seconda della formulazione e della strategia numerica impiegata vengono introdotte nelle interfacce di elementi adiacenti o vengono incorporate nella cinematica dell'elemento.

Sempre nell'ambito dell'approccio in esame, è stata proposta una nuova formulazione per l'analisi numerica del problema della frattura, che si inquadra nell'ambito dei metodi "privi di elementi", per cui la discretizzazione del dominio è puramente nodale, eliminando il concetto di connettività. La formulazione è basata sulla costruzione di funzioni di forma attraverso una approssimazione mobile ai minimi quadrati, già nota in letteratura, la cui peculiarità consiste nella definizione di un funzionale generalizzato dell'energia potenziale totale di tipo lagrangiano aumentato. Tale approccio risolve, in maniera computazionalmente efficiente, alcuni problemi tipici di questi metodi e consente di introdurre un grande numero di moltiplicatori lagrangiani, senza aumentare la dimensione del problema ed inducendone peraltro la convessità.

Tale strumento ha consentito la definizione di un nuovo modello per la simulazione della frattura, basato sull'imposizione di condizioni di interfaccia in corrispondenza dei lembi di una "frattura virtuale".

In [22] viene presentato un modello coesivo che, partendo da un metodo "meshless" quale l'Element Free Galerkin Method, introduce un esempio di frattura discreta di tipo coesivo, costituita da segmenti

(crack segments) che passano attraverso i nodi.

In [66] è apparso interessante il modello cinematico di fessura flessionale discreta, descritto dalla rotazione rigida tra le facce del crack attorno all'apice della fessura; tale rotazione rigida è correlata allo scorrimento che si verifica tra le barre in acciaio e le facce della fessura nel calcestruzzo ed alla distanza delle barre dall'apice della fessura.

Un modello con fratture discrete basato sul concetto di crack coesivo/fittizio, che utilizza elementi di interfaccia con legami costitutivi bilineari con softening, viene presentato in [102].

In linea del tutto generale, relativamente alla frattura coesiva nel calcestruzzo, dall'esame del legame costituivo a trazione del calcestruzzo si nota che è ancora capace di trasmettere tensioni nonostante sia stata superata la tensione a rottura.

Tale fenomeno è dovuto essenzialmente alla resistenza fornita dagli inerti di collegamento presenti nella miscela cementizia, che si trovano lungo la fessura e che contribuiscono in qualche modo a limitare l'ampiezza della fessura stessa.

In corrispondenza della fessura, in particolare nell'intorno della punta della fessura (*“crack tip”*), si verificano fenomeni non lineari quali plasticizzazione della sezione e microfessurazione.

Secondo il modello coesivo, questo processo inelastico localizzato può essere rappresentato dalla “zona di processo”, consistente in un sistema di microfessure più o meno parallele tra loro, ma discontinue e normali alla direzione del carico.

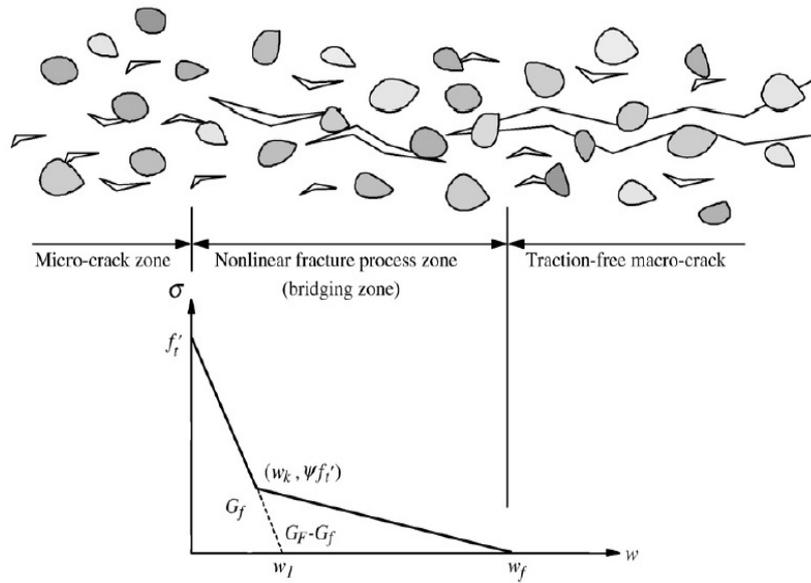


Figura 2.6: Meccanismi di fessura coesiva nel calcestruzzo e modello softening.

Dalla Figura 2.6 si evince che è possibile distinguere due zone: una, detta zona coesiva, danneggiata ma dove vengono ancora trasmesse tensioni da una parte all'altra della frattura ($w < w_f$); l'altra dove è avvenuta la completa apertura ($w > w_f$) e risulta perciò scarica.

Una grandezza importante, atta a descrivere la resistenza del calcestruzzo a trazione, è rappresentata dall'energia di frattura G_f , che non dipende dal volume del corpo, ma solo dalla superficie fratturante.

Essa rappresenta, inoltre, una caratteristica intrinseca del materiale e definisce il lavoro necessario per far propagare di un'area unitaria la frattura. Data tale definizione, l'energia di frattura si calcola con la seguente espressione:

$$G_f = \int_0^{w_f} \sigma dw$$

che rappresenta l'area sottesa dalla curva definita dalla relazione tensione/apertura della frattura, dove σ è la tensione normale trasmessa e w è l'apertura della frattura.

La distribuzione di tensione si suppone essere uguale alla tensione

a trazione ultima in corrispondenza del vertice della fessura fittizia e decresce fino ad annullarsi, seguendo la legge del *softening* del materiale adottata; il valore zero si ha in corrispondenza dell'apice della fessura reale, dove l'apertura della fessura è uguale all'apertura critica w_f .

L'estremità della fessura fittizia si propaga quando il criterio di attivazione di interfaccia nella direzione indagata viene soddisfatto.

L'estremità della fessura reale si propaga quando l'apertura della fessura è uguale o più grande rispetto all'apertura critica della fessura w_f e segue il percorso definito dalla fessura fittizia.

Si può notare che il modello coesivo trova giustificazione nel comportamento del calcestruzzo, il quale è ancora capace di trasferire tensioni una volta superata la resistenza a trazione.

Nel caso di cemento armato, il ramo di *softening* può essere modificato sommando alla resistenza offerta dagli inerti il contributo dovuto alla trazione assorbita dal calcestruzzo compreso tra due fessure per l'aderenza con le barre d'acciaio. Questo è l'approccio generalmente utilizzato nelle analisi agli elementi finiti, che nell'algoritmo utilizzato implementano un legame costitutivo del calcestruzzo teso in grado di modellare il fenomeno del *tension stiffening*.

In generale, con specifico riferimento all'approccio in questione, i fattori che influenzano l'ampiezza delle fessure possono individuarsi nella tensione nell'acciaio in corrispondenza della sezione fessurata, nel diametro della barra, nel copriferro, nella percentuale meccanica di armatura, nell'altezza della sezione dell'elemento considerato e nel tipo di carico.

Tra i fattori che influenzano, invece, la spaziatura delle fessure e cioè la distanza tra due fessure consecutive, è possibile ricordare l'aumentare della resistenza a trazione del calcestruzzo e del diametro delle barre, la tensione di aderenza, la percentuale di acciaio ed il coefficiente di omogeneizzazione.

Partendo dal modello presentato in [104] ed esteso in [105] mediante l'eliminazione della precedente ipotesi restrittiva del considerare trascurabile il contributo del calcestruzzo allo scorrimento relativo (caso di area di calcestruzzo grande rispetto a quella della barra in acciaio), uno degli stessi autori ha proposto in [106] un modello con fratture discrete

nato dall'assemblaggio di elementi integri, comprendenti l'approccio del fenomeno del bond-slip [104, 105], con elementi di interfaccia con comportamento softening, tra le facce della frattura nel cilindro di calcestruzzo, modellati tramite molle non lineari; in tale lavoro la rigidità della molla viene posta pari a zero, per simulare il brusco decadimento della resistenza del calcestruzzo teso in tale zona di processo.

In [106] si è, quindi, analizzato il complesso fenomeno del contributo irrigidente del calcestruzzo teso, denominato tension stiffening, in un elemento di calcestruzzo armato soggetto ad uno sforzo di trazione applicato alle barre in acciaio.

Tale elemento si ipotizza composto da una barra in acciaio circondata da un cilindro in calcestruzzo. Per effetto dell'applicazione di una forza di trazione ad entrambi gli estremi della barra si produce una tensione variabile lungo la barra ed il calcestruzzo, dovuta alle tensioni tangenziali che agiscono all'interfaccia comune tra i suddetti componenti. Al crescere del carico applicato, le deformazioni e gli sforzi nel cilindro in calcestruzzo aumentano e ad un certo livello di carico si raggiungerà il criterio di "rottura". Il fenomeno del cracking causa la redistribuzione delle tensioni e delle deformazioni, come pure un considerevole incremento dell'allungamento del composito dovuto all'apertura del crack e come conseguenza la rigidità dello stesso composito decresce. Ulteriori incrementi del carico possono produrre nuovi cracks. La fase di carico termina quando la barra si snerva agli estremi ed in corrispondenza delle sezioni fessurate. Questo continuo processo di variazione della rigidità con il carico applicato è stato formulato in un nuovo modello monodimensionale, che produce una stima completa della variazione degli sforzi e degli spostamenti nel calcestruzzo e nella barra in acciaio; riesce anche a localizzare i cracks che sono di tipo "discrete" e la loro ampiezza ad ogni livello di carico.

2.2.3. Il modello FEM a fibre

Tra i modelli classici presenti in letteratura sono diffusi anche quelli di elemento trave multifibre, utilizzati per analisi non lineari di strutture in calcestruzzo cementizio armato, nell'ambito del metodo degli elementi finiti in ingegneria sismica [61, 33].

In tali casi, generalmente, il costo computazionale delle analisi viene ridotto dall'uso di una cinematica globale di trave per tutte le fibre, per le quali si possono utilizzare i relativi modelli costitutivi di tipo non lineare.

Il modello costitutivo del calcestruzzo deve, comunque, tenere conto dei fenomeni quali la riduzione della rigidezza del materiale dovuta alla fessurazione ed il suo parziale recupero a seguito della chiusura delle fessure, l'accumulo di deformazione plastica concomitante al danno, il degrado della resistenza a trazione, etc..

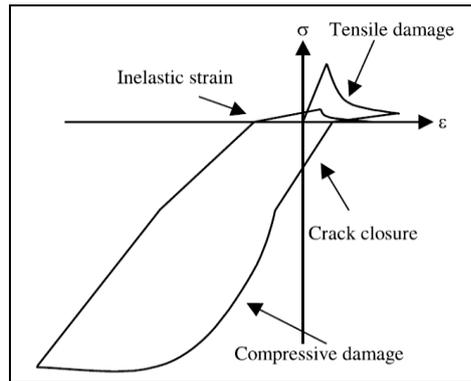


Figura 2.7: Modello costitutivo monodimensionale per il calcestruzzo.

Nel lavoro [19] gli autori hanno analizzato il complesso fenomeno della modellazione delle strutture in calcestruzzo armato soggette ad azione sismica.

A causa della complessità del comportamento dei materiali costituenti e delle strutture, l'attenzione è stata rivolta allo sviluppo di modelli accurati e stabili computazionalmente, del tipo ad elementi finiti, con l'uso di modelli semplificati a fibre e con l'ulteriore uso di macroelementi che tengano conto dell'interazione terreno struttura.

Il legame costitutivo dell'acciaio usato è del tipo elasto plastico in-crudente (incrudimento cinematico non lineare), mentre quello del calcestruzzo cerca di tenere in conto la diminuzione di rigidezza dovuta all'apertura delle fessure la sua ripresa nel caso di chiusura delle stesse, in aggiunta alla deformazione inelastica dovuta al danno; in tal sen-

so viene utilizzato un modello di danno scalare.

Pur includendo aspetti che sono tipici degli altri approcci presentati, nel lavoro [73] della bibliografia gli autori hanno analizzato il complesso fenomeno della crisi del materiale degli elementi delle strutture in calcestruzzo armato, mediante il CSDA (Continuum Strong Discontinuity Approach) e la mixture theory, considerando il calcestruzzo armato come un composito di calcestruzzo non armato (matrice) e due fasci di lunghe fibre ortogonali.

Secondo l'ipotesi di base della mixture theory un composito è un continuo nel quale ogni volume infinitesimo è occupato simultaneamente da tutti i componenti.

Il modello bidimensionale di composizione degli sforzi prevede l'assunzione di un sistema meccanico in parallelo in cui tutti i componenti sono soggetti alle deformazioni del composito ed i corrispondenti sforzi del composito sono dati dalla somma pesata (in termini di frazione di volume) degli sforzi di ogni componente.

Per la matrice in calcestruzzo sono previsti due distinti modelli costitutivi per i distinti casi di danno in trazione ed in compressione.

Per le barre in acciaio è stato previsto il modello elasto - plastico uniassiale e quello composto cosiddetto slipping - fiber model (axial resisting + bond slip model).

Il modello prevede anche il cosiddetto "effetto dowel", che compone il contributo di due fenomeni fondamentali: la flessione della barra dovuta all'apertura della fessura ed il taglio che si trasferisce direttamente sulla barra.

Nella tesi [33] è stato analizzato il complesso fenomeno della fessurazione di travi in cemento armato soggette a flessione, attraverso una modellazione agli elementi finiti.

A tale scopo sono stati implementati degli algoritmi che consentono di seguire il comportamento non lineare delle sezioni dalla fase integra alla fase fessurata fino al collasso.

Partendo dalla definizione delle caratteristiche geometriche e meccaniche delle membrature, gli algoritmi consistono nel verificare, per ogni sezione in cui la membratura è stata discretizzata, l'equilibrio e la congruenza dello stato tensionale mediante procedimenti di tipo iterati-

vo. Il comportamento a trazione del calcestruzzo è stato modellato con una legge di tipo strain-softening, secondo la meccanica della frattura coesiva.

Il modello consente di ricavare, oltre lo stato tensionale rappresentato da tensioni normali e tensioni tangenziali, informazioni relative alla sezione fessurata, quali componente orizzontale e verticale dell'ampiezza della fessura al variare del carico, angolo di inclinazione della frattura, nonché stimare la possibile evoluzione della frattura per carico variabile in maniera monotonamente crescente.

L'accuratezza del modello implementato è stata provata confrontando i risultati numerici con quelli della campagna sperimentale condotta da Leonhardt e Walter, relativi a travi semplicemente appoggiate e caricate nella modalità "four point bending".

Dall'analisi del predetto lavoro [33] è possibile evidenziare come molti aspetti sono comuni ad altri approcci e vengono utilizzati in maniera mista.

Tra le ipotesi assunte alla base del modello vi sono quella cinematica di trave di Eulero-Bernoulli, quella di assenza di flessione deviata e quella di piccoli spostamenti e piccoli gradienti di spostamento, mentre le non linearità non considerate sono il fenomeno dell'aderenza - scorrimento fra acciaio e calcestruzzo che circonda la barra, il contributo degli inerti in corrispondenza della fessura, il trasferimento delle tensioni da calcestruzzo fessurato ad acciaio ed il ritiro, la viscosità e la variazione di temperatura.

Nel caso in esame l'apertura di una fessura rappresenta una discontinuità nel campo di spostamento e la detta discontinuità è considerata equivalente ad una deformazione plastica spalmata per la distanza delle fessure.

Riassumendo, ancora, nel suddetto lavoro è stato affrontato il problema della fessurazione eseguendo una modellazione non lineare agli *elementi finiti*, con *discretizzazione della sezione a fibre*.

Il modello di frattura utilizzato è quello coesivo con legge trazione - separazione di tipo "strain-softening", tipico dell'approccio a fratture distribuite. I modelli costitutivi impiegati sono quelli di Sargin, per quanto riguarda il comportamento a compressione del calcestruzzo e quello

elasto-plastico incrudente, per quanto riguarda il comportamento a trazione dell'acciaio.

Le tensioni del calcestruzzo in zona tesa vengono ricavate risolvendo un problema di plasticità, mediante il quale si ottengono le informazioni relative alla sezione fessurata, quali tensioni normali e tangenziali nella frattura, angolo di frattura e componente orizzontale relativa all'apertura delle fessure. I criteri di frattura utilizzati sono rispettivamente quello di Rankine (per simulare il modo di sola apertura) e quello della curva intrinseca (per simulare il modo di apertura e scorrimento). Per entrambi i criteri è stato sviluppato e programmato un algoritmo iterativo che consente di determinare la giacitura di frattura.

Il modello è stato applicato alla trave "four point bending" della tipologia ET1 delle prove di Leonhardt e Walter. Si sono confrontati i risultati restituiti dal modello con i dati desunti dalle prove sperimentali.

La direzione delle fessure risulta in discreto accordo, almeno fino a che le stesse non raggiungono la quota dell'asse neutro. Al di sopra dello stesso e, comunque, per carichi prossimi al collasso intervengono altri fenomeni, quali l'insorgenza di fratture secondarie e biforcazioni della frattura, che non sono contemplate nella trattazione.

Il modello è limitato ai carichi monotonamente crescenti. Si potrebbe, quindi, estendere l'analisi anche a carichi variabili indagando così l'aspetto relativo allo scarico.

Dalle risultanze ottenute si è visto che i due criteri di frattura non portano a differenze sostanziali per quanto riguarda il calcolo delle tensioni. Alcune differenze si sono notate per l'angolo di frattura e le tensioni da taglio lungo la fessura, ma comunque molto contenute. Il criterio di Rankine, pertanto, si è dimostrato più semplice da gestire e più realistico della curva intrinseca.

Ampia diffusione nel passato per la semplicità concettuale del modello, è la classe dei metodi semplificati alle differenze finite [Cosenza et al., 1997, [Aiello et al., 2000], che assumono nella discretizzazione a macrofibre della sezione trasversale, un'area efficace di calcestruzzo teso che circonda le armature principali ed in cui l'interazione tra i rinforzi in FRP e la matrice in calcestruzzo viene modellata con le espressioni analitiche risultanti dai tests di aderenza disponibili in letteratu-

ra.

Come già riportato nel paragrafo 2.2.1, il modello di tension stiffening descritto in [94] viene esteso anche al caso di trave soggetta a flessione, assumendo che le fessure siano ortogonali alle armature di acciaio, attraverso il concetto di area effettiva (zona tesa nella sezione soggetta a flessione) e l'utilizzo di un modello a fibre, discretizzando la sezione a strati, soggetti a stati di sforzo uniassiale; inoltre, viene proposto un approccio semplificato per tenere conto del taglio, considerando un elemento di trave alla Timoshenko assieme ad un modello bidimensionale a fratture distribuite di tipo rotante, quale quello proposto da Collins e Vecchio nel 1986.

In [93] viene proposto un modello a fibre agli spostamenti, in cui viene sottolineata l'importanza dell'uso dei modelli dell'effetto aderenza-scorrimento nell'analisi di elementi in calcestruzzo. Viene considerata l'unione di una trave in calcestruzzo, basata sulla teoria di Eulero Bernoulli, con immerse barre includenti il fenomeno del "bond-slip". Nell'approccio agli spostamenti vengono utilizzate funzioni di forma lineari per le barre con bond-slip e cubiche per la trave in calcestruzzo.

Nell'ambito della meccanica del continuo e della discretizzazione a fibre della sezione trasversale, viene presentato in [61] un modello di trave alla Eulero Bernoulli, con conservazione della sezione piana, che include con una relazione esplicita l'effetto aderenza-scorrimento tra le barre in acciaio e la matrice in calcestruzzo; il predetto modello può inquadrarsi nell'ulteriore classificazione in modelli distribuiti, a differenza di quelli concentrati.

La distanza fra due fessure viene posta uguale a quella fra le staffe in accordo all'evidenza sperimentale e nel modello viene introdotto il concetto di area effettiva di calcestruzzo teso, proporzionale al copriferro ed al diametro delle barre di armatura.

La discretizzazione del sub-elemento monodimensionale tra due cracks viene effettuata numericamente alle differenze finite classiche, mentre per l'elemento intero viene costruita una matrice di rigidità, basata sui momenti di inerzia medi dei sub-elementi che la formano.

Mediante l'introduzione di una legge di aderenza-scorrimento di tipo lineare, in [68] viene eliminato il precedente peso computazionale

della discretizzazione del sub-elemento alle differenze finite e viene introdotto, in tal modo, un nuovo modello di trave soggetta a flessione, con sezione trasversale a strati in calcestruzzo armato, che include gli effetti dell'aderenza-scorrimento tra le barre in acciaio e la matrice in calcestruzzo, mantenendo, comunque, i lati positivi e quelli negativi delle discretizzazioni a fibre.

Basata sulle ipotesi del modello di [Newmark et al., 1951] per le travi composte acciaio-calcestruzzo in parziale interazione, nel contributo [30] viene presentata una soluzione in forma chiusa della matrice di rigidezza e del vettore delle forze nodali equivalenti, di facile adattamento al caso di trave soggetta a flessione a semplice armatura, includente il fenomeno dell'aderenza-scorrimento, in un modello agli spostamenti.

CAPITOLO 3

ANALISI SECONDO L'APPROCCIO "DISCRETE CRACK"

3.1. Introduzione

In questo capitolo viene illustrata l'applicazione dell'approccio "Discrete Crack" al caso degli elementi strutturali monodimensionali compositi, costituiti da una matrice in calcestruzzo e da un insieme di fibre longitudinali di acciaio, interconnesse con elementi di interfaccia che simulano il fenomeno dell'aderanza - scorrimento tra i predetti elementi del composito, sfruttando una formulazione energetica del problema.

Vengono poi evidenziate e valutate le implicazioni che nascono nella modellazione del problema, in seguito all'introduzione di una cinematica discontinua.

Come già introdotto al precedente paragrafo 2.2.2., verranno analizzati ed arricchiti i fondamenti teorici del modello, al fine di seguire l'andamento del comportamento "non lineare" delle sezioni in calcestruzzo armato dalla fase integra alla fase fessurata fino al collasso.

Considerando le ipotesi alla base dei modelli inquadrati nell'approccio a fratture discrete, quali quelle di trave di Eulero-Bernoulli, di assenza di flessione deviata, di piccoli spostamenti e di piccoli gradienti di spostamento ed, infine, di interazione parziale acciaio-calcestruzzo se-

condo il modello di Newmark et al. (1951), ai fini della scrittura e della soluzione delle equazioni di equilibrio del problema, è possibile inquadrare il caso in esame nell'ambito dell'approccio alle discontinuità forti (SDA) dal punto di vista cinematico, del metodo degli elementi con discontinuità immerse (EED) dal punto di vista numerico e del modello di attivazione dell'interfaccia di tipo coesiva (CCM) dal punto di vista costitutivo.

Allo stato attuale si è tenuto conto dell'interazione armature - calcestruzzo, mediante la modellazione del fenomeno dell'aderenza (bond stress) - scorrimento (slip) tra acciaio e calcestruzzo, mentre si è trascurato il contributo degli inerti in corrispondenza delle fessure, il trasferimento delle tensioni da calcestruzzo fessurato ad acciaio snervato e l'effetto di fenomeni dipendenti dal tempo, quali ritiro, viscosità e variazioni di temperatura.

Lo sviluppo di un modello di elemento finito capace di cogliere, in modo "efficace" dal punto di vista della completezza della modellazione ed "efficiente" dal punto di vista computazionale, in tutto od in parte tali fenomeni, in ambito tanto globale quanto locale, rappresenta, come già detto, la motivazione del presente lavoro.

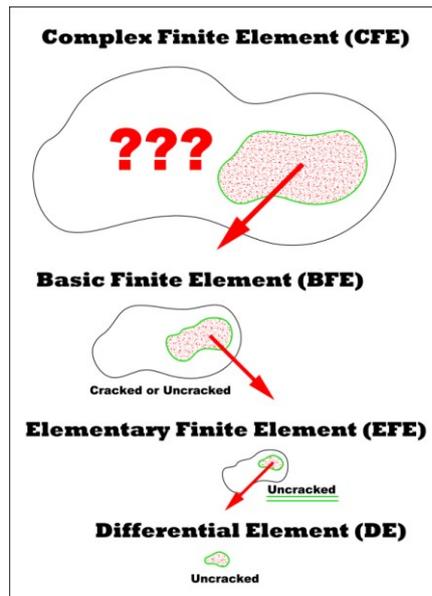


Figura 3.1: Caratterizzazione dei tipi di elementi finiti.

Come schematicamente indicato nella Figura 3.1 e descritto in dettaglio nel successivo capitolo 4., il risultato dell'attività di ricerca è stato finalizzato all'individuazione, modellazione ed implementazione numerica di un elemento finito complesso (CFE - Complex Finite Element) a partire dall'elemento finito di base (BFE - Basic Finite Element) costituito da elementi finiti elementari (EFE - Elementary Finite Element), che verranno studiati attraverso gli elementi differenziali (DE - Differential Element).

Nella trattazione che segue verranno illustrati graficamente sia il caso dell'elemento soggetto a trazione (TM - Tension Member) sia quello soggetto a flessione (FM - Flexural Member).

In particolare, nel caso dell'elemento soggetto a trazione, lo schema per il BFE-TM è illustrato nella Figura 3.2, che riporta anche le azioni che possono agire sullo stesso, applicate direttamente all'acciaio (s) e/o al calcestruzzo (c) nelle sezioni di estremità dell'elemento (azioni concentrate) ed al calcestruzzo attraverso la superficie laterale del provino (g - carico assiale linearmente distribuito).

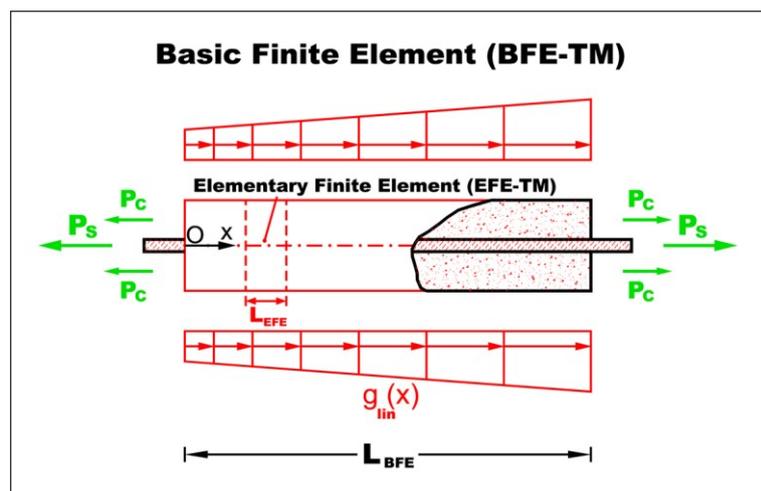


Figura 3.2: Elemento finito di base soggetto a trazione (BFE-TM).

Quest'ultimo può essere discretizzato in elementi finiti elementari (EFE-TM), il cui schema è riportato nella Figura 3.3.

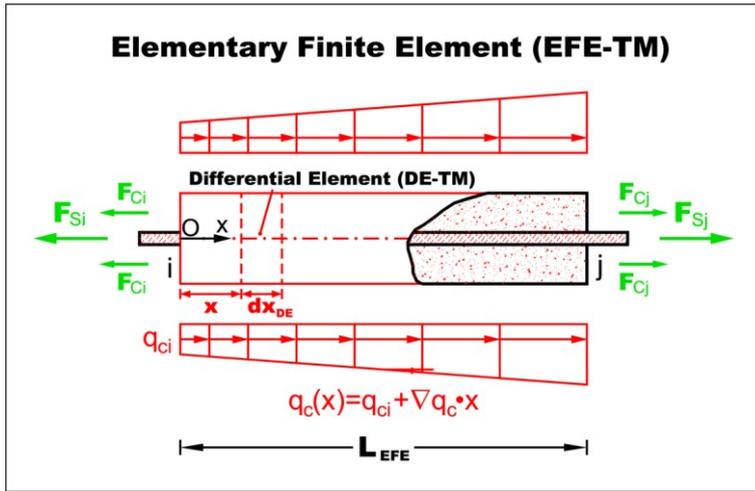


Figura 3.3: Elemento finito elementare soggetto a trazione (EFE-TM).

La studio analitico degli elementi di lunghezza infinitesima dx contenuti nell'elemento finito elementare (EFE-TM), verrà effettuato a partire dallo schema di elemento differenziale (DE-TM) rappresentato nella Figura 3.4.

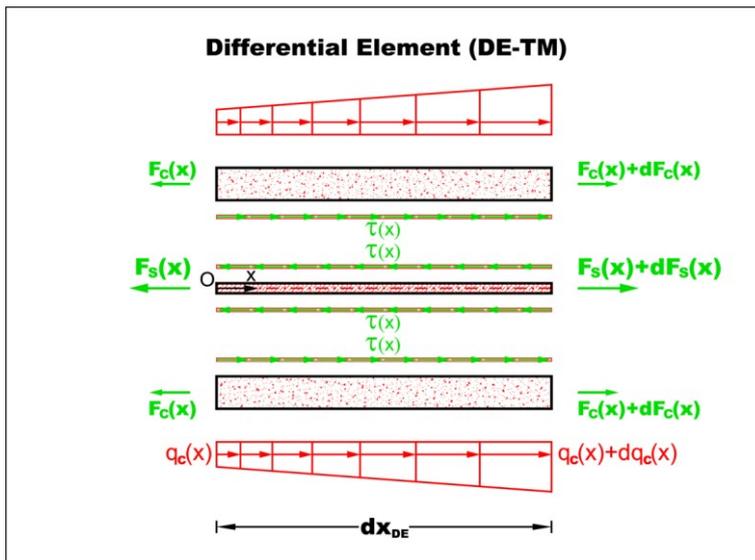


Figura 3.4: Elemento differenziale soggetto a trazione (DE-TM).

Il modello meccanico dell'EFE-TM è rappresentato nella Figura 3.5, nella quale sono evidenziati i carichi distribuiti agenti sulla superficie laterale del calcestruzzo e le rispettive forze nodali equivalenti ai detti carichi; sono anche riportate le molle non lineari che schematizzano il legame tensione di aderenza - scorrimento locale esistente a livello di interfaccia e riportato in scala nodale.

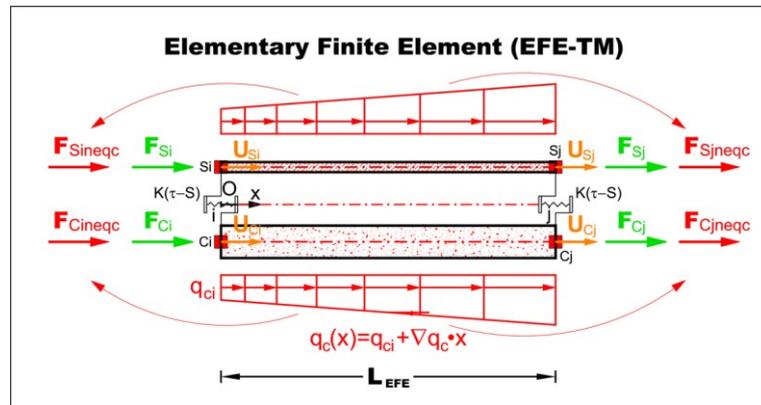


Figura 3.5: Modello meccanico dell'EFE-TM.

Per il caso di elemento monodimensionale soggetto a trazione (TM-Tension Member), sono stati implementati in ambiente Mathematica® e Matlab® gli algoritmi che consentono di studiare la risposta del calcestruzzo teso attraverso l'applicazione di uno spostamento incrementale ad un estremo della barra immersa in esso e/o all'intera sezione terminale del composito calcestruzzo armato (analisi a controllo di spostamento), per le fasi di elemento uncracked e/o cracked; è stata introdotta anche la possibilità di caricare il provino con azioni tangenziali applicate sulla superficie esterna del cilindro cavo di calcestruzzo.

In analogia al precedente, è stato analizzato ed approfondito il caso di elemento monodimensionale soggetto a flessione (FM-Flexural Member) fino alla fase di incipiente formazione della frattura discreta, attraverso lo studio del modello cinematico e dei legami costitutivi, compreso la scrittura della formulazione del problema in termini di spostamenti.

In particolare, nel caso dell'elemento soggetto a flessione, lo schema per il BFE-FM è riportato nella Figura 3.6 sia per la doppia armatura (DR), sia per la semplice armatura (SR), dove sono rappresentate anche le azioni che possono agire sullo stesso, applicate direttamente all'acciaio superiore (sc) ed inferiore (st) e/o al calcestruzzo (c) nelle sezioni di estremità dell'elemento (azioni concentrate).

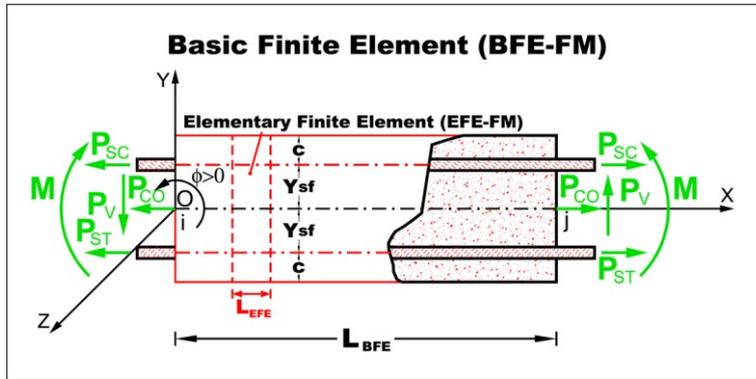


Figura 3.6: Elemento finito di base soggetto a flessione (BFE-FM).

Quest'ultimo può essere discretizzato in elementi finiti elementari (EFE-FM), il cui schema è illustrato nella Figura 3.7 per il caso di doppia armatura (DR).

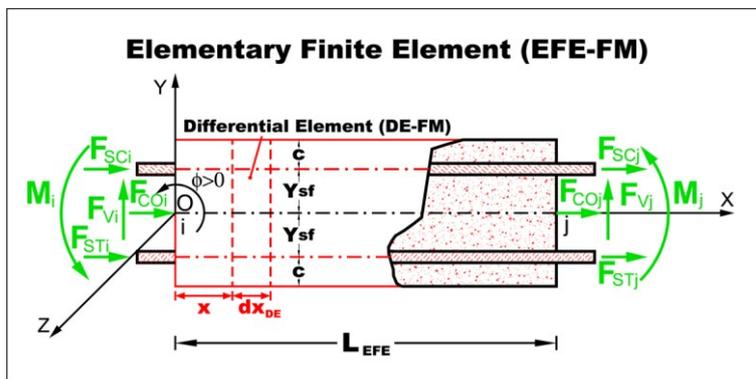


Figura 3.7: Elemento finito elementare soggetto a flessione (EFE-FM/DR).

La studio analitico degli elementi di lunghezza infinitesima dx contenuti nell'elemento finito elementare (EFE-FM), verrà effettuato a partire dallo schema di elemento differenziale (DE-FM) in Figura 3.8, per il caso della doppia armatura (DR).

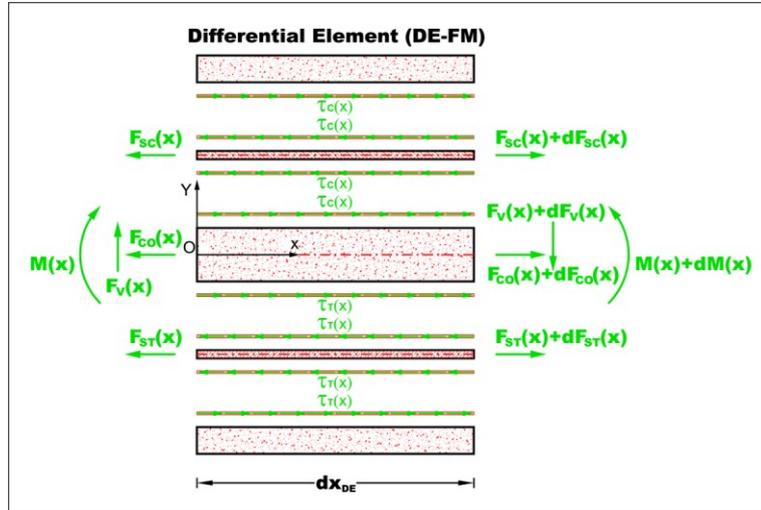


Figura 3.8: Elemento differenziale soggetto a flessione (DE-FM/DR).

La Figura 3.9 rappresenta il modello meccanico dell'EFE-FM (DR), nel quale sono riportate le molle non lineari che schematizzano il legame tensione di aderenza - scorrimento locale esistente a livello di interfaccia e riportato in scala nodale.

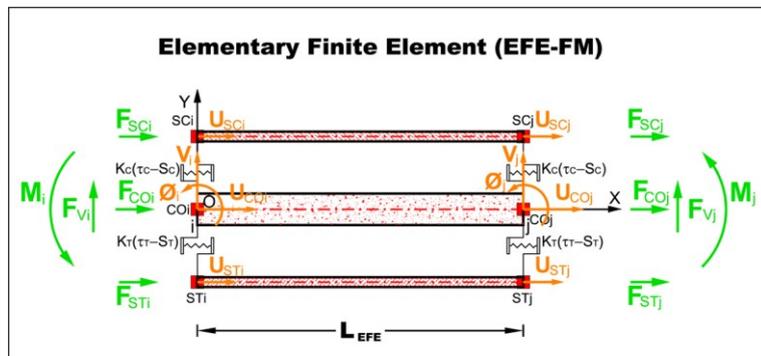


Figura 3.9: Modello meccanico dell'EFE-FM (DR).

In maniera del tutto analoga al caso della doppia armatura, gli schemi del modello meccanico per il caso della semplice armatura (SR) sono illustrati nella Figure 3.10, 3.11 e 3.12.

In particolare, l'EFE-FM viene riportato in Figura 3.10.

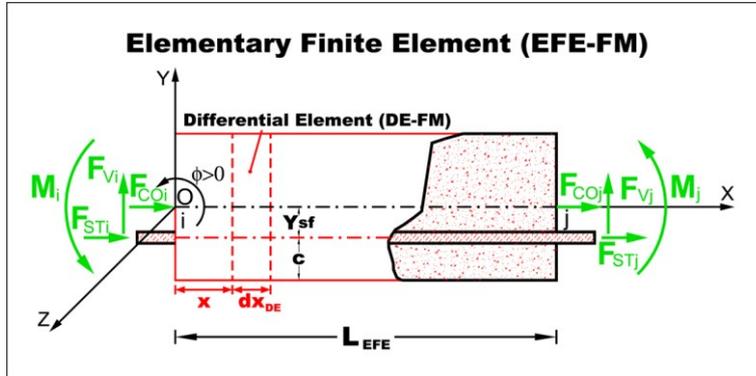


Figura 3.10: Elemento finito elementare soggetto a flessione (EFE-FM/SR).

Nella Figura 3.11 è rappresentato lo schema di elemento differenziale (DE-FM).

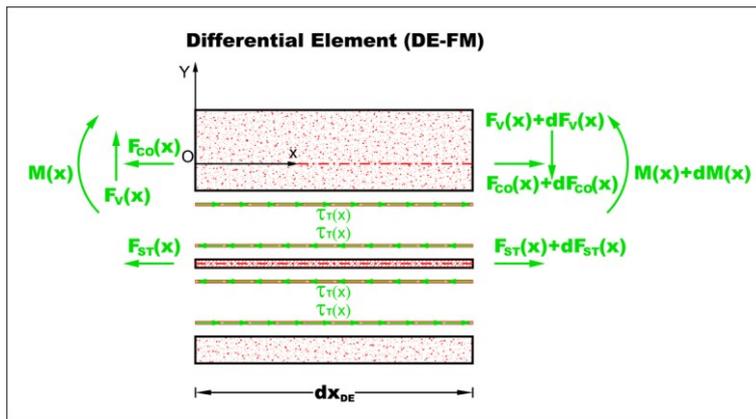


Figura 3.11: Elemento differenziale soggetto a flessione (DE-FM/SR).

Infine, in Figura 3.12 è rappresentato il modello meccanico dell'EFE-FM (SR), dove le molle non lineari schematizzano il legame tensione di aderenza - scorrimento locale esistente a livello di interfaccia.

cia e riportato in scala nodale.

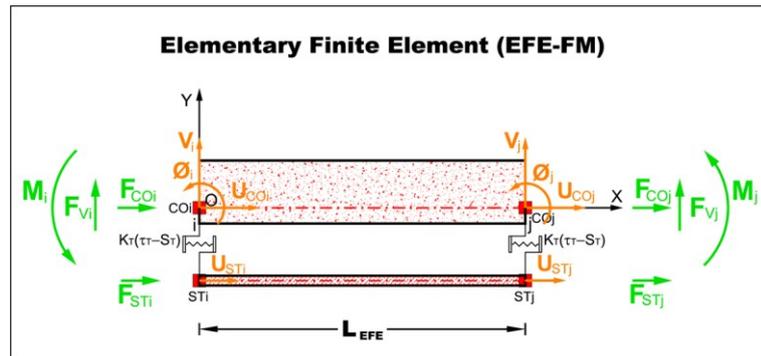


Figura 3.12: Modello meccanico dell'EFE-FM (SR).

Anche per il caso di elemento monodimensionale soggetto a flessione (FM-Flexural Member), sono stati implementati in ambiente Mathematica® e Matlab® gli algoritmi che consentono di studiare la risposta del calcestruzzo attraverso l'applicazione di spostamenti generalizzati impressi incrementali ad un estremo delle barre (T) e/o (C) immerse in esso e/o all'intera sezione terminale del composito calcestruzzo armato (analisi a controllo di spostamento), per l'elemento uncracked fino alla fase di incipiente formazione della frattura discreta.

3.2. Modello cinematico

Nel corso della presente trattazione si sono esaminati i casi di elementi monodimensionali soggetti a trazione e a flessione, partendo dalla definizione dei loro modelli cinematici.

In particolare, assunto che nel primo caso l'elemento studiato è rappresentato da un cilindro cavo assialsimmetrico di lunghezza L , con immersa in posizione baricentrica una singola barra di armatura, il modello adottato prevede un continuo composito con due fasi separate (calcestruzzo - matrice ed acciaio - fibra) unite attraverso un'interfaccia deformabile di spessore nullo (v. Figure 3.2, 3.3, 3.4 e 3.5).

Ogni fase, come pure l'interfaccia, è caratterizzata da una propria

caratteristica costitutiva.

I gradi di libertà scelti sono rappresentati dagli spostamenti assiali dell'acciaio e del calcestruzzo, variabili lungo l'ascissa x letta sul sistema di riferimento assunto con origine sull'estremo sinistro dell'elemento discretizzato e posto sulla retta che ne congiunge i due estremi (v. Figura 3.5).

Sotto le ipotesi di piccoli spostamenti e di piccoli gradienti di spostamento, le corrispondenti deformazioni assiali infinitesime sono date dal gradiente primo dei suddetti spostamenti rispettivamente dell'acciaio e del calcestruzzo.

In maniera del tutto analoga, per la descrizione dell'elemento soggetto a flessione (v. Figura 3.6, 3.7 e 3.10), si assume che esso sia rappresentato da una trave del tipo alla Eulero-Bernoulli in composito calcestruzzo (matrice) ed acciaio (fibre), di lunghezza L e con sezione trasversale in calcestruzzo piana e che rimane tale nel corso dei processi di deformazione.

Anche in questo caso le due fasi separate del continuo composito sono unite attraverso un'interfaccia deformabile di spessore nullo, sia nella zona soggetta a trazione (T) sia in quella soggetta a compressione (C) ed ogni fase, come pure l'interfaccia, è caratterizzata da un proprio comportamento costitutivo.

I gradi di libertà scelti sono rappresentati dagli spostamenti assiali delle barre in acciaio in zona tesa (T) e compressa (C), da quello assiale del calcestruzzo in corrispondenza del baricentro della sezione trasversale in calcestruzzo, dalla rotazione della medesima sezione e dallo spostamento verticale della linea d'asse baricentrica dell'elemento in calcestruzzo, variabili lungo l'ascissa x letta sul sistema di riferimento assunto con origine sull'estremo sinistro dell'elemento discretizzato e posto sulla retta che congiunge i due estremi (v. Figura 3.7).

Sotto le ipotesi di piccoli spostamenti e di piccoli gradienti di spostamento, le corrispondenti deformazioni generalizzate infinitesime sono date dal gradiente primo dei suddetti spostamenti generalizzati, come indicati sopra.

Nel modello cinematico di interfaccia alla Newmark et al. (1951), sia nel caso di elemento soggetto a trazione sia in quello soggetto a fles-

sione, gli scorrimenti in zona tesa (T) ed in zona compressa (C) possono definirsi ad ogni punto di ascissa x come la differenza tra lo spostamento dell'acciaio in quel punto e quello corrispondente del calcestruzzo, deducibili nel caso lineare dal prodotto delle deformazioni a taglio in corrispondenza delle interfacce per gli spessori equivalenti dell'elemento monodimensionale considerato, secondo la seguente espressione:

$$s = \gamma t_{EQ}$$

essendo s lo scorrimento, γ la deformazione a taglio e t_{EQ} lo spessore equivalente.

3.3. Legami costitutivi

Il comportamento costitutivo dei materiali viene definito, attraverso il loro potenziale elastico ed inelastico, mediante le note leggi tratte dalla letteratura al riguardo.

Nel caso in esame, in particolare, si suppone che l'acciaio abbia un comportamento elastoplastico con incrudimento lineare isotropo positivo o nullo, ricadendo in quest'ultimo caso nella plasticità perfetta.

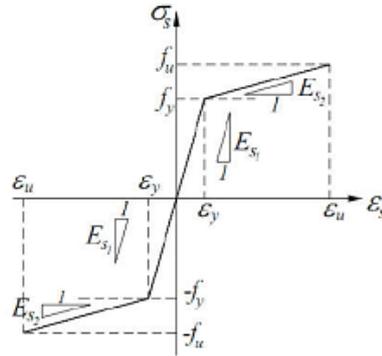


Figura 3.13: Legame costitutivo acciaio.

In relazione al calcestruzzo, poiché la presente trattazione è rivolta prevalentemente all'analisi del suo comportamento a trazione, il predetto materiale potrebbe essere considerato elastico lineare sia a trazione sia a compressione, ma nella formulazione del problema e nella

successiva implementazione nel metodo degli elementi finiti, verrà esposto il caso più generale di comportamento non lineare a compressione, secondo il modello di Kent e Park modificato.

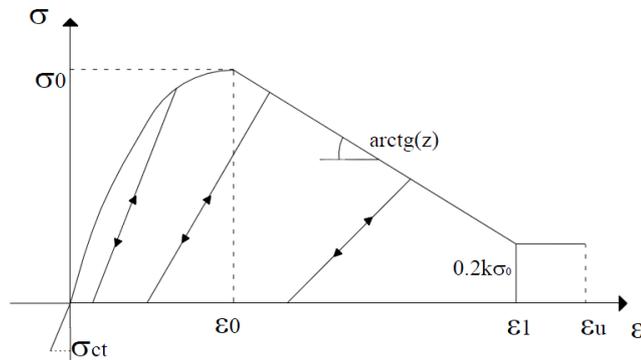


Figura 3.14: Legame costitutivo calcestruzzo.

Per il modello di interfaccia tra acciaio e calcestruzzo, la tensione tangenziale di aderenza dovuta allo scorrimento viene definita attraverso la legge suggerita nel CEB-FIP Model Code 90 (1993), con una modifica nel tratto iniziale non lineare attraverso una legge che riduce la rigidità iniziale del predetto tratto, da un valore infinito ad uno finito ancorchè elevato.

Viene, dunque, introdotta una legge di variazione logaritmica della tensione di aderenza in funzione dello scorrimento, con un contenuto energetico pressoché coincidente, discostandosi da quello presentato nel predetto Codice di solo alcuni punti percentuali.

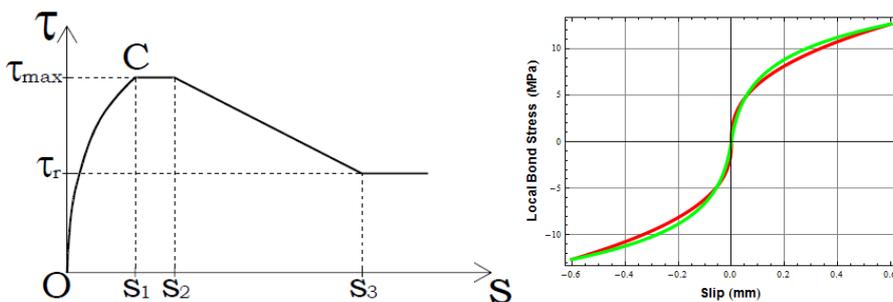


Figura 3.15: Legame costitutivo interfaccia acciaio - calcestruzzo.

In relazione, infine, all'interfaccia immersa nel calcestruzzo a seguito della relativa attivazione, la trattazione teorica adottata in questa tesi, seguendo un approccio 'non regolarizzato', in cui il campo di spostamento è discontinuo e il campo di deformazione è una distribuzione singolare, considera esplicitamente la legge costitutiva discreta trazione separazione (di tipo lineare, bilineare, multilineare od esponenziale) all'interfaccia immersa ed il regime delle discontinuità forti viene effettivamente raggiunto. Il fenomeno della formazione di una frattura coesiva viene trattato come un fenomeno discreto, ma contenuto nel contesto di un modello continuo.

L'implementazione nel metodo degli elementi finiti viene, dunque, sviluppata a partire dalla trattazione presentata, in cui viene considerata in maniera esplicita la legge discreta trazione separazione all'interfaccia.

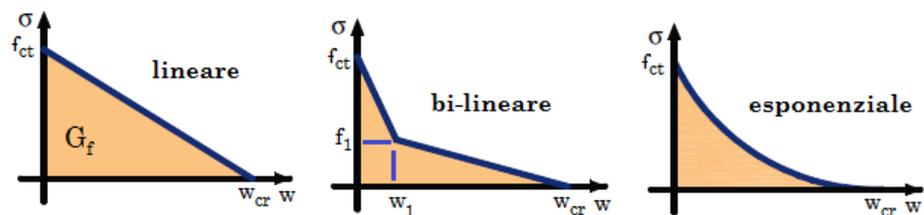


Figura 3.16: Legame trazione - separazione interfaccia.

L'esame completo dei legami costitutivi utilizzati è riportato nei relativi paragrafi 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3.

3.4. Formulazione energetica del problema

In questo paragrafo viene illustrata la formulazione energetica del problema dell'equilibrio dell'elemento monodimensionale soggetto a stati di sollecitazione assiale o flessionale, partendo dal Principio di Stazionarietà dell'Energia Potenziale Totale, trattata in termini variazionali.

Tale formulazione viene, poi, discretizzata scrivendo le funzioni incremento di spostamento in termini di incrementi di spostamenti nodali e ricavando la matrice di rigidità degli elementi monodimensionali so-

pra citati e le forze nodali equivalenti direttamente applicate ai nodi.

Per un sistema elastico l'Energia Potenziale Totale è data dalla somma dell'energia interna della struttura (energia di deformazione, funzione del campo di deformazione espresso in termini di spostamenti attraverso l'operatore di compatibilità) e dell'energia potenziale delle forze esterne; il principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale afferma che il campo di spostamenti soluzione del problema strutturale è tale da rendere stazionaria l'Energia Potenziale Totale. Per sistemi discreti la condizione di stazionarietà dell'energia potenziale totale implica che le derivate parziali dell'Energia Potenziale Totale rispetto ai gradi di libertà del sistema siano tutte nulle.

Nel seguito, identificando la variazione degli spostamenti con spostamenti virtuali, la minimizzazione dell'Energia Potenziale Totale condurrà all'identità dei lavori virtuali della meccanica classica ed è a partire da quest'ultima che si tratterà il problema dell'equilibrio degli elementi monodimensionali soggetto a stati di sollecitazione assiale o flessionale.

La formulazione del Principio dei Lavori Virtuali per la scrittura del sistema di equazioni differenziali di equilibrio è riportata in maniera dettagliata in appendice A, nella quale si sono trattati separatamente sia il caso dell'elemento monodimensionale soggetto a trazione sia quello soggetto a flessione.

3.5. Matrice di rigidezza degli elementi monodimensionali

Nei casi di elementi strutturali con poche fessure che dominano il comportamento dell'intero elemento, come ampiamente discusso, è preferibile un approccio a frattura discreta.

Nella discontinuità così creata si inseriscono nuovi elementi, cosiddetti di interfaccia, che hanno una rigidezza variabile per simulare il comportamento dell'apertura della fessura.

Lo sviluppo della metodologia adottata nella presente tesi consiste nel considerare elementi finiti standard, arricchiti a posteriori con una

interfaccia lungo la quale si sviluppa la discontinuità laddove si raggiunge la tensione di frattura. Tale metodo è noto con il nome di *Strong Discontinuity Approach via Elements with Embedded Discontinuities*.

Un'ulteriore suddivisione dei modelli si può condurre sulla capacità di seguire o no cicli di carico e scarico, che si traduce fundamentalmente nell'uso della matrice di rigidezza secante o tangente e nei diversi metodi di risoluzione numerica, in entrambi i casi di tipo iterativi.

Nei modelli soggetti a trazione e/o a flessione, sotto certe condizioni di carico, si produce una tensione variabile lungo le armature ed il calcestruzzo, dovuta alle tensioni di aderenza agenti lungo i comuni punti di contatto armatura - calcestruzzo.

Con l'aumento del carico, le deformazioni e le tensioni nel calcestruzzo aumentano e ad un certo livello di carico viene raggiunto il meccanismo di fessurazione. Il fenomeno del *cracking* causa la ridistribuzione delle tensioni e delle deformazioni, come pure, nel caso di elemento soggetto a trazione, un considerevole incremento dell'allungamento del composito, dovuto all'apertura del *crack* e, come conseguenza, la rigidezza dello stesso composito decresce. Ulteriori incrementi del carico possono produrre nuovi *cracks*.

Il processo di carico termina quando finalmente l'armatura è snervata alle sue estremità e in corrispondenza delle sezioni fessurate.

Questo continuo processo di variazione della rigidezza con il carico applicato viene formulato in un nuovo modello monodimensionale, che fornisce una previsione completa della variazione delle tensioni e degli spostamenti nel calcestruzzo e nell'armatura; riesce a prevedere anche la localizzazione di fessure discrete e la loro ampiezza a qualsiasi livello di carico.

Nel corso della presente trattazione, la matrice di rigidezza degli elementi monodimensionali verrà ricavata sia per quelli soggetti a trazione sia per quelli soggetti a flessione.

3.5.1. L'elemento monodimensionale soggetto a trazione

L'elemento composito tra due fessure, rappresentato da un tirante sog-

getto a trazione di lunghezza L , risulta formato da una matrice in calcestruzzo con immersa una barra in acciaio e trasferisce gli sforzi attraverso la barra fino allo snervamento di quest'ultima (v. schema per l'EFE-TM in Figura 3.5).

Il sistema di riferimento viene scelto con asse x congiungente i due nodi i e j e con origine nel baricentro della sezione di calcestruzzo interamente reagente.

Nella fase di determinazione della matrice di rigidezza dell'elemento, attraverso l'uso delle funzioni di forma derivate in forma chiusa dalla formulazione esatta del modello costitutivo lineare, il calcestruzzo viene considerato interamente reagente ed elastico lineare a trazione e compressione, con segno delle tensioni di trazione positivo.

L'acciaio posto in posizione baricentrica della sezione in calcestruzzo (immerso cioè nel cilindro cavo della sezione di calcestruzzo), che risulta teso nel caso di sforzo normale di trazione, presenta una sezione di area A_s delimitata da una curva di lunghezza Φ_s e con il baricentro di A_s coincidente, dunque, con l'origine del sistema di riferimento.

A partire dallo schema definito per il DE-TM (Differential Element - Tension Member) riportato nella Figura 3.4, verrà adottata, ove possibile, la seguente notazione classica della meccanica strutturale.

Posto

$u_c(x)$	(spostamento orizzontale del generico punto della sezione in calcestruzzo)
$u_s(x)$	(spostamento orizzontale della barra in acciaio)
$s(x) = u_s(x) - u_c(x)$	(scorrimento interfaccia calcestruzzo - acciaio)
$\varepsilon_c(x) = \frac{\partial}{\partial x} u_c(x)$	(deformazione nel generico punto della sezione in calcestruzzo)
$\varepsilon_s(x) = \frac{\partial}{\partial x} u_s(x)$	(deformazione nell'acciaio)
$\sigma_c(x) = E_c \left[\frac{\partial}{\partial x} u_c(x) \right]$	(tensione nel generico punto della sezione in calcestruzzo)
$\sigma_s(x) = E_s \left[\frac{\partial}{\partial x} u_s(x) \right]$	(tensione nell'acciaio)
$\tau[s(x)] = G_o s(x)$	(tensione di aderenza all'interfaccia calcestruzzo - acciaio)

essendo E_c il modulo di elasticità normale del calcestruzzo, E_s il modulo di elasticità normale dell'acciaio e G_o il modulo di elasticità tangenziale iniziale dell'interfaccia tra i due predetti costituenti base, dal sistema di equazioni differenziali del secondo ordine in termini di scorrimenti e spostamenti, che rappresentano le equazioni di equilibrio alla traslazione delle barre in acciaio e del concio in calcestruzzo, esposte in dettaglio in appendice A, si ottengono le soluzioni in termini di spostamenti a partire dalla funzione di scorrimento.

Ponendo

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (\text{rapporto moduli di elasticità normale acciaio e calcestruzzo})$$

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} \quad (\text{rapporto aree di acciaio e calcestruzzo})$$

$$q_c(x) = q_{c_i} + \nabla q_c x \quad (\text{carico variabile linearmente applicato sulla superficie laterale del calcestruzzo})$$

e, tenuto conto che, per le definizioni contenute nel modello cinematico, valgono le relazioni

$$u_c(x, y) = u_c(x) \quad (\text{spostamento orizzontale del generico punto della sezione in calcestruzzo})$$

$$u_s(x, y) = u_s(x) \quad (\text{spostamento orizzontale della barra in acciaio})$$

$$s(x) = u_s(x) - u_c(x) \quad (\text{scorrimento interfaccia calcestruzzo - acciaio})$$

e del legame costitutivo lineare a tratti dell'interfaccia tra acciaio e calcestruzzo:

$$\tau[s(x)] = G_o s(x) \quad 3.1$$

e ponendo, ancora,

$$\alpha^2 = \frac{G_o \Phi_s}{E_s A_s} (1 + n\rho) > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\lambda = \frac{\pi D_c \nabla q_c}{E_c A_c} \quad (D_c = \text{diametro cilindro di calcestruzzo - matrice})$$

$$\gamma = \frac{q_{c_i} D_c}{E_c A_c D_s} \quad (D_s = \text{diametro barra in acciaio - fibra})$$

la funzione di scorrimento può scriversi nella forma

$$s(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} - \frac{\lambda}{\alpha^2} x - \frac{\gamma}{\alpha^2} \quad 3.2$$

e le soluzioni in termini di spostamenti a partire dalla funzione di scorrimento, risultano:

$$u_s(x) = \frac{1}{1+n\rho} \left[c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} - \frac{\lambda}{6} x^3 - \frac{\gamma}{2} x^2 \right] + c_3 x + c_4 \quad 3.3$$

$$u_c(x) = -\frac{n\rho}{1+n\rho} \left[c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} + \frac{1}{6} \left[\frac{D_c \nabla q_c \alpha^2}{D_s G_o} - \lambda \right] x^3 + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[\gamma + \frac{D_c q_{c_i} \alpha^2}{D_s G_o} \right] x^2 \right] + c_5 x + c_6 \quad 3.4$$

Le predette relazioni valgono in forma incrementale, considerando nei passi di discretizzazione del percorso di carico - spostamento, i materiali calcestruzzo, acciaio elastico lineari con moduli di elasticità normale tangente E_c ed E_s ; anche l'interfaccia sarà di tipo elastico lineare con modulo G_o .

Imponendo le condizioni al contorno sugli spostamenti dei nodi i e j ($u_s(0) = u_{si}$, $u_c(0) = u_{ci}$, $u_s(L) = u_{sj}$, $u_c(L) = u_{cj}$) è possibile ricavare le $u_s(x)$ ed $u_c(x)$ in funzione di tali spostamenti nodali dell'elemento EFE-TM.

Derivando le ultime è possibile ricavare le espressioni delle forze $F_s(x)$ ed $F_c(x)$ in funzione di tali spostamenti nodali, che scritte in forma matriciale forniscono la matrice di rigidezza dell'elemento EFE-TM, che come ricordiamo è di tipo uncracked:

$$F_s(x) = E_s A_s \left[\frac{\partial}{\partial x} u_s(x) \right] \quad 3.5$$

$$F_c(x) = E_c A_c \left[\frac{\partial}{\partial x} u_c(x) \right] \quad 3.6$$

da cui è possibile ricavare

$$F_s(x) = \frac{E_s A_s}{1+n\rho} \left[\alpha c_1 e^{\alpha x} - \alpha c_2 e^{-\alpha x} - \frac{\lambda}{2} x^2 - \gamma x \right] + c_3 E_s A_s \quad 3.7$$

$$F_c(x) = -\frac{n\rho E_c A_c}{1+n\rho} \left[\alpha c_1 e^{\alpha x} - \alpha c_2 e^{-\alpha x} + \frac{1}{2} \left[\frac{D_c \nabla q_c \alpha^2}{D_s G_0} - \lambda \right] x^2 + \right. \\ \left. - \left[\gamma + \frac{D_c q_{ci} \alpha^2}{D_s G_0} \right] x \right] + c_5 E_c A_c \quad 3.8$$

Imponendo le condizioni al contorno sulle forze ai nodi i e j ($F_s(0) = F_{si}$, $F_c(0) = F_{ci}$, $F_s(L) = F_{sj}$, $F_c(L) = F_{cj}$) è possibile ricavare la

$$\begin{bmatrix} F_{si} \\ F_{ci} \\ F_{sj} \\ F_{cj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^L & K_{12}^L & K_{13}^L & K_{14}^L \\ K_{21}^L & K_{22}^L & K_{23}^L & K_{24}^L \\ K_{31}^L & K_{32}^L & K_{33}^L & K_{34}^L \\ K_{41}^L & K_{42}^L & K_{43}^L & K_{44}^L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{si} \\ u_{ci} \\ u_{sj} \\ u_{cj} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{si\ neQc} \\ F_{ci\ neQc} \\ F_{sj\ neQc} \\ F_{cj\ neQc} \end{bmatrix} \quad 3.9$$

ed in cui la seguente matrice \mathbf{K}_L

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} K_{11}^L & K_{12}^L & K_{13}^L & K_{14}^L \\ K_{21}^L & K_{22}^L & K_{23}^L & K_{24}^L \\ K_{31}^L & K_{32}^L & K_{33}^L & K_{34}^L \\ K_{41}^L & K_{42}^L & K_{43}^L & K_{44}^L \end{bmatrix} \quad 3.10$$

rappresenta la matrice di rigidezza per l'elemento EFE-TM.

Il calcestruzzo, l'acciaio e l'interfaccia hanno comportamento elastico lineare nei vari tratti del percorso incrementale carico - spostamento.

Le forze nodali equivalenti al carico lineare assiale applicato sulla superficie esterna del cilindro di calcestruzzo assumono le seguenti espressioni analitiche:

$$F_{si\ neQc} = \frac{E_s A_s}{1+n\rho} \left\{ \frac{\gamma [1 - \text{Cosh}(\alpha L)] + \lambda L}{\alpha \text{Sinh}(\alpha L)} - \left[\frac{\lambda}{\alpha^2} + \frac{\lambda L^2}{6} + \frac{\gamma L}{2} \right] \right\} \quad 3.11$$

$$F_{\text{cineQc}} = \frac{n\rho E_c A_c}{1+n\rho} \left\{ \frac{\gamma [\text{Cosh}(\alpha L) - 1] - \lambda L}{\alpha \text{Sinh}(\alpha L)} + \frac{\lambda}{\alpha^2} + \right. \\ \left. + \frac{L^2}{6} \left(\frac{D_c \nabla q_c \alpha^2}{D_s G_o} - \lambda \right) - \frac{L}{2} \left[\gamma + \frac{D_c q_{ci} \alpha^2}{D_s G_o} \right] \right\} \quad 3.12$$

$$F_{\text{sjneQc}} = \frac{E_s A_s}{1+n\rho} \left\{ \frac{(\lambda L + \gamma) \text{Cosh}(\alpha L) - \gamma}{\alpha \text{Sinh}(\alpha L)} - \left[\frac{\lambda}{\alpha^2} + \frac{2\lambda L^2}{3} + \frac{3\gamma L}{2} \right] \right\} \quad 3.13$$

$$F_{\text{cjneQc}} = -\frac{n\rho \alpha E_c A_c}{1+n\rho} \left\{ \frac{(\lambda L + \gamma) \text{Cosh}(\alpha L) - \gamma}{\alpha^2 \text{Sinh}(\alpha L)} + \right. \\ \left. + \frac{L^2}{3\alpha} \left(\frac{D_c \nabla q_c \alpha^2}{D_s G_o} - \lambda \right) - \frac{L}{2\alpha} \left[\gamma + \frac{D_c q_{ci} \alpha^2}{D_s G_o} \right] \right\} \quad 3.14$$

Come già detto, il cilindro in calcestruzzo e la barra interna in acciaio costituiscono un composito formato da una matrice e da una lunga fibra parallela all'asse.

Per tale composito, potendosi assumere che la ε_{emp} è uguale alla ε_{cls} , nelle sezioni terminali un carico applicato P si ripartisce tra la matrice e la frazione della fibra in acciaio secondo la seguente espressione:

$$\varepsilon_{\text{cls}} = \varepsilon_{\text{emp}} \Rightarrow \begin{cases} P_s = \frac{n\rho}{1+n\rho} P \\ P_c = \frac{1}{1+n\rho} P \end{cases} \quad 3.15$$

Considerato che in notazione matriciale, la relazione tra il vettore delle funzioni di spostamento e gli spostamenti nodali è espressa dal prodotto della matrice \mathbf{N} , che contiene nella prima riga le funzioni di forma dell'acciaio N_{is} e nella seconda quelle del calcestruzzo N_{ic} , per il vettore \mathbf{U} degli spostamenti nodali:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}(x) \mathbf{U} \quad 3.16$$

i termini della matrice di rigidezza per l'EFE-TM possono scriversi nella forma seguente:

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{\text{TM}} = & \int_0^L \left\{ E_s A_s \frac{\partial}{\partial x} N_{is}(x) \frac{\partial}{\partial x} N_{js}(x) + E_c A_c \frac{\partial}{\partial x} N_{ic}(x) \frac{\partial}{\partial x} N_{jc}(x) \right\} dx + \\
& + \int_0^L \left\{ \pi D_s G_o [N_{is}(x) - N_{ic}(x)] [N_{js}(x) - N_{jc}(x)] \right\} dx
\end{aligned} \tag{3.17}$$

con $i, j=1 \dots 4$ ed $1 \Leftrightarrow si$, $2 \Leftrightarrow ci$, $3 \Leftrightarrow sj$, $4 \Leftrightarrow cj$.

Inoltre, le componenti del vettore dei carichi equivalenti nodali possono ricavarsi con le seguenti espressioni:

$$F_{si\ neQc} = \pi D_c \int_0^L q_c(x) N_{sic}(x) dx \tag{3.18}$$

$$F_{ci\ neQc} = \pi D_c \int_0^L q_c(x) N_{cic}(x) dx \tag{3.19}$$

$$F_{sj\ neQc} = \pi D_c \int_0^L q_c(x) N_{sjc}(x) dx \tag{3.20}$$

$$F_{cj\ neQc} = \pi D_c \int_0^L q_c(x) N_{cjc}(x) dx \tag{3.21}$$

Le espressioni delle funzioni di forma sono elencate in dettaglio nel paragrafo 4.4.

Sulla base del significato fisico dei termini della matrice di rigidità dell'elemento EFE-TM in un approccio diretto agli spostamenti, è possibile riportare che, essendo

$$F_s(x) = E_s A_s \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{N}_{1R}(x) \right] \mathbf{U} \tag{3.22}$$

$$F_c(x) = E_c A_c \left[\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{N}_{2R}(x) \right] \mathbf{U} \tag{3.23}$$

il termine K_{ij} della matrice di rigidità con la notazione

$i, j=1 \dots 4$ ed $1 \Leftrightarrow si$, $2 \Leftrightarrow ci$, $3 \Leftrightarrow sj$, $4 \Leftrightarrow cj$,

corrisponde alla forza che nasce in corrispondenza del grado di libertà i -esimo dell'elemento, quando viene impresso uno spostamento unitario al grado di libertà j -esimo, essendo nulli tutti gli spostamenti degli altri gradi di libertà (bloccando cioè tutti gli altri gradi di libertà), per cui in notazione compatta:

$$K_{ij}^{\text{TM}} = \mp \int_{x=0,L}^{\hat{}} N_{ij}(x) \Big|_i = \begin{cases} \mp \int_{\hat{}} N_{ji}(x) & i = 1,3 \quad x = 0, L \\ \mp \int_{\hat{}} N_{ji}(x) & i = 2,4 \quad x = 0, L \end{cases} \quad 3.24$$

con $\begin{cases} i=1 \dots 4 & \text{ed } 1,3 \Leftrightarrow s, \quad 2,4 \Leftrightarrow c; \\ j=1 \dots 4 & \text{ed } 1 \Leftrightarrow si, \quad 2 \Leftrightarrow ci, \quad 3 \Leftrightarrow sj, \quad 4 \Leftrightarrow cj. \end{cases}$

Dopo alcuni passaggi, si ottengono le stesse espressioni simboliche per i termini della matrice di rigidezza determinate in [106]; per esempio, riportiamo l'espressione per il termine

$$K_{11}^{\text{TM}} = \beta \left[\frac{n\rho}{\alpha L} + \frac{1}{\tanh(\alpha L)} \right] \quad \text{dove } \beta = \frac{E_s A_s \alpha}{1 + n\rho}. \quad 3.25$$

Tale formulazione, come sarà meglio descritta nel prossimo capitolo, è stata implementata in ambiente Mathematica® ed in una routine in Matlab®, in modo da assemblare i termini di rigidezza e risolvere il sistema di equazioni per ogni incremento di carico.

3.5.2. L'elemento monodimensionale soggetto a flessione

L'elemento monodimensionale composito tra due fessure, rappresentato da una trave a doppia armatura (DR) soggetta a flessione di lunghezza L, risulta formato da una matrice in calcestruzzo con immerse barre in acciaio ed è stato denominato EFE-FM (Elementary Finite Element - Flexural Member in Figura 3.7).

Il sistema di riferimento viene scelto con asse x congiungente i due nodi i e j e con origine nel baricentro della sezione di calcestruzzo interamente reagente, l'asse y appartenente al piano di simmetria della sezione e rivolto verso l'alto e l'asse z uscente dal piano che contiene gli altri due.

Nella determinazione della matrice di rigidezza dell'elemento, attraverso l'uso delle funzioni di forma derivate in forma chiusa dalla formulazione esatta del modello costitutivo lineare, il calcestruzzo viene considerato interamente reagente ed elastico lineare a trazione e com-

pressione, con segno delle tensioni di trazione positivo.

L'acciaio prossimo al bordo inferiore (T), che risulta teso nel caso di momento flettente positivo, presenta una sezione di area A_{ST} delimitata da una curva di lunghezza Φ_{ST} e con il baricentro di A_{ST} distante c dal bordo inferiore e \bar{y}_{sf} dall'origine del sistema di riferimento; quello prossimo al bordo superiore (C), che risulta compresso nel caso di momento flettente positivo, per analogia dei simboli utilizzati prima, presenta una sezione di area A_{SC} delimitata da una curva di lunghezza Φ_{SC} e con il baricentro di A_{SC} distante c dal bordo superiore e \bar{y}_{sf} dall'origine del sistema di riferimento.

A partire dallo schema definito per il DE-FM (Differential Element - Flexural Member) riportato nella Figura 3.8, verrà adottata, ove possibile, la notazione classica della meccanica strutturale.

Posto

$u_{co}(x)$	(spostamento orizzontale del baricentro della sezione in calcestruzzo)
$v(x, y) = v(x)$	(spostamento verticale della sezione in calcestruzzo armato - composito)
$\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x} v(x)$	(rotazione della sezione in calcestruzzo armato - composito)
$u_c(x, y) = u_{co}(x) - \varphi(x) y$	(spostamento orizzontale del generico punto della sezione in calcestruzzo)
$u_{st}(x, y) = u_{st}(x)$	(spostamento orizzontale della barra in acciaio inferiore)
$u_{sc}(x, y) = u_{sc}(x)$	(spostamento orizzontale della barra in acciaio superiore)
$s_T(x) = u_{st}(x) - u_c(x, -\bar{y}_{sf})$	(scorrimento interfaccia calcestruzzo - acciaio inferiore)
per cui	
$s_T(x) = u_{st}(x) - u_{co}(x) - \varphi(x) \bar{y}_{sf}$	
$s_C(x) = u_{sc}(x) - u_{co}(x, \bar{y}_{sf})$	(scorrimento interfaccia calcestruzzo - acciaio superiore)
per cui	
$s_C(x) = u_{sc}(x) - u_{co}(x) + \varphi(x) \bar{y}_{sf}$	
$\varepsilon_{co}(x) = \frac{\partial}{\partial x} u_{co}(x)$	(deformazione calcestruzzo nel baricentro sezione)
$\chi(x) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x)$	(curvatura nella sezione in calcestruzzo armato - composito)

$$\begin{aligned} \varepsilon_c(x, y) &= \varepsilon_{co}(x) - \chi(x) y && \text{(deformazione nel generico punto della sezione in calcestruzzo)} \\ \varepsilon_{st}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} u_{st}(x) && \text{(deformazione nell'acciaio inferiore)} \\ \varepsilon_{sc}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} u_{sc}(x) && \text{(deformazione nell'acciaio superiore)} \\ \sigma_c(x, y) &= E_c \left[\frac{\partial}{\partial x} u_{co}(x) - \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) y \right] && \text{(tensione nel generico punto della sezione in calcestruzzo)} \\ \sigma_{st}(x) &= E_s \left[\frac{\partial}{\partial x} u_{st}(x) \right] && \text{(tensione nell'acciaio inferiore)} \\ \sigma_{sc}(x) &= E_s \left[\frac{\partial}{\partial x} u_{sc}(x) \right] && \text{(tensione nell'acciaio superiore)} \\ \tau_T [s_T(x)] &= G_o s_T(x) && \text{(tensione di aderenza all'interfaccia calcestruzzo - acciaio inferiore)} \\ \tau_C [s_C(x)] &= G_o s_C(x) && \text{(tensione di aderenza all'interfaccia calcestruzzo - acciaio superiore)} \end{aligned}$$

essendo E_c il modulo di elasticità normale del calcestruzzo, E_s il modulo di elasticità normale dell'acciaio e G_o il modulo di elasticità tangenziale iniziale dell'interfaccia tra i due costituenti base, dal sistema di equazioni differenziali del secondo e del quarto ordine in termini di scorrimenti e spostamenti, che rappresentano le equazioni di equilibrio alla traslazione delle barre in acciaio e del concio in calcestruzzo ed alla rotazione rispetto all'asse z , espresse in dettaglio in appendice A, si ottengono le soluzioni in termini di spostamenti e rotazioni a partire dalle funzioni di scorrimento

Ponendo

$$\begin{aligned} n &= \frac{E_s}{E_c} && \text{(rapporto moduli di elasticità normale acciaio e calcestruzzo)} \\ \rho_T &= \frac{A_{st}}{A_c} && \text{(rapporto aree di acciaio inferiore e calcestruzzo)} \\ \rho_C &= \frac{A_{sc}}{A_c} && \text{(rapporto aree di acciaio superiore e calcestruzzo)} \\ \bar{\rho}_T &= n \rho_T && \text{(rapporto meccanico aree di acciaio inferiore e calcestruzzo)} \\ \bar{\rho}_C &= n \rho_C && \text{(rapporto meccanico aree di acciaio superiore e calcestruzzo)} \end{aligned}$$

$$\zeta_T = \frac{n A_{ST} \bar{y}_{sf}^2}{I_c} \quad \text{(rapporto momenti di inerzia acciaio inferiore omogeneizzato e calcestruzzo)}$$

$$\zeta_C = \frac{n A_{SC} \bar{y}_{sf}^2}{I_c} \quad \text{(rapporto momenti di inerzia acciaio superiore omogeneizzato e calcestruzzo)}$$

$$\alpha_T^2 = \frac{G_o \Phi_{ST}}{E_s A_{ST}} (1 + 2 \bar{\rho}_T) > 0 \quad \text{(caso ramo ascendente nel legame } \tau - s \text{)}$$

$$\alpha_C^2 = \frac{G_o \Phi_{SC}}{E_s A_{SC}} (1 + 2 \bar{\rho}_C) > 0 \quad \text{(caso ramo ascendente nel legame } \tau - s \text{)}$$

$$\alpha_{ST} = \frac{G_o \Phi_{ST}}{E_s A_{ST}} (1 + 2 \zeta_T) > 0 \quad \text{(caso ramo ascendente nel legame } \tau - s \text{)}$$

$$\alpha_{SC} = \frac{G_o \Phi_{SC}}{E_s A_{SC}} (1 + 2 \zeta_C) > 0 \quad \text{(caso ramo ascendente nel legame } \tau - s \text{)}$$

$$\beta_{ST} = \frac{G_o \Phi_{ST}}{E_s A_{ST}} > 0 \quad \text{(caso ramo ascendente nel legame } \tau - s \text{)}$$

$$\beta_{SC} = \frac{G_o \Phi_{SC}}{E_s A_{SC}} > 0 \quad \text{(caso ramo ascendente nel legame } \tau - s \text{)}$$

$$\beta_{CT} = \frac{G_o \Phi_{ST}}{E_c A_c} > 0 \quad \text{(caso ramo ascendente nel legame } \tau - s \text{)}$$

$$\beta_{CC} = \frac{G_o \Phi_{SC}}{E_c A_c} > 0 \quad \text{(caso ramo ascendente nel legame } \tau - s \text{)}$$

$$\gamma_{CT} = \frac{G_o \Phi_{ST} \bar{y}_{sf}}{E_c I_c} > 0 \quad \text{(caso ramo ascendente nel legame } \tau - s \text{)}$$

$$\gamma_{CC} = \frac{G_o \Phi_{SC} \bar{y}_{sf}}{E_c I_c} > 0 \quad \text{(caso ramo ascendente nel legame } \tau - s \text{)}$$

o in maniera equivalente

$$\alpha_T^2 = \beta_{ST} (1 + 2 \bar{\rho}_T) > 0 \quad \text{(caso ramo ascendente nel legame } \tau - s \text{)}$$

$$\alpha_C^2 = \beta_{SC} (1 + 2 \bar{\rho}_C) > 0 \quad \text{(caso ramo ascendente nel legame } \tau - s \text{)}$$

$$\alpha_{ST} = \beta_{ST} (1 + 2 \zeta_T) > 0 \quad \text{(caso ramo ascendente nel legame } \tau - s \text{)}$$

$$\alpha_{SC} = \beta_{SC} (1 + 2 \zeta_C) > 0 \quad \text{(caso ramo ascendente nel legame } \tau - s \text{)}$$

la funzione di scorrimento dell'acciaio inferiore (T) può scriversi come:

$$s_T(x) = -\frac{\alpha_C^2 c_1}{\alpha_T^2 \alpha_{SC} + \alpha_C^2 \alpha_{ST}} + c_2 e^{-\beta_1 x} + c_3 e^{\beta_1 x} + c_4 e^{-\beta_2 x} + c_5 e^{\beta_2 x} \quad 3.26$$

essendo

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_T^2 + \alpha_{ST} + \alpha_{SC} + \alpha_C^2 - \sqrt{[\alpha_T^2 + \alpha_{ST} + \alpha_{SC} + \alpha_C^2]^2 - 8[\alpha_T^2 \alpha_{SC} + \alpha_C^2 \alpha_{ST}]}} \quad 3.27$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_T^2 + \alpha_{ST} + \alpha_{SC} + \alpha_C^2 + \sqrt{[\alpha_T^2 + \alpha_{ST} + \alpha_{SC} + \alpha_C^2]^2 - 8[\alpha_T^2 \alpha_{SC} + \alpha_C^2 \alpha_{ST}]}}$$

mentre la funzione di scorrimento dell'acciaio inferiore (C) risulta:

$$s_C(x) = c_1 \frac{\alpha_T^2}{\alpha_T^2 \alpha_{SC} + \alpha_C^2 \alpha_{ST}} + c_2 \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{ST})}{\alpha_C^2 - \alpha_{SC}} e^{-\beta_1 x} +$$

$$+ c_3 \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{ST})}{\alpha_C^2 - \alpha_{SC}} e^{\beta_1 x} + c_4 \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{ST})}{\alpha_C^2 - \alpha_{SC}} e^{-\beta_2 x} +$$

$$+ c_5 \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{ST})}{\alpha_C^2 - \alpha_{SC}} e^{\beta_2 x} \quad 3.28$$

e le funzioni di spostamento generalizzato assumono la forma:

$$u_{ST}(x) = -\frac{1}{2} \frac{\beta_{ST} \alpha_C^2 x^2}{\alpha_T^2 \alpha_{SC} + \alpha_C^2 \alpha_{ST}} c_1 + c_2 \frac{\beta_{ST}}{\beta_1^2} e^{-\beta_1 x} + c_3 \frac{\beta_{ST}}{\beta_1^2} e^{\beta_1 x} +$$

$$+ c_4 \frac{\beta_{ST}}{\beta_2^2} e^{-\beta_2 x} + c_5 \frac{\beta_{ST}}{\beta_2^2} e^{\beta_2 x} + c_6 x + c_7 \quad 3.29$$

$$u_{SC}(x) = \frac{1}{2} \frac{\beta_{SC} \alpha_T^2 x^2}{\alpha_T^2 \alpha_{SC} + \alpha_C^2 \alpha_{ST}} c_1 + c_2 \frac{\beta_{SC}}{\beta_1^2} \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{ST})}{\alpha_C^2 - \alpha_{SC}} e^{-\beta_1 x} +$$

$$+ c_3 \frac{\beta_{SC}}{\beta_1^2} \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{ST})}{\alpha_C^2 - \alpha_{SC}} e^{\beta_1 x} + c_4 \frac{\beta_{SC}}{\beta_2^2} \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{ST})}{\alpha_C^2 - \alpha_{SC}} e^{-\beta_2 x} +$$

$$+ c_5 \frac{\beta_{SC}}{\beta_2^2} \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{ST})}{\alpha_C^2 - \alpha_{SC}} e^{\beta_2 x} + c_8 x + c_9 \quad 3.30$$

$$\begin{aligned}
u_{\text{co}}(x) = & c_1 \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\text{sc}} \alpha_{\text{T}}^2 - \beta_{\text{st}} \alpha_{\text{C}}^2}{\alpha_{\text{T}}^2 \alpha_{\text{sc}} + \alpha_{\text{C}}^2 \alpha_{\text{st}}} \frac{x^2}{2} - \frac{\alpha_{\text{T}}^2 - \alpha_{\text{C}}^2}{\alpha_{\text{T}}^2 \alpha_{\text{sc}} + \alpha_{\text{C}}^2 \alpha_{\text{st}}} \right) + \\
& + c_2 \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\text{st}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} + \frac{\beta_{\text{sc}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{st}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{sc}}} \right) e^{-\beta_1 x} + \\
& + c_3 \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\text{st}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} + \frac{\beta_{\text{sc}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{st}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{sc}}} \right) e^{\beta_1 x} + \\
& + c_4 \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\text{st}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} + \frac{\beta_{\text{sc}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{st}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{sc}}} \right) e^{-\beta_2 x} + \\
& + c_5 \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\text{st}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} + \frac{\beta_{\text{sc}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{st}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{sc}}} \right) e^{\beta_2 x} + \\
& + c_6 \frac{1}{2} x + c_7 \frac{1}{2} + c_8 \frac{1}{2} x + c_9 \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = & c_1 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} \left(- \frac{\beta_{\text{sc}} \alpha_{\text{T}}^2 + \beta_{\text{st}} \alpha_{\text{C}}^2}{\alpha_{\text{T}}^2 \alpha_{\text{sc}} + \alpha_{\text{C}}^2 \alpha_{\text{st}}} \frac{x^2}{2} + \frac{\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{C}}^2}{\alpha_{\text{T}}^2 \alpha_{\text{sc}} + \alpha_{\text{C}}^2 \alpha_{\text{st}}} \right) + \\
& + c_2 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} \left(\frac{\beta_{\text{st}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} - \frac{\beta_{\text{sc}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{st}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{sc}}} \right) e^{-\beta_1 x} + \\
& + c_3 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} \left(\frac{\beta_{\text{st}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} - \frac{\beta_{\text{sc}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{st}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{sc}}} \right) e^{\beta_1 x} + \\
& + c_4 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} \left(\frac{\beta_{\text{st}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} - \frac{\beta_{\text{sc}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{st}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{sc}}} \right) e^{-\beta_2 x} + \\
& + c_5 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} \left(\frac{\beta_{\text{st}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} - \frac{\beta_{\text{sc}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{st}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{sc}}} \right) e^{\beta_2 x} + \\
& + c_6 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} x + c_7 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} - c_8 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} x - c_9 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
v(x) = & c_1 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} \left(-\frac{\beta_{sc} \alpha_T^2 + \beta_{st} \alpha_c^2}{\alpha_T^2 \alpha_{sc} + \alpha_c^2 \alpha_{st}} \frac{x^3}{6} + \frac{\alpha_T^2 + \alpha_c^2}{\alpha_T^2 \alpha_{sc} + \alpha_c^2 \alpha_{st}} x \right) + \\
& + c_2 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} \left(-\frac{\beta_{st} - \beta_1^2}{\beta_1^3} + \frac{\beta_{sc} - \beta_1^2}{\beta_1^3} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{-\beta_1 x} + \\
& + c_3 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} \left(\frac{\beta_{st} - \beta_1^2}{\beta_1^3} - \frac{\beta_{sc} - \beta_1^2}{\beta_1^3} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{\beta_1 x} + \\
& + c_4 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} \left(-\frac{\beta_{st} - \beta_2^2}{\beta_2^3} + \frac{\beta_{sc} - \beta_2^2}{\beta_2^3} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{-\beta_2 x} + \\
& + c_5 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} \left(\frac{\beta_{st} - \beta_2^2}{\beta_2^3} - \frac{\beta_{sc} - \beta_2^2}{\beta_2^3} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{\beta_2 x} + \\
& + c_6 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} \frac{x^2}{2} + c_7 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} x - c_8 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} \frac{x^2}{2} - c_9 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} x + c_{10}.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Come già detto nel caso assiale, le predette relazioni valgono in forma incrementale, considerando nei passi di discretizzazione del percorso di carico - spostamento, i materiali calcestruzzo, acciaio elastico lineari con moduli di elasticità normale tangente E_c ed E_s ; anche l'interfaccia sarà di tipo elastico lineare con modulo G_0 .

Nel caso limite di area di armatura superiore pari a zero (caso di sezione armata a semplice armatura - SR), le precedenti soluzioni in termini di spostamenti e rotazioni a partire dalla funzione di scorrimento possono scriversi nella forma seguente.

Ponendo

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (\text{rapporto moduli di elasticità normale acciaio e calcestruzzo})$$

$$\rho_T = \frac{A_{st}}{A_c} \quad (\text{rapporto aree di acciaio inferiore e calcestruzzo})$$

$$\bar{\rho}_T = n \rho_T \quad (\text{rapporto meccanico aree di acciaio inferiore e calcestruzzo})$$

$$\zeta_T = \frac{n A_{st} \bar{y}_{sf}^2}{I_c} \quad (\text{rapporto momenti di inerzia acciaio inferiore omogeneizzato e calcestruzzo})$$

$$\alpha_T^2 = \frac{G_0 \Phi_{st}}{E_s A_{st}} (1 + 2 \bar{\rho}_T) > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\alpha_{ST} = \frac{G_o \Phi_{ST}}{E_s A_{ST}} (1 + 2\zeta_T) > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\beta_{ST} = \frac{G_o \Phi_{ST}}{E_s A_{ST}} > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\beta_{CT} = \frac{G_o \Phi_{ST}}{E_c A_c} > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\gamma_{CT} = \frac{G_o \Phi_{ST} \bar{y}_{sf}}{E_c I_c} > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

o equivalentemente

$$\alpha_T^2 = \beta_{ST} (1 + 2\bar{\rho}_T) > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\alpha_{ST} = \beta_{ST} (1 + 2\zeta_T) > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\frac{\alpha_T^2 + \alpha_{ST}}{2} = \beta_{ST} + \beta_{CT} + \bar{y}_{sf} \gamma_{CT} \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

la funzione di scorrimento può scriversi nella forma:

$$s_T(x) = -\frac{c_1}{\beta_2^2} + c_4 e^{-\beta_2 x} + c_5 e^{\beta_2 x} \quad 3.34$$

essendo, come è possibile verificare,

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{\alpha_T^2 + \alpha_{ST}}{2}} \quad 3.35$$

e le soluzioni in termini di spostamenti e rotazioni a partire dalla funzione di scorrimento, posto

$$\alpha = \beta_2$$

$$\rho = \rho_T$$

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_T$$

$$\zeta = \zeta_T$$

$$s(x) = s_T(x)$$

$$u_s(x) = u_{ST}(x)$$

e rinumerando le costanti di integrazione, risultano:

$$s(x) = -\frac{c_0}{\alpha^2} + c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} \quad 3.36$$

$$u_s(x) = \frac{1}{1 + \bar{\rho} + \zeta} \left[c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} - c_0 \frac{x^2}{2} \right] + c_3 x + c_4 \quad 3.37$$

$$u_{co}(x) = -\frac{\bar{\rho}}{1 + \bar{\rho} + \zeta} \left[c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} - c_0 \frac{x^2}{2} \right] + c_5 x + c_6 \quad 3.38$$

$$\varphi(x) = -\frac{\zeta}{\bar{y}_{sf}(1 + \bar{\rho} + \zeta)} \left[c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} + \frac{1 + \bar{\rho}}{\zeta} c_0 \frac{x^2}{2} \right] - \frac{1}{\bar{y}_{sf}} (c_5 - c_3) x - \frac{1}{\bar{y}_{sf}} \left(c_6 - c_4 - \frac{c_0}{\alpha^2} \right) \quad 3.39$$

$$v(x) = -\frac{\zeta}{\alpha \bar{y}_{sf}(1 + \bar{\rho} + \zeta)} \left[c_1 e^{\alpha x} - c_2 e^{-\alpha x} + \frac{(1 + \bar{\rho}) \alpha}{2 \zeta} c_0 \frac{x^3}{3} \right] - \frac{1}{\bar{y}_{sf}} (c_5 - c_3) \frac{x^2}{2} - \frac{1}{\bar{y}_{sf}} \left(c_6 - c_4 - \frac{c_0}{\alpha^2} \right) x + c_{10}. \quad 3.40$$

Considerato che in notazione matriciale, la relazione tra il vettore delle funzioni di spostamento generalizzato e gli spostamenti nodali è espressa dal prodotto della matrice \mathbf{N} , che contiene rispettivamente nelle righe le funzioni di forma dello spostamento dell'acciaio inferiore N_{ist} , di quello superiore N_{isc} , dello spostamento orizzontale del baricentro geometrico della sezione in calcestruzzo N_{ico} , della rotazione della sezione $N_{i\phi}$ e dello spostamento verticale N_{iv} , per il vettore \mathbf{U} degli spostamenti nodali generalizzati:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}(x) \mathbf{U} \quad 3.41$$

i termini della matrice di rigidezza per l'EFE-FM, tenendo conto che le espressioni esplicite delle funzioni di forma nella (3.42) sono riportate in dettaglio nel paragrafo 4.4, si scrivono come:

$$\begin{aligned}
K_{ij}^{FM} = \int_0^L & \left\{ \left[E_c I_c \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_{iv}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} N_{jv}(x) + E_c A_c \frac{\partial}{\partial x} N_{ico}(x) \frac{\partial}{\partial x} N_{jco}(x) \right] + \right. \\
& + \left[E_s A_{st} \frac{\partial}{\partial x} N_{ist}(x) \frac{\partial}{\partial x} N_{jst}(x) + E_s A_{sc} \frac{\partial}{\partial x} N_{isc}(x) \frac{\partial}{\partial x} N_{jsc}(x) \right] + \\
& + \left[\Phi_{st} G_\tau \left[N_{ist}(x) - N_{ico}(x) - \bar{y}_{sf} \frac{\partial}{\partial x} N_{iv}(x) \right] \cdot \right. \\
& \quad \cdot \left. \left[N_{jst}(x) - N_{jco}(x) - \bar{y}_{sf} \frac{\partial}{\partial x} N_{jv}(x) \right] \right] + \\
& + \left[\Phi_{sc} G_\tau \left[N_{isc}(x) - N_{ico}(x) + \bar{y}_{sf} \frac{\partial}{\partial x} N_{iv}(x) \right] \cdot \right. \\
& \quad \cdot \left. \left[N_{jsc}(x) - N_{jco}(x) + \bar{y}_{sf} \frac{\partial}{\partial x} N_{jv}(x) \right] \right] \left. \right\} dx
\end{aligned} \tag{3.42}$$

con $i, j=1 \dots 10$ ed $1 \Leftrightarrow STi$, $2 \Leftrightarrow SCi$, $3 \Leftrightarrow COi$, $4 \Leftrightarrow \phi i$, $5 \Leftrightarrow vi$,
 $6 \Leftrightarrow STj$, $7 \Leftrightarrow SCj$, $8 \Leftrightarrow COj$, $9 \Leftrightarrow \phi j$, $10 \Leftrightarrow vj$,
conducendo alla formulazione lineare di equilibrio discreto:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{U} \tag{3.43}$$

in cui i vettori \mathbf{F} ed \mathbf{U} avranno dieci componenti e la matrice di rigidità \mathbf{K} sarà di dimensione 10×10 .

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} F_{Si} \\ F_{Ci} \\ F_{COi} \\ M_i \\ F_{Vi} \\ F_{Sj} \\ F_{Cj} \\ F_{COj} \\ M_j \\ F_{Vj} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} & K_{19} & K_{110} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} & K_{29} & K_{210} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} & K_{39} & K_{310} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} & K_{49} & K_{410} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} & K_{59} & K_{510} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} & K_{69} & K_{610} \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} & K_{79} & K_{710} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} & K_{89} & K_{810} \\ K_{91} & K_{92} & K_{93} & K_{94} & K_{95} & K_{96} & K_{97} & K_{98} & K_{99} & K_{910} \\ K_{101} & K_{102} & K_{103} & K_{104} & K_{105} & K_{106} & K_{107} & K_{108} & K_{109} & K_{1010} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{Si} \\ u_{Ci} \\ u_{COi} \\ \phi_i \\ v_i \\ u_{Sj} \\ u_{Cj} \\ u_{COj} \\ \phi_j \\ v_j \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Tale formulazione, come sarà meglio descritta nel prossimo capitolo, è stata implementata in ambiente Mathematica® ed in una routine in Matlab®, in modo da assemblare i termini di rigidezza e risolvere il sistema di equazioni per ogni incremento di carico.

3.6. Elementi cracked ed uncracked

L'analisi del problema tipico della trazione di un elemento in calcestruzzo armato mostra che le tensioni di aderenza diminuiscono con l'aumentare della distanza dalle estremità del campione, la tensione nell'armatura diminuisce ed aumenta quella nella sezione di calcestruzzo. In un campione simmetrico dal punto di vista geometrico e meccanico, la tensione di trazione nella sezione trasversale centrale dell'elemento in calcestruzzo assume il valore massimo. Quando tale valore supera il valore limite della resistenza a trazione del materiale, il calcestruzzo si fessura.

Le tecniche numeriche di solito ignorano la necessità di individuare una fessura discreta e seguono gli spostamenti dei suoi nuovi margini, adottando l'approccio *smearred crack*, il cui maggior vantaggio è quello di preservare la continuità e di evitare la necessità di aumentare il numero di elementi e nodi con l'aumento del numero di fessure.

Le fessure discrete, tuttavia, descrivono meglio il comportamento reale del calcestruzzo e formano una discontinuità nei campi di spostamenti, deformazioni e tensioni. Una formulazione di fessura discreta consente la previsione di una certa larghezza di fessura e segue la sua crescita con l'aumento del carico applicato.

Pertanto, nel modello monodimensionale trattato, la sezione fessurata è identificata all'interno di un elemento, suddividendo l'elemento in due sotto-elementi e, sebbene si formino matrici di rigidezza distinte per i due nuovi sub-elementi, la loro condensazione consente di ottenere una matrice rigidezza dell'elemento fessurato che è completamente definito dai suoi nodi globali originali esterni, senza bisogno di aggiungere nuovi nodi alle facce della fessura.

Si consideri la fase di carico in cui la tensione limite a trazione del calcestruzzo viene raggiunta all'interno di un certo elemento $i-j$ ad una

certa distanza a dal nodo i .

L'ascissa $x_{cmax} = L_1$ che individua la posizione del crack permette, dunque, la determinazione dei due sub elementi del BFE (cracked).

In questa fase, l'elemento illustrato nella Figura 3.17 è diviso longitudinalmente in due sottoelementi di calcestruzzo, con nuovi nodi interni $k=1Cj$ e $l=2Ci$; una molla non lineare di rigidezza $K_c(G_F, w)$ e lunghezza iniziale zero viene introdotta tra i sottoelementi di calcestruzzo, collegata alle due nuove facce del medesimo materiale.

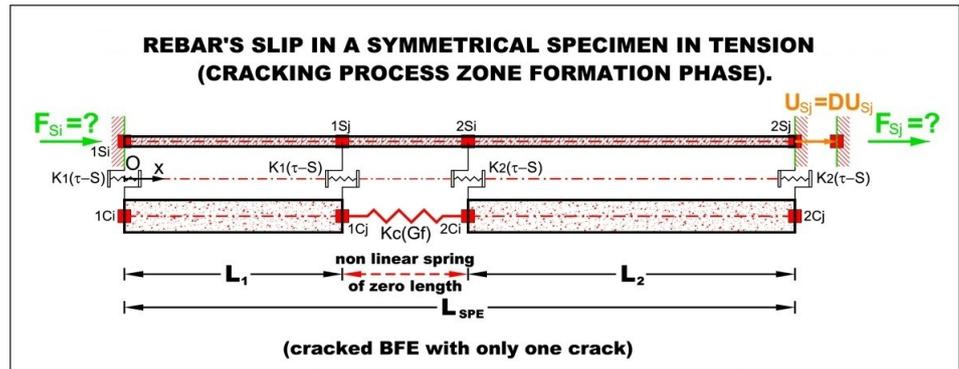


Figura 3.17: Modello meccanico del BFE-FM (cracked).

La rigidezza della molla descrive il ramo discendente del modello coesivo e il suo allungamento w rappresenta la differenza di spostamenti tra le due facce della fessura e cioè la larghezza stessa della fessura. Nel caso di uno sviluppo graduale di una fessura discreta, deve essere specificato un ramo discendente, per cui può essere determinata la corrispondente rigidezza della molla.

Nel caso di elemento BFE (cracked), al fine di potersi riferire sempre ai nodi di estremità eliminando quelli interni, viene effettuato l'assemblaggio di due matrici di elementi EFE (uncracked) di lunghezze L_1 ed L_2 , con legame di continuità nei nodi interni della barra di acciaio e molla non lineare di lunghezza nulla e rigidezza K_c nei nodi interni degli elementi in calcestruzzo; la successiva condensazione permetterà l'eliminazione di tali nodi interni.

La suddetta condensazione permette di ottenere la matrice di rigidezza dell'elemento cracked BFE, pienamente definita per mezzo dei

suoi nodi globali originari.

La matrice di rigidezza dell'elemento fessurato può essere derivata sovrapponendo le due matrici di rigidezza dei sottoelementi $i-k$ e $l-j$, di lunghezza rispettivamente L_1 e $L_2 = L - L_1$.

Le matrici di rigidezza dei sub elementi saranno:

$$\mathbf{K}_{L_1} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{L_1} & \mathbf{K}_{12}^{L_1} & \mathbf{K}_{13}^{L_1} & \mathbf{K}_{14}^{L_1} \\ \mathbf{K}_{21}^{L_1} & \mathbf{K}_{22}^{L_1} & \mathbf{K}_{23}^{L_1} & \mathbf{K}_{24}^{L_1} \\ \mathbf{K}_{31}^{L_1} & \mathbf{K}_{32}^{L_1} & \mathbf{K}_{33}^{L_1} & \mathbf{K}_{34}^{L_1} \\ \mathbf{K}_{41}^{L_1} & \mathbf{K}_{42}^{L_1} & \mathbf{K}_{43}^{L_1} & \mathbf{K}_{44}^{L_1} \end{bmatrix} \quad 3.45$$

che rappresenta la matrice di rigidezza del sub elemento di lunghezza L_1 , che nel BFE rappresenta l'ascissa della sezione in cui si è formato il primo crack;

$$\mathbf{K}_{L_2} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{L_2} & \mathbf{K}_{12}^{L_2} & \mathbf{K}_{13}^{L_2} & \mathbf{K}_{14}^{L_2} \\ \mathbf{K}_{21}^{L_2} & \mathbf{K}_{22}^{L_2} & \mathbf{K}_{23}^{L_2} & \mathbf{K}_{24}^{L_2} \\ \mathbf{K}_{31}^{L_2} & \mathbf{K}_{32}^{L_2} & \mathbf{K}_{33}^{L_2} & \mathbf{K}_{34}^{L_2} \\ \mathbf{K}_{41}^{L_2} & \mathbf{K}_{42}^{L_2} & \mathbf{K}_{43}^{L_2} & \mathbf{K}_{44}^{L_2} \end{bmatrix} \quad 3.46$$

che descrive la matrice di rigidezza del sub elemento di lunghezza L_2 , che nel BFE rappresenta la differenza tra la lunghezza dell'elemento finito di base e quella del tratto a sinistra del primo crack;

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^L & \mathbf{K}_{12}^L \\ \mathbf{K}_{21}^L & \mathbf{K}_{22}^L \end{bmatrix} \quad 3.47$$

che rappresenta, infine, la matrice di rigidezza dell'elemento BFE (cracked) di lunghezza $L = L_1 + L_2$.

Per comodità, appare opportuno riorganizzare la matrice di rigidez-

za dell'elemento fessurato in modo da suddividere i gradi di libertà esterni (i e j) e i gradi di libertà interni (k e l). Questi sono riorganizzati attraverso una matrice di rigidità che si compone di quattro sottomatrici \mathbf{K}_{11} , \mathbf{K}_{12} , \mathbf{K}_{21} , \mathbf{K}_{22} .

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^* \\ \mathbf{U}_{\text{int}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}^* \\ \mathbf{F}_{\text{int}} \end{bmatrix} \quad 3.18$$

in cui \mathbf{U}^* è il vettore degli spostamenti corrispondenti ai gradi di libertà globali dell'acciaio e del calcestruzzo ai nodi esterni i e j , descritto come segue:

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} \Delta U_{\text{Si}} \\ \Delta U_{\text{Ci}} \\ \Delta U_{\text{Sj}} \\ \Delta U_{\text{Cj}} \end{bmatrix} \quad 3.49$$

\mathbf{F}^* è il vettore dei carichi, corrispondenti ai gradi di libertà globali dell'acciaio e del calcestruzzo ai nodi esterni i e j :

$$\mathbf{F}^* = \begin{bmatrix} \Delta F_{\text{Si}} \\ \Delta F_{\text{Ci}} \\ \Delta F_{\text{Sj}} \\ \Delta F_{\text{Cj}} \end{bmatrix} \quad 3.50$$

\mathbf{U}_{int} è il vettore degli spostamenti, corrispondente ai gradi di libertà interni dell'acciaio e del calcestruzzo ai nodi interni k e l :

$$\mathbf{U}_{\text{int}} = \begin{bmatrix} \Delta U_{\text{Sk}} \\ \Delta U_{\text{Ck}} \\ \Delta U_{\text{Cl}} \end{bmatrix} \quad 3.51$$

\mathbf{F}_{int} è il vettore dei carichi, corrispondente ai gradi interni di libertà interni del calcestruzzo e dell'armatura ai nodi interni k e l :

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = \begin{bmatrix} \Delta F_{\text{Sk}} \\ \Delta F_{\text{Ck}} \\ \Delta F_{\text{Cl}} \end{bmatrix} \quad 3.52$$

Le sottomatrici di rigidezza della matrice $\mathbf{K}^L = \mathbf{K}$, precedentemente definita, sono le seguenti:

$$\mathbf{K}_{11}^L = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{L_1} & \mathbf{K}_{12}^{L_1} & 0 & 0 \\ \mathbf{K}_{21}^{L_1} & \mathbf{K}_{22}^{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{33}^{L_2} & \mathbf{K}_{34}^{L_2} \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{43}^{L_2} & \mathbf{K}_{44}^{L_2} \end{bmatrix} \quad 3.53$$

$$\mathbf{K}_{12}^L = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{13}^{L_1} & \mathbf{K}_{14}^{L_1} & 0 \\ \mathbf{K}_{23}^{L_1} & \mathbf{K}_{24}^{L_1} & 0 \\ \mathbf{K}_{31}^{L_2} & 0 & \mathbf{K}_{32}^{L_2} \\ \mathbf{K}_{41}^{L_2} & 0 & \mathbf{K}_{42}^{L_2} \end{bmatrix} \quad 3.54$$

$$\mathbf{K}_{21}^L = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{31}^{L_1} & \mathbf{K}_{32}^{L_1} & \mathbf{K}_{13}^{L_2} & \mathbf{K}_{14}^{L_2} \\ \mathbf{K}_{41}^{L_1} & \mathbf{K}_{42}^{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{K}_{23}^{L_2} & \mathbf{K}_{24}^{L_2} \end{bmatrix} \quad 3.55$$

$$\mathbf{K}_{22}^L = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{33}^{L_1} + \mathbf{K}_{11}^{L_2} & \mathbf{K}_{34}^{L_1} & \mathbf{K}_{12}^{L_2} \\ \mathbf{K}_{43}^{L_1} & \mathbf{K}_{44}^{L_1} + \mathbf{K}_c & -\mathbf{K}_c \\ \mathbf{K}_{21}^{L_2} & -\mathbf{K}_c & \mathbf{K}_{22}^{L_2} + \mathbf{K}_c \end{bmatrix} \quad 3.56$$

dove \mathbf{K}_{ij}^w è il termine di rigidezza i, j del sub-elemento w . Per esempio, $\mathbf{K}_{43}^{L_2}$ (che compare nella quarta riga della sottomatrice \mathbf{K}_{11}) è il termine di rigidezza \mathbf{K}_{43} del secondo sub-elemento.

L'eliminazione dei gradi di libertà interni lega il vettore delle forze esterne \mathbf{F}^* e quello degli spostamenti globali \mathbf{U}^* , attraverso la matrice di rigidezza condensata:

$$\mathbf{K}_{CD}^L = \mathbf{K}_{11}^L - \mathbf{K}_{12}^L \left[\mathbf{K}_{22}^L \right]^{-1} \mathbf{K}_{21}^L. \quad 3.57$$

I vettori interni delle forze e degli spostamenti vengono, quindi, eliminati e la rigidezza dell'elemento fessurato si esprime sempre e solo attraverso i suoi nodi globali esterni i e j .

In termini di equilibrio fra forze interne ed esterne, può scriversi la seguente relazione non lineare

$$\mathbf{K}_{CD}^L(\mathbf{u}) \mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad 3.58$$

che denota anche in forma compatta il comportamento non lineare del calcestruzzo teso ed in cui anche sul vettore delle forze opera la trasformazione di condensazione come segue:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{CD}^L = \mathbf{F}^* - \mathbf{K}_{12}^L \left[\mathbf{K}_{22}^L \right]^{-1} \mathbf{F}_{int}. \quad 3.59$$

Tutto ciò permette di seguire le fessure in via di sviluppo all'interno dell'elemento in cemento armato, senza bisogno di aumentare il numero

di elementi e definire nuove condizioni al contorno ogni volta che appare una nuova fessura.

Tale procedura di condensazione è stata implementata in ambiente Mathematica® ed in una subroutine in Matlab® in modo da essere richiamata dal programma principale ogni qualvolta necessario.

In maniera del tutto analoga al caso assiale soggetto a trazione, potrà condursi l'ulteriore sviluppo della ricerca in relazione all'elemento soggetto a flessione, come rappresentato nella Figura 3.18, che descrive la fase di formazione della zona di processo della frattura nel modello di attivazione di interfaccia immersa di tipo coesivo.

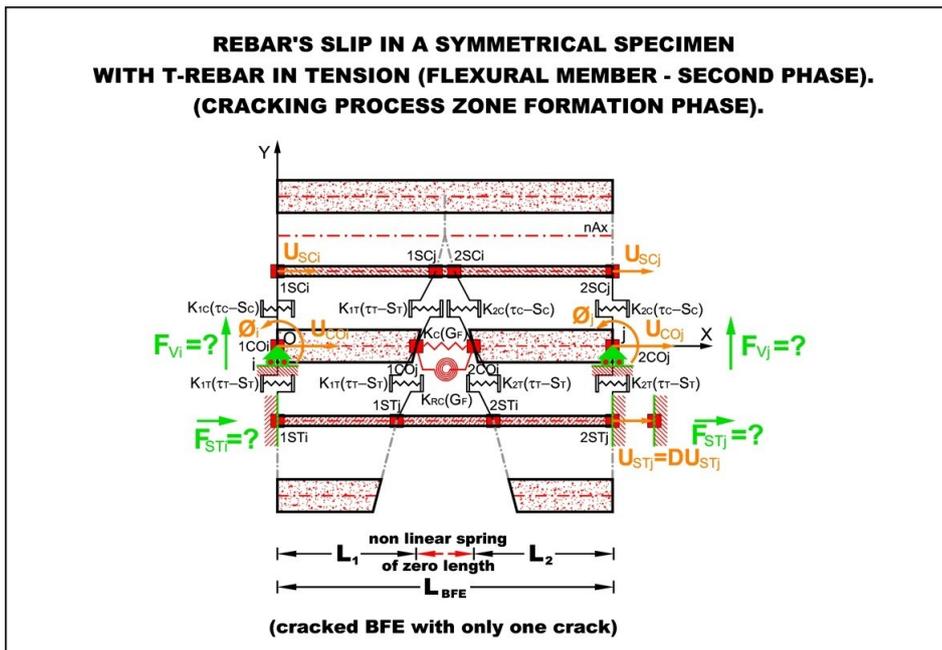


Figura 3.18: Modello meccanico del BFE-FM (cracked).

In funzione dell'energia di frattura del calcestruzzo G_F , le rigidzze delle molle non lineari di tipo traslazionale $K_C(G_F)$ e rotazionale $K_{RC}(G_F)$, da introdurre nella matrice di rigidzezza dell'elemento finito di base di tipo fessurato BFE-FM (cracked), potranno essere tarate, sulla base della legge di trazione - separazione del calcestruzzo, attraverso un criterio basato proporzionalmente sul livello di carico assiale e flessio-

nale puri e disaccoppiati nella sezione con discontinuità immersa, raggiunto antecedentemente alla fase di incipiente formazione della frattura coesiva.

In tal caso, potrà introdursi un rapporto β_σ , all'inizio della formazione della frattura, tra il livello di tensione normale di trazione causata dalla flessione e la resistenza a trazione del calcestruzzo; il punto/grado di libertà interno di controllo dell'apertura della fessura, potrebbe essere scelto sulla fibra estrema della zona soggetta a trazione, essendo l'apertura (separazione) in tale fibra cinematicamente legata al contributo di apertura in corrispondenza del baricentro della sezione geometrica del calcestruzzo (legge trazione separazione $\sigma-w_{co}$) ed al contributo rotazionale dell'intera sezione trasversale (legge trazione separazione $\sigma-w_R$), attraverso l'altezza della medesima sezione.

La matrice di rigidezza dell'elemento flessionale fessurato BFE-FM (cracked) assumerà una forma funzionale del tipo

$$\mathbf{K}_{CD}^L = \mathbf{K}_{CD}^L(\mathbf{K}_{ij}^{L_1}, \mathbf{K}_{ij}^{L_2}, \mathbf{K}_C, \mathbf{K}_{RC}, \beta_\sigma) \quad 3.60$$

dipendente dalle caratteristiche geometriche e meccaniche dei due subelementi EFE-FM di lunghezza L_1 e L_2 e dalle caratteristiche meccaniche delle predette molle traslazionale e rotazionale a comportamento non lineare.

CAPITOLO 4

IMPLEMENTAZIONE NEL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI

4.1. Introduzione

Nello studio dei sistemi continui, nella maggior parte dei casi di interesse pratico, la forma geometrica e le condizioni al contorno sono troppo complesse per poter applicare procedimenti analitici: nelle analisi sia statiche sia dinamiche si deve allora fare ricorso ad altri metodi, per lo più basati sull'uso del calcolatore. Tra tali metodi, ampiamente impiegato è quello degli elementi finiti, che considera il sistema continuo costituito da elementi "finiti", cioè di dimensioni finite, anziché di dimensioni infinitesime, come nel caso dei metodi analitici.

L'idea di definire, non un'unica funzione per l'intera struttura, ma una funzione per ciascun tratto della stessa permette di applicare il metodo a strutture anche molto complesse, adottando peraltro funzioni di forma molto semplici e ripetitive. Il principio è che, se le funzioni di forma assunte per i vari elementi sono scelte opportunamente, la soluzione può convergere a quella esatta per l'intera struttura al diminuire delle dimensioni degli elementi finiti.

All'interno di ogni elemento finito si individuano dei punti caratteristici, detti nodi, i cui spostamenti giocano il ruolo di gradi di libertà dell'elemento.

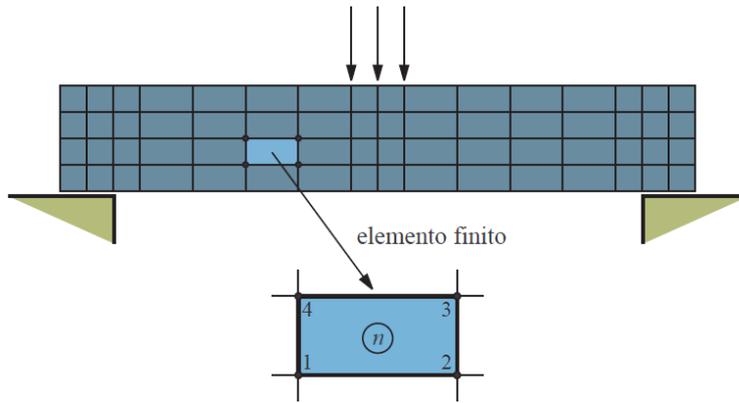


Figura 4.1: Discretizzazione per elementi finiti.
Elemento finito n -esimo e numerazione locale dei nodi.

Durante il processo di risoluzione, vengono soddisfatti l'equilibrio e la congruenza degli spostamenti ai nodi, così che l'intera struttura si comporta come un'unica entità.

La scelta di un modello numerico per l'analisi di qualsiasi problema strutturale non può prescindere da alcuni fattori fondamentali: gli obiettivi dell'analisi; l'accuratezza richiesta; il tipo di analisi che si intende effettuare (lineare o non lineare); la tipologia strutturale oggetto dell'analisi; le risorse di calcolo che si hanno a disposizione.

La modellazione numerica delle discontinuità forti nell'ambito del metodo degli elementi finiti richiede l'uso di formulazioni non standard per consentire la trattazione di salti nel campo di spostamento.

L'approccio alle discontinuità forti descritto nel capitolo precedente è stato sviluppato senza riferimento ad un particolare metodo numerico e può, pertanto, essere usato come modello matematico di base per lo sviluppo, in principio, di diversi modelli numerici.

Nella implementazione discreta, la legge trazione-separazione dell'interfaccia immersa viene introdotta in maniera esplicita. In questo caso è necessario dedurre esplicitamente la legge costitutiva discreta indotta dal modello continuo da usare all'interfaccia oppure è possibile usare una legge costitutiva all'interfaccia indipendente dal modello continuo. Con il predetto approccio il regime delle discontinuità forti viene raggiunto effettivamente.

In letteratura, l'implementazione di tale approccio con discontinuità immerse porta alla scrittura a livello elementare di un sistema di equazioni di equilibrio, costituito dalle equazioni di equilibrio classiche a cui si aggiunge una equazione addizionale che esprime in forma debole l'equilibrio tra le tensioni all'interfaccia e le tensioni nell'elemento.

In questo sistema, oltre ai gradi di libertà nodali, compaiono dei gradi di libertà aggiuntivi costituiti dalle componenti del vettore salto di spostamento, che vengono eliminati tramite una tecnica di condensazione statica.

Nella letteratura specializzata vi sono molti lavori che trattano del Metodo delle Discontinuità Forti secondo la sua implementazione originaria, ossia basata sulla tecnica degli elementi con discontinuità immerse, con impiego della tecnica di condensazione statica.

Nell'ambito della presente tesi si è adottata una implementazione numerica basata su questo approccio, di cui viene fornita una diversa giustificazione. Questa tecnica di implementazione rende più semplice l'introduzione di una legge costitutiva discreta all'interfaccia, senza la necessità di ricorrere a parametri di penalizzazione.

Nell'ambito del metodo degli elementi finiti standard, in letteratura esistono differenti modelli numerici, sviluppati nel corso degli anni e ad oggi in continua evoluzione, che consentono di risolvere il problema della modellazione del comportamento non lineare in modo più o meno preciso e, quindi, a spese di alti o bassi oneri computazionali.

Resta valida, comunque, la semplice regola per la quale al maggiore grado di precisione del modello numerico corrisponda sempre un aumento notevole dei parametri da gestire (resistenze dei materiali, aderenza, instabilità, fatica, degrado, fessurazioni, ecc.), con la conseguenza di un alto rischio di ottenere un risultato poco affidabile, per quanto possa essere preciso. Di contro, modelli meno accurati richiedono pochi parametri e nella maggior parte dei casi procurano un risultato affidabile anche se non molto preciso.

Il procedimento risolutivo per elementi finiti si attua secondo una serie di fasi tipiche, elencate di seguito in maniera sintetica:

1) *Idealizzazione* del problema ingegneristico di partenza, ovvero la scelta del modello matematico a base del calcolo, compresa l'introduzio-

ne di opportune ipotesi:

- la tipologia geometrica e di carico;
- il comportamento del materiale (ad esempio elastico o anelastico, isotropo o anisotropo, indipendente o dipendente dal tempo);
- il regime globale di risposta della struttura (ad esempio statico o dinamico, in piccole o in grandi deformazioni);
- l'adozione di specifiche assunzioni sul tipo di comportamento strutturale (ad esempio monodimensionale).

Le assunzioni fatte vanno debitamente tenute in conto nella valutazione critica dei risultati a valle del calcolo.

2) *Discretizzazione* o fase di pre-processione che prevede:

- suddivisione della struttura in elementi finiti;
- scelta del tipo di elementi da utilizzare;
- ottimizzazione della topologia in relazione ai risultati attesi (ad esempio infittimento della maglia in corrispondenza di zone ove sono attesi forti gradienti di sforzo);
- predisposizione per eventuali successivi raffinamenti o diradamenti della *mesh* ai fini del controllo della bontà dei risultati;
- collocazione di nodi su interfacce naturali caratteristiche del problema strutturale, quali frontiere tra materiali differenti, punti angolosi del contorno, punti di controllo ove si vuole monitorare l'entità degli spostamenti in maniera diretta, ecc..

3) *Modellazione* del campo di spostamenti:

- definizione delle funzioni di forma e scelta dell'ordine d'interpolazione (eventuale predisposizione per l'aumento del grado dei polinomi interpolanti a parità del numero di elementi finiti);
- calcolo delle quantità caratteristiche di ogni elemento finito: determinazione delle matrici di rigidezza e delle forze nodali equivalenti (solitamente mediante integrazione numerica approssimata), con eventuale passaggio richiesto tra sistemi di riferimento locali e globali, ecc.. Questi procedimenti si prestano al calcolo automatico e vengono definiti all'interno di opportune *subroutines* chiamate ripetutamente all'interno del programma di calcolo.

4) *Assemblaggio* degli elementi finiti (Figura 4.2) e del sistema risolvibile (formazione delle equazioni nei gradi di libertà di tutto il si-

stema):

- individuazione delle connessioni tra gradi di libertà locali e globali (matrice di connettività o tabella delle incidenze);
- formazione della matrice di rigidezza dell'intera struttura e del vettore dei termini noti;
- imposizione delle condizioni cinematiche al contorno sui gradi di libertà vincolati. Frequentemente si esegue una condensazione statica di gruppi di gradi di libertà in favore di altri (ad esempio di gradi di libertà interni al dominio rispetto a gradi di libertà relativi al contorno).

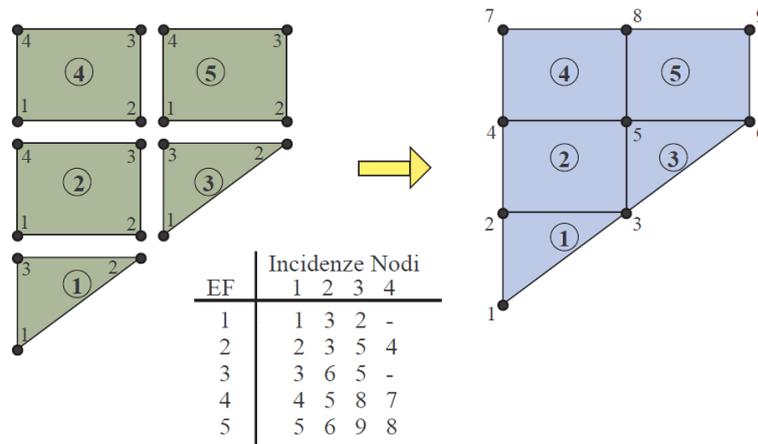


Figura 4.2: Assemblaggio EE.FF. e tabella incidenze o matrice di connettività.

5) *Soluzione*: risoluzione del sistema finale assemblato delle equazioni di equilibrio in forma discreta. In tale fase si utilizzano algoritmi noti di calcolo numerico per la soluzione di sistemi. Tali algoritmi sfruttano le proprietà significative della matrice di rigidezza assemblata, quali la simmetria e la sparsità (con struttura a banda).

6) *Ricostruzione* campi incogniti mediante sostituzione a ritroso:

- determinazione degli spostamenti locali all'interno degli elementi finiti noti i valori degli spostamenti nodali in soluzione;
- calcolo delle deformazioni all'interno degli elementi;
- determinazione degli sforzi a partire dalle deformazioni per mezzo del legame costitutivo.

7) *Rappresentazione e visualizzazione* dei risultati ottenuti (fase di post-processamento): redazione di tabulati e preparazione di diagrammi, grafici con *mesh* deformate.

La formulazione agli spostamenti di un problema strutturale nell'ambito del metodo degli elementi finiti è basata sulla suddivisione della struttura reale in un insieme di elementi in ciascuno dei quali i campi incogniti vengono discretizzati.

In questa formulazione gli spostamenti al continuo dell'elemento, $\mathbf{u}(x)$, sono calcolati interpolando gli spostamenti nodali \mathbf{U} dello stesso e utilizzando delle funzioni di forma interpolanti, raggruppate nella matrice $\mathbf{N}(x)$, secondo la relazione:

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}(x) \mathbf{U} \quad 4.1$$

In tal modo è possibile esprimere il vettore delle deformazioni semplicemente moltiplicando l'operatore gradiente \mathbf{D} del primo ordine per il vettore contenente gli spostamenti dell'elemento $\mathbf{u}(x)$:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{D} \mathbf{u}(x) \quad 4.2$$

Gli spostamenti $\mathbf{u}(x)$ sono però funzione di quelli nodali, come visto in precedenza:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{D} [\mathbf{N}(x) \mathbf{U}] = \mathbf{B}(x) \mathbf{U} \quad 4.3$$

Il campo di deformazione dell'elemento è, dunque, funzione degli spostamenti nodali attraverso la matrice delle derivate delle funzioni di forma:

$$\mathbf{B}(x) = \mathbf{D} [\mathbf{N}(x)] \quad 4.4$$

In sostanza, si è stabilita la congruenza delle deformazioni. La stessa relazione vale anche in termini incrementali, al fine di considerare il comportamento non lineare dei materiali.

In questi casi il legame tra deformazioni e forze nella sezione può, infatti, essere espresso solo in termini incrementali, ad esempio con la relazione seguente:

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \boldsymbol{\sigma} [\boldsymbol{\varepsilon}(x)] \quad 4.5$$

attraverso la legge costitutiva che dipende dalle caratteristiche del materiale nello stato deformativo corrente (rigidezza tangente).

Una volta noto il legame costitutivo resta solo da stabilire l'equilibrio con le forze nodali applicate. Per scrivere l'equazione di equilibrio si può, ad esempio, utilizzare l'equazione dei lavori virtuali: assegnato un campo di spostamenti e deformazioni virtuali congruenti, si dimostra che l'applicazione del principio dei lavori virtuali equivale a scrivere un'equazione di equilibrio.

Assumendo che \mathbf{U} sia il vettore degli spostamenti globali, \mathbf{A} l'operatore di assemblaggio e \mathbf{w} il valore corrente del salto di spostamento nella sezione in cui viene introdotta la discontinuità immersa tra i nodi interni dell'elemento in calcestruzzo, il campo di spostamenti del calcestruzzo ed anche gli scorrimenti risultano discontinui.

In accordo con il metodo degli elementi con discontinuità immerse proposto in [70, 91], il campo di spostamenti nel calcestruzzo può essere scritto come la somma di un termine continuo ed uno discontinuo:

$$\mathbf{u}_c(x) = \hat{\mathbf{u}}_c(x) + \bar{\mathbf{u}}_c(x) = \mathbf{N}_c(x)\mathbf{U} + \bar{\mathbf{N}}_c(x)\mathbf{w} \quad 4.6$$

in cui il termine discontinuo assume la forma:

$$\bar{\mathbf{u}}_c(x) = (H_{L_1} - \sum_{i \in L_2} N_{c_i}(x))\mathbf{w} = \bar{\mathbf{N}}_c(x)\mathbf{w} \quad 4.7$$

essendo H_{L_1} la funzione di Heaviside nel punto di ascissa L_1 ed

N_{c_i} le funzioni di forma del calcestruzzo relative al secondo tratto dell'elemento finito con la discontinuità immersa.

Per il caso esaminato, il sistema globale di equazioni non lineari di equilibrio è dato da:

$$\sum_{e=1}^{nelem} \int_0^{L_{el}} \left[A_s \mathbf{B}_s^T(x) \sigma_s + A_c \mathbf{B}_c^T(x) \sigma_c + \Phi_s \mathbf{B}_g^T(x) \tau \right] dx - \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{eq}^{Qc} = 0 \quad 4.8$$

$$\sum_{e=1}^{nelem} \int_0^{L_{el}} \left[A_c \bar{\mathbf{B}}_c^T(x) \sigma_c + \Phi_s \bar{\mathbf{B}}_g^T(x) \tau \right] dx + A_c \mathbf{t}_n = 0 \quad 4.9$$

In notazione matriciale, come già detto, la relazione tra il vettore delle deformazioni e quello degli spostamenti è espressa attraverso la matrice \mathbf{B} mediante la seguente:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{B}(x)\mathbf{U} \quad 4.10$$

e tale relazione nel caso del calcestruzzo assume la forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_c(\mathbf{x}) \mathbf{U} + \bar{\mathbf{B}}_c(\mathbf{x}) \mathbf{w} \quad 4.11$$

in cui la $\bar{\mathbf{B}}_c$ corrisponde al salto di spostamento all'interfaccia.

In maniera analoga, attraverso la definizione di scorrimento

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_g(\mathbf{x}) \mathbf{U} + \bar{\mathbf{B}}_g(\mathbf{x}) \mathbf{w} \quad 4.12$$

l'operatore $\bar{\mathbf{B}}_g$ si scrive come

$$\bar{\mathbf{B}}_g = -\bar{\mathbf{N}}_c(\mathbf{x}). \quad 4.13$$

Le equazioni di equilibrio vengono, dunque, imposte mediante l'uguaglianza fra le forze nodali equivalenti alle sollecitazioni interne e le forze nodali esterne, comprese quelle equivalenti ai carichi esterni applicati sulla superficie dell'elemento (Qc).

L'applicazione del metodo dei residui, in quanto basato sullo sviluppo in serie di Taylor delle predette equazioni arrestato al primo ordine attorno alla soluzione al passo corrente, conduce alla loro soluzione iterativa, attraverso la definizione della matrice di rigidità tangente, calcolata con la soluzione corrente in termini di spostamenti:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{UU} & \mathbf{K}_{Uw} \\ \mathbf{K}_{wU} & \mathbf{K}_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{r}_U \\ -\mathbf{r}_w \end{bmatrix} \quad 4.14$$

essendo

$$\mathbf{K}_{UU} = \frac{nelem}{A} \int_0^{L_{el}} \left[A_s \mathbf{B}_s^T(\mathbf{x}) E_s^{tg} \mathbf{B}_s(\mathbf{x}) + A_c \mathbf{B}_c^T(\mathbf{x}) E_c^{tg} \mathbf{B}_c(\mathbf{x}) + \Phi_s \mathbf{B}_g^T(\mathbf{x}) G_\tau^{tg} \mathbf{B}_g \right] dx \quad 4.15$$

$$\mathbf{K}_{Uw} = \mathbf{K}_{wU} = \frac{nelem}{A} \int_0^{L_{el}} \left[A_c \mathbf{B}_c^T(\mathbf{x}) E_c^{tg} \bar{\mathbf{B}}_c(\mathbf{x}) + \Phi_s \mathbf{B}_g^T(\mathbf{x}) G_\tau^{tg} \bar{\mathbf{B}}_g \right] dx \quad 4.16$$

$$\mathbf{K}_{ww} = \frac{nelem}{A} \int_0^{L_{el}} \left[A_c \bar{\mathbf{B}}_c^T(\mathbf{x}) E_c^{tg} \bar{\mathbf{B}}_c(\mathbf{x}) + \Phi_s \bar{\mathbf{B}}_g^T(\mathbf{x}) G_\tau^{tg} \bar{\mathbf{B}}_g \right] dx + K_n^{tg} A_c = 0 \quad 4.17$$

in cui K_n^{tg} rappresenta il modulo tangente del tratto softening del lega-

me trazione - separazione del calcestruzzo.

Nel caso di elementi con una frattura immersa, i gradi di libertà interni possono essere condensati ed in termini di equilibrio fra forze interne ed esterne può scriversi la seguente relazione non lineare

$$\mathbf{K}_{CD}^L(\mathbf{u})\mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad 4.18$$

che denota anche in forma compatta il comportamento non lineare del calcestruzzo teso ed in cui anche sul vettore delle forze opera la trasformazione di condensazione come segue:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{CD}^L = \mathbf{F} * -\mathbf{K}_{12}^L \left[\mathbf{K}_{22}^L \right]^{-1} \mathbf{F}_{int}. \quad 4.19$$

La relazione (4.14), in cui è presente il vettore delle forze in corrispondenza dei gradi di libertà interni condensati, viene utilizzata, unitamente ai termini delle (3.53), (3.54), (3.55) e (3.56), esclusivamente nella determinazione, mediante integrazione numerica, dei residui delle forze nelle successive iterazioni della strategia di soluzione del problema non lineare con il Metodo di Newton - Raphson modificato.

4.2. Implementazione dell'elemento finito monodimensionale

Nell'ambito della presente tesi sono stati implementati elementi monodimensionali, sia nel caso di azioni esterne di tipo assiale sia nel caso di tipo flessionale, in grado di catturare discontinuità nel campo di spostamenti.

Dal momento che nella discretizzazione agli elementi finiti è utile usare la notazione matriciale, le espressioni saranno riportate in tale notazione.

Attraverso la scelta delle incognite del problema, corrispondenti ai gradi di libertà del sistema, che nel caso di elemento soggetto a trazione risultano due per ogni nodo e nel caso flessionale cinque (ridotti a quattro nel caso di sezione a semplice armatura) sempre per ogni nodo, si possono scrivere le funzioni di spostamento generalizzato con il prodotto delle funzioni di forma approssimanti per gli spostamenti nodali.

Le predette funzioni di forma, che risultano di tipo approssimato per il problema non lineare, saranno ricavate in maniera esatta attraverso la soluzione del sistema di equazioni differenziali di equilibrio scritte con legami costitutivi di tipo lineare.

Dal campo di spostamenti, mediante la definizione del modello cinematico, si ricaverà dapprima il campo di deformazione e successivamente quello di tensione, attraverso la scelta del legame costitutivo dei materiali base costituenti il composito in questione e dell'interfaccia tra i predetti componenti.

La scrittura delle equazioni di equilibrio discrete mediante l'uso della matrice di rigidità tangente e delle forze nodali, che nelle risoluzioni iterative si identificano con i residui di equilibrio, permetterà l'analisi del problema non lineare, anche nella fase di formazione della frattura discreta (discontinuità) immersa nell'elemento; in tale ultimo caso è la *matrice di rigidità condensata* che verrà utilizzata nel processo di assemblaggio.

Nel Capitolo 6 vengono riportati i risultati salienti delle applicazioni numeriche effettuate sia nel caso di elemento soggetto a trazione, in diverse condizioni di vincolo e di carico, sia nel caso di elemento soggetto a flessione, traendo le necessarie conclusioni in termini di convergenza della soluzione ed alcune considerazioni ed osservazioni preliminari sul concetto della stabilità della frattura nel modello monodimensionale a comportamento assiale.

4.3. Legami costitutivi

Nella modellazione degli elementi strutturali in calcestruzzo armato è necessario definire il legame costitutivo dei singoli materiali: acciaio e calcestruzzo.

Nella presente trattazione risulta di fondamentale importanza anche la definizione della legge costitutiva caratteristica dell'interfaccia tra i due predetti materiali di base costituenti il composito in questione.

Nel seguito si farà riferimento al caso di stati di sollecitazione monoassiali indotti da azioni cicliche, esulando dagli scopi del presente lavoro l'analisi di stati tensionali pluriassiali.

Quando il comportamento dell'acciaio e del calcestruzzo viene simulato considerando i due materiali separatamente (modelli agli elementi finiti, modelli a fibre ed alcuni modelli macroscopici del tipo *multi-spring*) si devono inserire ulteriori elementi atti a descrivere i fenomeni di interazione (degradazione del legame di aderenza, *tension stiffening*) a meno di ricorrere ad ipotesi semplificative (perfetta aderenza fra i due materiali, trascurabilità del contributo del calcestruzzo teso tra due fessure) oppure di modificare i legami costitutivi in modo da simulare i suddetti fenomeni.

Nel caso in cui non si abbia interesse ad evidenziare i contributi di ciascuno dei due materiali, si può ricorrere a legami costitutivi che schematizzino il comportamento di porzioni dell'elemento che li contengano entrambi (ad esempio, nella maggioranza dei modelli *multi-spring*), come quelli proposti in letteratura per elementi in calcestruzzo armato soggetti a sforzo normale.

Di seguito verranno trattati separatamente per i materiali costituenti base e per la loro interazione, i modelli costitutivi tratti dalla letteratura e scelti per l'implementazione nel metodo degli elementi finiti.

4.3.1. L'acciaio

L'acciaio nel cemento armato è impiegato sotto forma di barre di sezione circolare o approssimativamente tale. Per aumentare l'aderenza con il calcestruzzo, infatti, l'acciaio di qualità migliore viene prodotto in barre sulla cui superficie vengono realizzati dei risalti: questo tipo di barre è detto "ad aderenza migliorata". In tutti i casi le barre sono caratterizzate dal diametro effettivo (barre tonde lisce) o dal diametro nominale di una barra circolare di uguale lunghezza e peso (barre ad aderenza migliorata).

In pratica si possono distinguere due tipi di acciai: l'acciaio ordinario, impiegato nel cemento armato normale e quello ad alta resistenza, che si usa nel cemento armato precompresso.

Le caratteristiche meccaniche dell'acciaio si determinano mediante prove di trazione su monconi di barra; tipici diagrammi tensione-deformazione di acciai con diverse caratteristiche di resistenza sono rappresentati in Figura 4.3.

Come è visibile nella predetta figura, l'andamento tipico della legge σ - ϵ mostra un tratto elastico lineare che si estende fino alla tensione f_y , detta di snervamento, seguito da un tratto in cui la deformazione cresce con tensione praticamente costante (tratto plastico). Successivamente la tensione torna a salire, ma con pendenza molto inferiore a quella iniziale elastica (incrudimento), fino a raggiungere un massimo, per poi diminuire seguendo un ramo instabile con pendenza negativa che termina con la rottura effettiva della barra.

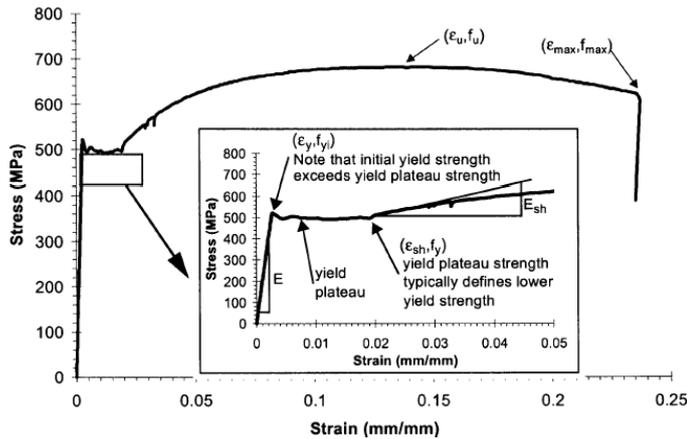


Figura 4.3: Comportamento dell'acciaio da prove sperimentali.

La grandezza più importante per definire la resistenza del materiale è la tensione di snervamento f_y . Come tensione di rottura f_t si assume il massimo valore raggiunto nella fase di incrudimento, in quanto il valore effettivo al momento della rottura si può misurare solamente con prove a spostamento impresso.

Il modulo elastico dell'acciaio è praticamente costante e, pertanto, non dipende dalla tensione di snervamento. Con buona approssimazione si può assumere, per tutti i tipi di acciaio:

$$E_s = 2.05 \div 2.10 \times 10^5 \text{ [N/mm}^2\text{]} \quad 4.20$$

L'estensione del tratto plastico e l'allungamento a rottura ϵ_t diminuiscono al crescere della tensione di snervamento: gli acciai di qualità migliore sono, pertanto, meno duttili.

Negli acciai impiegati nel cemento armato, tuttavia, gli allungamenti di rottura sono, comunque, elevati. Come materiale l'acciaio ha comportamento simmetrico in trazione e compressione; pertanto, la prova di trazione è sufficiente ad individuarne le caratteristiche meccaniche. Ovviamente, a causa dei fenomeni di instabilità, il comportamento degli elementi può essere molto diverso in trazione e compressione.

Il legame costitutivo dell'acciaio viene studiato a partire da una prova a trazione monoassiale fino a rottura.

In questo paragrafo si illustrano i legami costitutivi per l'acciaio che sono stati considerati durante lo studio e le applicazioni numeriche svolte. Nello studio del comportamento dell'acciaio è, infatti, possibile valutare modelli di complessità via via crescente.

La formulazione della relazione monotona tra tensioni e deformazioni per l'acciaio non comporta particolari complicazioni potendo essere descritta, con buona approssimazione del comportamento reale, con una semplice bilineare. L'acciaio, nel suo comportamento per carichi monotoni, viene pertanto modellato per mezzo di un legame elastico lineare incoerente e simmetrico a trazione e compressione.

L'approccio più semplice è quello del *Modello bilineare* che descrive il comportamento del materiale attraverso una modellazione elastoplastica, che può essere senza o con incoerimento. Valutando dapprima quello senza incoerimento, rappresentato in Figura 4.4,

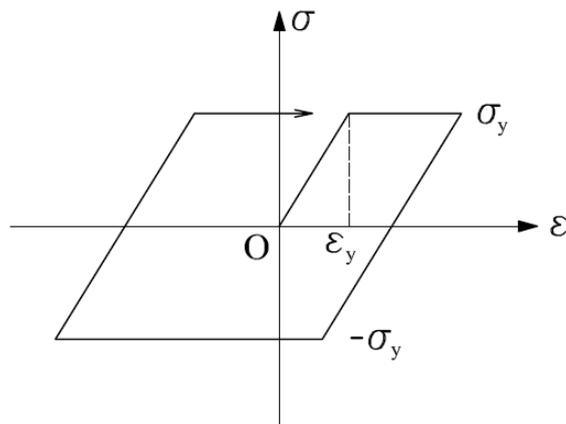


Figura 4.4: Comportamento bilineare elasto-plastico senza incoerimento.

si osserva che si tratta di un modello che rende necessaria la distinzione tra un comportamento pre-snervamento e post-snervamento, valutati attraverso il parametro della deformazione ε_y :

$\varepsilon \leq \varepsilon_y$ comportamento elastico;

$\varepsilon > \varepsilon_y$ comportamento plastico.

Il comportamento elastico è caratterizzato da un modulo tangente pari al modulo elastico dell'acciaio E_s , mentre il comportamento plastico presenta un modulo tangente nullo. Relativamente allo scarico, invece, esso avviene sempre seguendo il segmento elastico per cui il modulo tangente è pari ad E_s .

Per descrivere tale modello sono sufficienti il modulo elastico dell'acciaio e la tensione di snervamento, attraverso cui risulta immediato calcolare la deformazione, suddividibile in una parte elastica, utilizzata per ricavare la tensione ed una parte plastica.

Il modello può essere descritto attraverso l'equazione:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E_s \varepsilon & \varepsilon \leq \varepsilon_y \\ f_y & \varepsilon > \varepsilon_y \end{cases} \quad 4.21$$

dove ε è la deformazione del passo n-esimo e σ è la relativa tensione nel materiale.

Nel caso si consideri, invece, un acciaio incrudente, il modello varia leggermente perché si suppone che, una volta superato lo snervamento ed entrati in campo plastico, la tensione non rimanga costante ma aumenti, anche se il modulo tangente del ramo plastico è pari ad una frazione di quello iniziale (Figura 4.5).

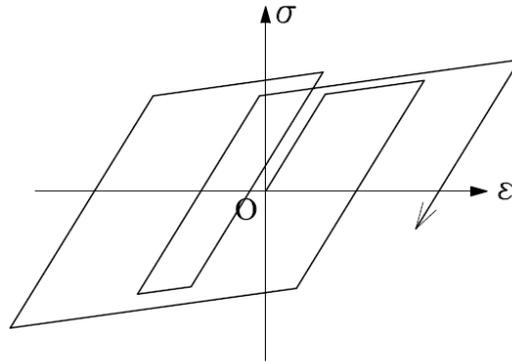


Figura 4.5: Comportamento bilineare elasto-plastico con incrudimento.

Il modello può essere descritto attraverso l'equazione:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E_s \varepsilon & \varepsilon \leq \varepsilon_y \\ f_y + E_H (\varepsilon - \varepsilon_y) & \varepsilon > \varepsilon_y \end{cases} \quad 4.22$$

dove ε è la deformazione del passo n-esimo e σ è la relativa tensione nel materiale; f_y è la tensione di snervamento ed ε_y la relativa deformazione; E_s ed E_H sono i moduli tangenti rispettivamente nel primo tratto lineare elastico e nel tratto di incrudimento.

Nel caso di elemento composito in cui la barra di acciaio (fibra) è immersa nel calcestruzzo (matrice), la modesta resistenza a trazione del calcestruzzo fa nascere, tuttavia, il fenomeno del tension stiffening attraverso il quale il calcestruzzo teso compreso tra due fessure contigue esplica sulla barra un effetto irrigidente.

In questa situazione la deformazione media dell'acciaio compresa tra le due fessure è minore di quella che si otterrebbe nell'ipotesi di calcestruzzo non reagente a trazione. Questo fenomeno è stato studiato applicando delle variazioni al legame costitutivo bilineare, modificandone il primo tratto elastico, spezzandolo in due tratti: il primo più rigido fino alla deformazione corrispondente alla prima fessurazione ed il secondo che, partendo dalla condizione di totale fessurazione, si collega al punto di snervamento (Figura 4.6).

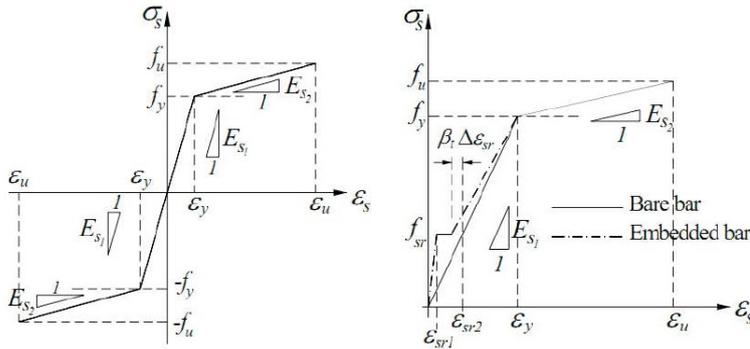


Figura 4.6: Legge tensione-deformazione monotona per le armature.
 Caso particolare del tension stiffening.

Nel caso ciclico un modello idoneo per descrivere l'andamento del legame tra tensioni e deformazioni è quello di *Menegotto-Pinto*, sia senza sia con incrudimento Figura 4.7.

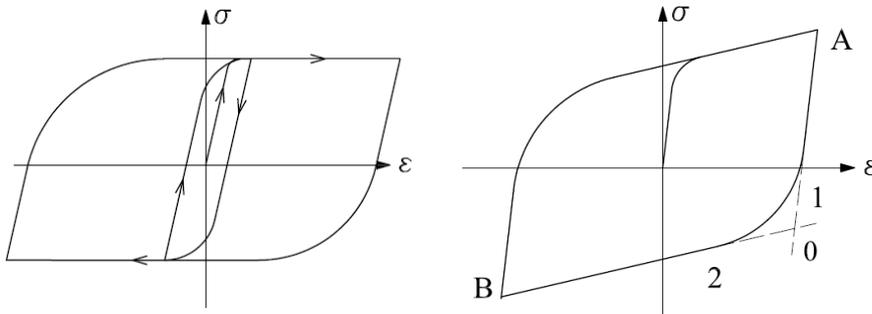


Figura 4.7: Modello Menegotto-Pinto per l'acciaio senza e con incrudimento.

La curva involuppo dei cicli di scarico e ricarico è sempre una bilineare, mentre le leggi che definiscono lo scarico-ricarico si basano su una relazione che lega non esplicitamente le quantità σ ed ϵ , ma che ricorre a due variabili ausiliarie, σ^* ed ϵ^* tali che tra loro vale la relazione:

$$\sigma^*(\epsilon^*) = b \epsilon^* + \frac{(1-b)\epsilon^*}{\left(1 + (\epsilon^*)^R\right)^{1/R}} \tag{4.23}$$

potendo definire tali variabili ausiliarie come:

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r} \quad 4.24$$

$$\sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_r}{\sigma_0 - \sigma_r} \quad 4.25$$

$$b = \frac{E_1}{E_0} \quad 4.26$$

Il modello di Menegotto-Pinto può prevedere, dunque, anche un incrudimento dell'acciaio, come riportato in Figura 4.7, per cui nella sua tipologia più comune non vi sono asintoti orizzontali e deve essere considerato il modulo di incrudimento dell'acciaio. La formulazione rimane, comunque, la medesima ed è possibile tener conto dell'incrudimento scegliendo opportunamente il punto 0.

4.3.2. Il calcestruzzo e la frattura coesiva

Il comportamento del materiale calcestruzzo, come quello di ogni materiale, è profondamente dipendente dalla sua costituzione fisica e ciò scaturisce in un comportamento non lineare.

La risposta di una struttura sotto carico dipende in larga misura dalla relazione sforzo-deformazione dei materiali che la costituiscono e dal livello dello stato di tensione.

La formulazione analitica di un legame costitutivo che rappresenti il comportamento di un elemento in calcestruzzo, sia per carichi monotoni sia ciclici, nonché per prove monoassiali, biassiali o triassiali, viene condotta attraverso la taratura di risultati sperimentali. Nel presente studio l'analisi non lineare delle strutture in cemento armato sarà condotta considerando stati di sollecitazione monotona e monoassiali.

Nel caso del calcestruzzo, a rigore, dovrebbero essere eseguite prove triassiali per studiarne in modo esauriente il comportamento. Data la difficoltà di eseguire tali prove, si preferisce eseguire prove di tipo biasiali, mentre per le normali applicazioni ingegneristiche si fa riferimento ai risultati di prove monoassiali (v. Figura 4.8).



Figura 4.8: Provino cilindrico portato a rottura.

Il legame costitutivo in compressione monoassiale del calcestruzzo si può approssimare con diverse espressioni analitiche.

La Normativa Europea per il cemento armato (EC2) propone la seguente, richiamando il modello di Sargin:

$$\sigma_c = f_c \frac{(k\eta - \eta^2)}{[1 + (k-2)\eta]} \quad 4.27$$

con

$$\eta = \left| \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c1}} \right| \quad 4.28$$

$$k = 1.10 E_c \left| \frac{\varepsilon_{c1}}{f_c} \right| \quad 4.29$$

Il valore assoluto della deformazione ε_{c1} cui corrisponde il raggiungimento della resistenza f_c si assume pari a 2.2×10^{-3} .

Il modulo elastico E_c dipende dalla resistenza f_c , ma l'esperienza dimostra che vi è una forte dispersione dei risultati. In assenza di altre informazioni, la Normativa Italiana (NTC 2008) suggerisce:

$$E_{cm} = 22000 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{0.3} \text{ [MPa]} \quad 4.30$$

in cui il valore medio della resistenza cilindrica a compressione f_{cm} è legato al valore caratteristico f_{ck} dalla seguente relazione:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ [MPa]} \quad 4.31$$

Applicando ad un provino in calcestruzzo una pressione laterale e conducendo una prova di compressione si registra un aumento sia della resistenza sia della deformazione ultima. Questo miglioramento delle proprietà meccaniche è legato ovviamente al livello di pressione laterale iniziale σ_3 , come evidenziato in Figura 4.9.

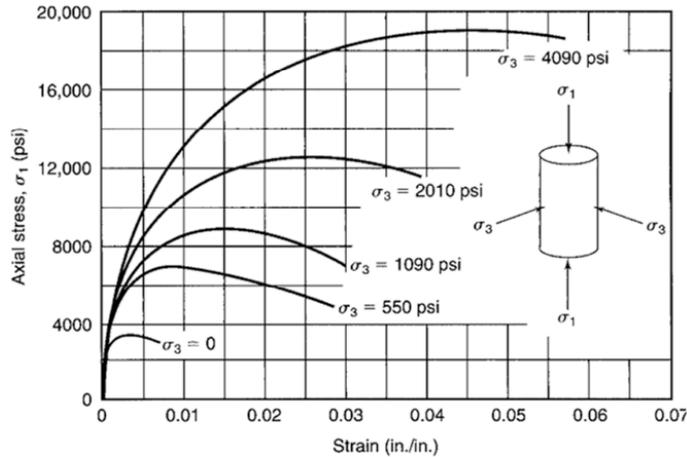


Figura 4.9: Curve tensione-deformazione ottenute con prove di compressione triassiale su provini cilindrici - resistenza del calcestruzzo non confinato.

Negli elementi strutturali le parti compresse sono racchiuse da staffe o spirali con passo più o meno fitto che, nella loro azione di contrasto all'espansione laterale, generano delle pressioni laterali entro la zona racchiusa dalle stesse staffe. Tale compressione triassiale che si crea nel nucleo di calcestruzzo genera un incremento di resistenza e duttilità della sezione. In particolare si ha:

- il *confinamento attivo*, dato dall'effetto di sforzi trasversali prodotti da forze esterne applicate, come nel caso della pressione idrostatica agente su un elemento scarico;
- il *confinamento passivo*, ottenuto attraverso l'azione dell'armatura trasversale disposta nei piani delle sezione di trave con opportuna

spaziatura, che impedisce l'espansione laterale del calcestruzzo, la quale si viene a creare solo per alti valori di compressione assiale, quando cioè il livello di fessurazione è significativo.

Come illustra la Figura 4.10, che confronta due curve di sforzo-deformazione, la curva (A) e la (B), dove la prima è relativa a del calcestruzzo non confinato, mentre la seconda è relativa a del calcestruzzo confinato, i vantaggi del confinamento si ripercuotono su tre aspetti:

- la tensione massima raggiungibile nel caso confinato è maggiore ($f_{cA} < f_{cB}$);
- la deformazione alla quale si ha la tensione di picco nel caso confinato è maggiore ($\epsilon_A < \epsilon_B$);
- la curva di degradazione nel caso confinato ha pendenza minore rispetto a quella del caso non confinato, per cui il materiale conserva caratteristiche migliori più a lungo.

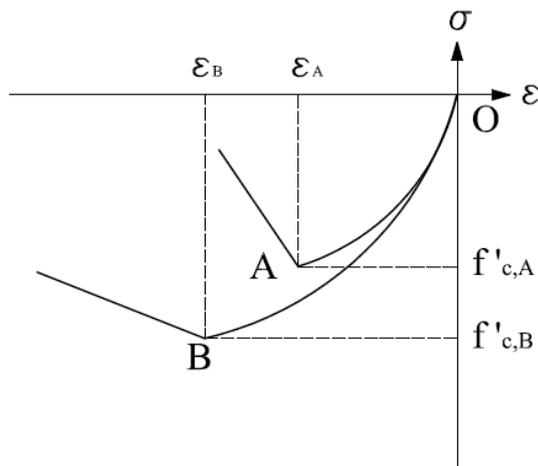


Figura 4.10: Confronto delle curve di legame del calcestruzzo in compressione nel caso confinato e nel caso non confinato.

In questa tesi si farà riferimento in particolare al legame proposto da Kent e Park (1971), modificato da Park ed esteso successivamente da Scott et al. (1982) (Figura 4.11), in quanto risulta uno dei modelli più utilizzati ed affidabili, nel senso di aderenza ai risultati sperimentali, per descrivere il comportamento del calcestruzzo in compressione. La

formulazione parte dalle conclusioni di Hognestad, che nel suo lavoro ha proposto una descrizione del ramo pre-picco di compressione del calcestruzzo parabolico.

È da evidenziare che nel modello originario proposto da Kent e Park (1971), l'armatura trasversale influenza la sola duttilità del calcestruzzo e che la modifica apportata da Park (1982) riguardava l'incremento di resistenza degli elementi confinati rispetto agli stessi non confinati.

Sulla base di evidenze sperimentali, gli autori hanno proposto un legame costitutivo semplificato nel quale ad un primo tratto parabolico segue un tratto discendente rettilineo la cui pendenza dipende dall'entità del confinamento. La legge finisce, poi, con un tratto orizzontale fino al raggiungimento della deformazione massima. La Figura 4.11 illustra qualitativamente la curva σ - ε di tale legame costitutivo.

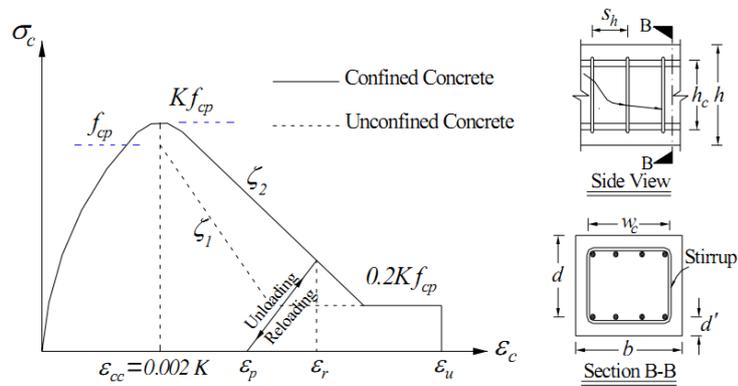


Figura 4.11: Modello di Kent, Park e Scott per il calcestruzzo.

Le equazioni che governano i tre rami sono le seguenti:

$$\begin{aligned}
 \sigma_c &= K f_{cp} \left[2 \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cc}} \right)^2 \right], & \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cc} \\
 \sigma_c &= K f_{cp} [1 - \zeta (\varepsilon_c - \varepsilon_{cc})], & \varepsilon_{cc} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_u \\
 \sigma_c &= 0.2 K f_{cp}, & \varepsilon_{cc} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_u
 \end{aligned} \tag{4.32}$$

dove $\varepsilon_{cc} = 0.002 K$, è la deformazione corrispondente alla massima resistenza funzione del coefficiente amplificativo K :

$$K = 1 + \rho_s \frac{f_{yh}}{f_{cp}} \quad 4.33$$

nel quale f_{yh} è la resistenza dell'acciaio delle barre trasversali (staffe), f_{cp} è la resistenza del calcestruzzo non confinato, mentre ρ_s è il rapporto tra il volume delle staffe rispetto al volume del nucleo confinato delimitato dal perimetro delle staffe, per un tratto di lunghezza unitaria. La pendenza del ramo calante è invece (resistenza del calcestruzzo espressa in MPa):

$$\zeta = \frac{0.5}{\frac{3 + 0.29f_c}{145f_c - 1000} + \frac{3}{4} \rho_s \sqrt{\frac{b}{S} - \varepsilon_{co}}} \quad 4.34$$

Il ramo post picco è, dunque, funzione del rapporto volumetrico di staffe ρ_s e del rapporto tra la lunghezza del nucleo confinato b e la distanza longitudinale tra le staffe S . Si nota, comunque, l'assenza di una relazione tra resistenza di picco e diametro delle barre longitudinali, e tra il rapporto esistente tra passo delle staffe e diametro delle staffe. È evidenza sperimentale, infatti, che, a parità di rapporto volumetrico di armatura trasversale, è più efficace disporre armature con piccolo diametro a passo ridotto che il viceversa.

ζ è un parametro meccanico che tiene conto dell'effetto di confinamento esercitato sul calcestruzzo dall'armatura trasversale.

I modelli costitutivi sono definiti in modo completo solo se, oltre la legge monotona, è definito il comportamento del calcestruzzo allo scarico ed al ricarico, ossia il comportamento isteretico del materiale; il modo più semplice di descriverlo è quello di approssimare entrambe le fasi con andamento lineare, come raffigurato in Figura 4.12. La pendenza dei tratti di scarico-ricarico segna il degrado di rigidità che subisce il materiale quando ad esso è assegnata una deformazione maggiore della ε_{co} . Una regola di comportamento isteretico, formulata originariamente dai ricercatori Karsan e Jirsa, prevede che a partire da un qualunque stato tensionale e deformativo corrispondente alla deformazione ε_r , lo scarico avverrà linearmente fino alla deformazione ε_p che si calcola con:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0} = 0.145 \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} \right)^2 + 0.13 \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} \right) \quad \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} < 2 \\ \frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0} = 0.707 \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} - 2 \right) + 0.834 \quad \frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} \geq 2 \end{array} \right. \quad 4.41$$

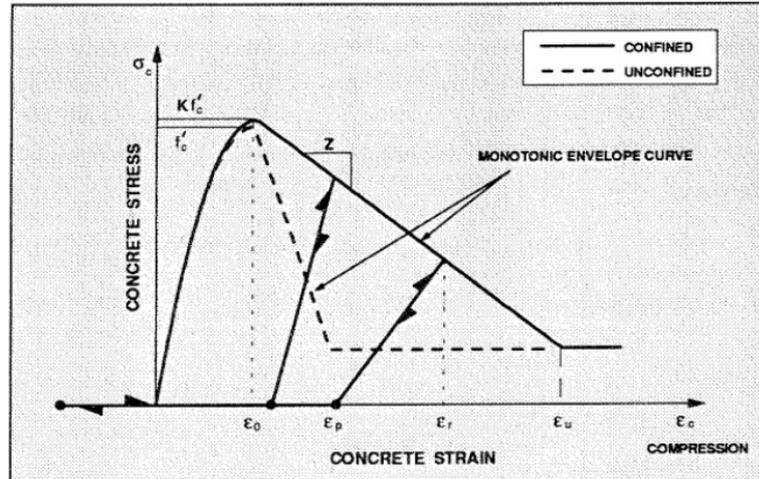


Figura 4.12: Comportamento isteretico secondo Karsan e Jirsa.

4.3.2.1. Il comportamento a trazione

Nel *comportamento a trazione del calcestruzzo*, le relative prove monoassiali sugli elementi di tale materiale, rispetto alle prove di compressione, evidenziano soprattutto la minore resistenza e il comportamento più fragile del materiale. Sebbene in certe analisi il calcestruzzo possa essere modellato come un materiale privo di resistenza a trazione, in realtà questa resistenza condiziona notevolmente il comportamento degli elementi in cemento armato.

È opportuno evidenziare come la trazione possa nascere o in fase di scarico anche in condizioni di deformazione negativa, come rappresentato in Figura 4.13, dove lo stato tensionale positivo è dovuto allo scarico operato nel punto C ed è presente per valori negativi di deformazio-

ne, oppure a causa di una deformazione positiva, come nel caso della Figura 4.14, dove si ha il raggiungimento della tensione massima nel punto A e poi l'annullarsi della tensione di trazione.

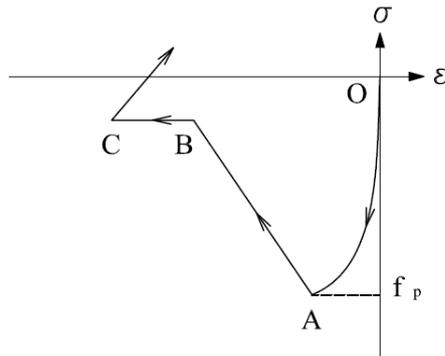


Figura 4.13: Raggiungimento tensione positiva con deformazione negativa.

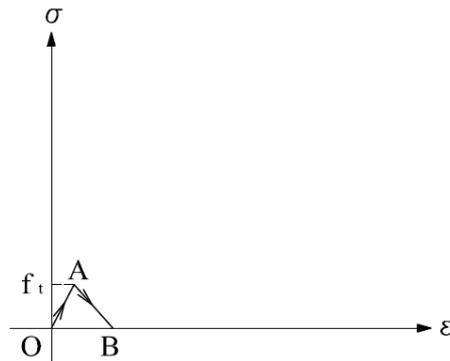


Figura 4.14: Raggiungimento tensione positiva con deformazione positiva.

A causa dei modesti valori che questa grandezza raggiunge, la registrazione sperimentale della legge σ - ε del calcestruzzo teso è operazione delicata. Data la difficoltà ad eseguire prove di trazione pura, la resistenza a trazione si misura di solito mediante prove indirette, come la prova su cilindro sollecitato a taglio, “prova brasiliana” o definita anche “splitting test”. In tal caso (Figura 4.15) la resistenza a trazione si calcola con la relazione:

$$f_{ct} = \frac{2P}{\pi \cdot h \cdot d} \quad 4.35$$

in cui P è il carico di rottura, d è il diametro di base ed h l'altezza del provino cilindrico.

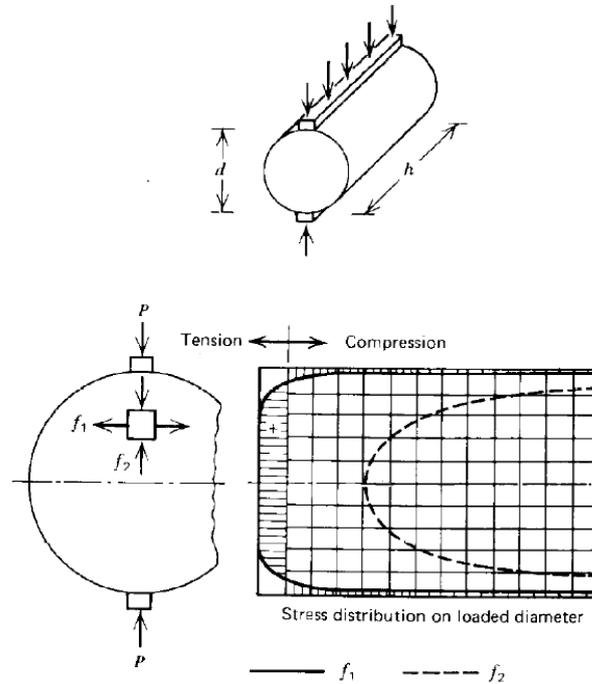


Figura 4.15: Schema della prova brasiliiana.

In alternativa, la resistenza a trazione si può misurare mediante una prova a flessione su di una barretta di calcestruzzo di dimensioni standard. Caricando il provino con due forze simmetriche P distanti a dagli appoggi, se b ed h indicano la base e l'altezza della sezione della trave, ipotizzando un comportamento lineare-fragile si ha:

$$f_{cf} = \frac{6P \cdot a}{h^2 \cdot b} \quad 4.36$$

dove f_{cf} è detta resistenza a trazione per flessione. Tale resistenza risulta generalmente più alta di quella misurata con la prova di taglio; mediamente si ha:

$$f_{cf} = 1.2f_{ct} \quad 4.37$$

La resistenza, indicata con f_{ct} è circa il 10% rispetto alla resistenza a compressione del calcestruzzo e, quindi, varia tra 1.5 e 5.0 N/mm². Fino a tale valore della tensione f_{ct} il comportamento del materiale si presenta lineare e può, quindi, essere rappresentato dalla seguente relazione:

$$\sigma_{ct}(\varepsilon) = E_{ct} \varepsilon \quad 4.38$$

dove E_{ct} è il modulo elastico del calcestruzzo teso.

Dal momento che sono numerose le equazioni proposte per correlare la resistenza a trazione del calcestruzzo con quella a compressione, verranno seguite le indicazioni della Normativa, che suggerisce per la resistenza a trazione:

$$f_{ct} = 0.30 \cdot \sqrt[3]{f_c^2} \quad \text{per Classi} < \text{C50/60} \quad 4.39$$

$$f_{ct} = 2.12 \ln \left(1 + \frac{f_c}{10} \right) \quad \text{per Classi} > \text{C50/60} \quad 4.40$$

In relazione, ancora, al comportamento del calcestruzzo a trazione, si può notare che il modello coesivo trova giustificazione in tale comportamento del materiale, il quale è ancora capace di trasferire tensioni una volta superata la resistenza a trazione.

Nel caso di cemento armato, il ramo di *softening* può essere modificato sommando alla resistenza offerta dagli inerti il contributo dovuto alla trazione assorbita dal calcestruzzo compreso tra due fessure per l'aderenza con le barre d'acciaio. Questo è l'approccio generalmente utilizzato nelle analisi agli elementi finiti, che implementano nell'algoritmo utilizzato un legame costitutivo del calcestruzzo teso in grado di modellare il fenomeno del *tension stiffening*.

La cinematica delle discontinuità forti induce dei processi dissipativi concentrati all'interfaccia con rilascio di energia per unità di area. Pertanto, risulta naturale legare l'energia per unità di area *totale spesa* all'interfaccia per la formazione di una discontinuità forte pienamente sviluppata (*traction free*) con il concetto di energia di frattura che, per definizione, è l'energia necessaria per creare una superficie unitaria di

frattura libera da tensioni.

Una grandezza importante, atta a descrivere la resistenza del calcestruzzo a trazione, è rappresentata dall'energia di frattura G_f .

L'energia di frattura non dipende dal volume del corpo, ma solo dalla superficie fratturante.

Essa rappresenta, inoltre, una caratteristica intrinseca del materiale e definisce il lavoro necessario per far propagare di un'area unitaria la frattura. Data tale definizione, l'energia di frattura si calcola con la seguente espressione:

$$G_f = \int_0^{w_{cr}} \sigma(w) dw \quad 4.42$$

In questo caso possiamo definire l'energia di frattura come l'area sottesa dal diagramma carico - spostamento depurata dagli effetti del peso proprio del provino e divisa per la sezione netta in corrispondenza dell'intaglio.

L'energia di frattura G_f dipende da un certo numero di parametri, in particolare dal contenuto di cemento, dal rapporto acqua - cemento, dal tipo e dalla massima dimensione degli inerti e dall'età del calcestruzzo. Secondo il CEB-FIP MC90 (1993), l'energia di frattura può essere stimata, in prima approssimazione, con riferimento alla resistenza a compressione del calcestruzzo e tenendo conto della massima dimensione degli inerti:

$$G_f = G_{f_0} \left(\frac{f_{cm}}{f_{cmo}} \right)^{0.7} \quad 4.43$$

in cui

f_{cm} è la resistenza media a compressione;

f_{cmo} è una resistenza media di compressione di riferimento pari a 10 N/mm²;

G_{f_0} è un'energia di frattura di riferimento dipendente dalla dimensione massima degli inerti secondo i valori riportati in Tabella 4.1.

Tabella 4.1: Valori energia di frattura di riferimento
in funzione del diametro massimo degli inerti.

d_{\max} [mm]	8	16	32
G_{f0} [N/mm]	0.025	0.030	0.038

Allo scopo di fornire un'espressione analitica alla curva trazione-separazione sono state introdotte diverse leggi "strain-softening".

Tali espressioni sono assegnate in modo da garantire che l'energia dissipata durante il processo di frattura coesiva, fino alla formazione di una frattura libera da tensioni, sia pari all'energia di frattura per il materiale in esame.

Esistono in letteratura diverse proposte di legame trazione-apertura di fessura, come si può notare dalla Figura 4.16 (CEB FIP MC90, 1991). Il comportamento qualitativo è molto simile e, per quanto le curve differiscano tra loro, di solito le applicazioni pratiche non sono influenzate sensibilmente dall'uso dell'una o dell'altra impostazione e la scelta si basa spesso su considerazioni pratiche.

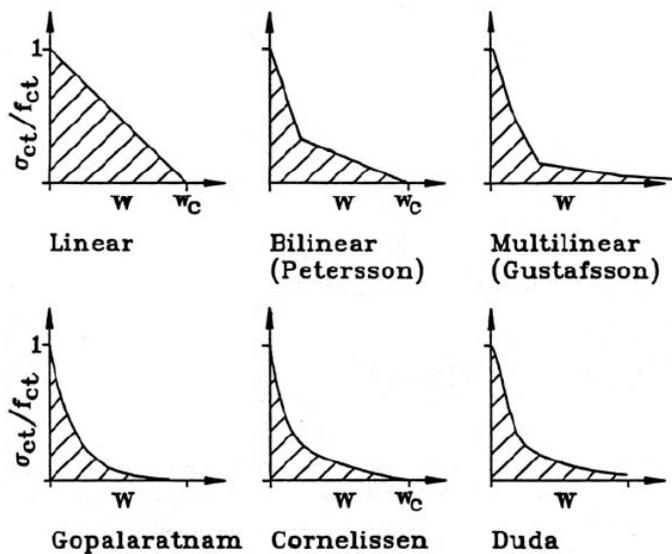


Figura 4.16: Diversi legami σ - w proposti in letteratura.

Nel caso lineare, la legge costitutiva per il *softening* è rappresentata da una legge lineare tra tensioni e apertura della fessura.

$$G_f = \frac{1}{2} w_{cr} \cdot f_{ct} \quad 4.44$$

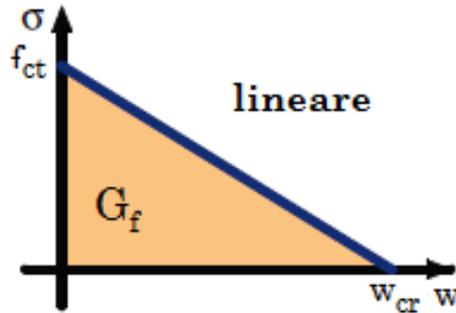


Figura 4.17: Softening lineare.

La pendenza del diagramma tensione - apertura è caratterizzata dal modulo H [$F L^{-3}$] di softening, negativo, il cui valore assoluto è:

$$H = \frac{f_{ct}}{w_{cr}} = \frac{1}{2} \frac{f_{ct}^2}{G_f} \quad 4.45$$

Nel caso bi-lineare, la relazione tra tensioni e apertura della fessura è definita da un legame bilatero (CEB FIP MC90, 1993):

$$G_f = \frac{1}{2} (f_{ct} - f_1) w_1 + \frac{1}{2} (w_{cr} - w_1) f_1 + f_1 w_1 \quad 4.46$$

$$\sigma_{ct} = \begin{cases} f_{ct} \left(1 - \frac{0.85w}{w_1} \right) & 0 \leq w \leq w_1 \\ \frac{0.15f_t}{w_1 - w_{cr}} (w - w_{cr}) & w_1 \leq w \leq w_{cr} \\ 0 & w \geq w_{cr} \end{cases} \quad 4.47$$

con

$$f_1 = 0.15f_{ct}; w_{cr} = \alpha_f \frac{G_f}{f_{ct}}; w_1 = 2 \frac{G_f}{f_{ct}} - 0.15w_{cr}; \alpha_f = 7.$$

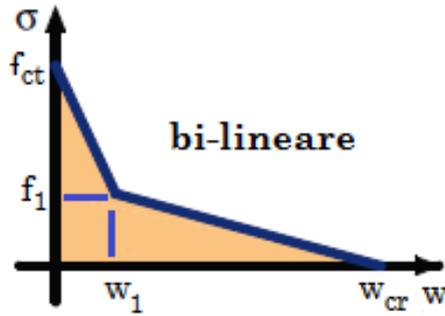


Figura 4.18: Softening bi-lineare.

Nel caso di softening bi-lineare secondo il modello di Petersson, è opportuno introdurre un parametro di penalizzazione della rigidità iniziale (v. Figura 4.19), trasformandola da un valore infinito ad un valore finito ma grande, tale da risolvere eventuali problemi di mal condizionamento numerico [75, 102] (Petersson’s bilinear law with penalty stiffness).

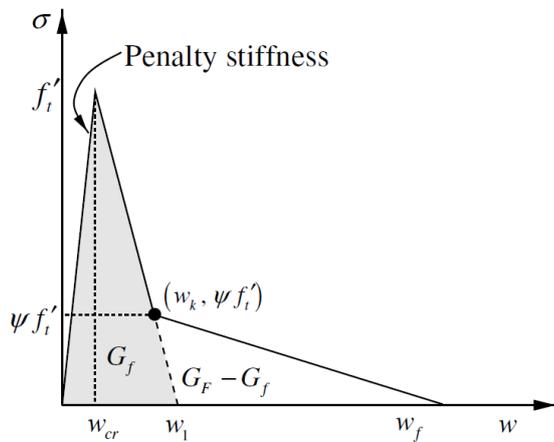


Figura 4.19: Softening bi-lineare con “Penalty stiffness”.

Infine, nel caso del *softening esponenziale* il legame costitutivo è rappresentato da un'esponenziale la cui legge si può esprimere per mezzo della seguente relazione:

$$\sigma_{ct} = f_{ct} \cdot e^{-\frac{f_{ct} w}{G_f}} \quad 4.48$$

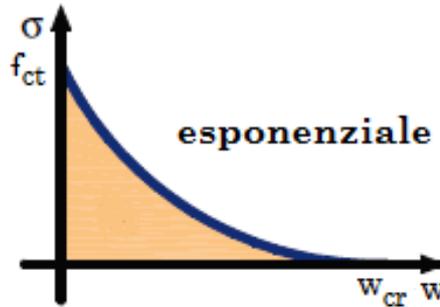


Figura 4.20: Softening esponenziale.

La pendenza del diagramma tensione - apertura è caratterizzata dal modulo H [$F L^{-3}$] di softening, negativo, risulta funzione di w ed in valore assoluto può essere scritto come:

$$H = \frac{f_{ct}^2}{G_f} e^{-\frac{f_{ct} w}{G_f}} \quad 4.49$$

Il rapporto tra il coefficiente f_{ct}^2/G_f , che è presente nelle formulazioni di H , ed E , modulo di Young, rappresenta la lunghezza l_{tr} , caratteristica del materiale.

Il comportamento non lineare del calcestruzzo teso, nei modelli oggetto della presente tesi, si ottiene dall'estensione del predetto concetto di energia di frattura; a causa della fessurazione, la resistenza a trazione del calcestruzzo decresce e di ciò se ne tiene conto per mezzo dell'introduzione di una molla non lineare il cui legame costitutivo (rigidezza tangente) nel caso di legge esponenziale con softening risulta dato da:

$$K_{nc}^{tg}(w) = -\frac{A_c f_{ct}^2}{G_f} e^{-\frac{f_{ct} w}{G_f}} \quad 4.50$$

con $G_f = G_{fo} \left(\frac{f_{ct}}{f_{co}}\right)^{0.7}$

nella quale f_{ct} è la resistenza a trazione all'attivazione dell'interfaccia (apertura del crack), la variabile interna G_f/f_{ct} (denominata anche w_1), in accordo al concetto di energia di frattura, viene ottenuta ponendo l'area sottesa dalla curva di softening uguale all'energia di frattura di un crack.

G_{fo} dipende dalla massima dimensione degli inerti d_{max} e per il caso di $d_{max} = 16$ mm è data da $G_{fo} = 0.03$ Nmm/mm² e f_{ct} e f_{co} sono correlati alla resistenza del calcestruzzo in compressione.

Nel caso flessionale, all'apertura del primo crack il comportamento non lineare del calcestruzzo teso verrà modellato con una molla traslazionale non lineare unilatera ed una rotazionale, le cui rigidezze verranno correlate all'energia di frattura per mezzo di una legge esponenziale con softening, come già specificato nel capitolo precedente.

4.3.2.2. Il criterio di attivazione dell'interfaccia

Nelle analisi non lineari a controllo di spostamento o di forza dovranno essere controllate le tensioni nel calcestruzzo teso, che, in condizioni di raggiungimento del criterio di attivazione dell'interfaccia e di successiva rottura, determinano l'apertura delle fessure; dovrà essere verificato anche che quelle nell'acciaio non devono raggiungere il limite di snervamento ed, infine, anche gli scorrimenti che potrebbero determinare tensioni di aderenza tali da dovere aggiornare la matrice di rigidezza in dipendenza di possibili variazioni del parametro α^2 nascente dal legame tensione di aderenza - scorrimento, secondo i passaggi seguenti.

Lo spostamento o il carico che determina l'attivazione dell'interfaccia e la successiva apertura del *crack* va individuato attraverso la ricerca del massimo della tensione normale di trazione nel calcestruzzo:

$$\begin{aligned} \underset{x}{Max} \{ \sigma_c(\Delta P \text{ or } \Delta u, x) \} &\Rightarrow f_{c_{max}}(\Delta P \text{ or } \Delta u), x_{c_{max}} \\ f_{c_{max}}(\Delta P \text{ or } \Delta u) = f_{ct} &\Rightarrow \Delta P_{c_{max}} \text{ or } \Delta u_{max} \end{aligned} \quad 4.51$$

e la ricerca del massimo della tensione normale di trazione nell'acciaio che porta allo snervamento della barra:

$$\begin{aligned} \text{Max}_x \{ \sigma_s(\Delta P \text{ or } \Delta u, x) \} &\Rightarrow f_{s \max}(\Delta P \text{ or } \Delta u), x_{s \max} \\ f_{s \max}(\Delta P \text{ or } \Delta u) = f_{sy} &\Rightarrow \Delta P_{s \max} \text{ or } \Delta u_{\max} \end{aligned} \quad 4.52$$

L'ascissa x_{cmax} che individua la posizione del *crack* permette la determinazione dei due sub elementi del BFE - *Basic Finite Element* fessurato.

4.3.3. L'interfaccia

Il trasferimento delle tensioni di trazione dalle barre di armatura al calcestruzzo circostante è un fenomeno molto complesso, che, come è stato ampiamente dimostrato dai numerosi studi in materia che si sono succeduti a partire dai primi anni del XX secolo ad oggi, coinvolge molteplici meccanismi, la cui compiuta modellazione costituisce un problema tutt'ora irrisolto.

Il corretto funzionamento delle strutture in cemento armato dipende, infatti, dalla effettiva possibilità che i due materiali costituenti, calcestruzzo ed acciaio, siano realmente solidali, cioè subiscano le stesse deformazioni. Tale comportamento è reso possibile dall'aderenza, il fenomeno attraverso cui si trasmettono gli sforzi tra i due materiali. Il fenomeno dell'aderenza non è una proprietà intrinseca della barra di armatura ma, piuttosto, deriva da un'ampia serie di fattori, i quali intervengono in modo differente nei vari stati di sollecitazione delle membrature in cemento armato.

4.3.3.1. I modelli presenti in letteratura

Lo sviluppo delle tensioni di aderenza, insieme al manifestarsi degli scorrimenti relativi acciaio - calcestruzzo e della fessurazione, comporta poi una determinante influenza sulla capacità rotazionale delle cerniere plastiche nelle membrature in cemento armato con evidenti riduzioni della loro rigidezza flessionale, in aperto contrasto con le ipotesi classiche della teoria del cemento armato. Il modello più comunemente adottato per rappresentare l'aderenza, sia per scopi normativi e di progettazione, sia per scopi di ricerca, è quello di tensione tangenziale uniforme

in grado di svilupparsi lungo la superficie laterale di una barra di armatura, ipotizzata con area trasversale equivalente a quella reale, ma con superficie laterale liscia.

Il suddetto modello è giudicato a tutt'oggi una semplificazione accettabile del fenomeno dell'aderenza, e, come sarà meglio illustrato più avanti, è generalmente caratterizzato da un legame locale tra la tensione tangenziale τ e lo scorrimento relativo s , il cui andamento è derivato da prove sperimentali del tipo *pull-out*, condotte su provini in cui il tratto della barra reso aderente al calcestruzzo è limitato (Rehm et al, 1961).

Il legame costitutivo d'aderenza può essere definito attraverso la prova di *pull-out* (Figura 4.21): supponendo che le tensioni tangenziali siano uniformemente distribuite su tutto il tratto della barra, di lunghezza l , immerso nel calcestruzzo, nota la forza F , dall'equazione di equilibrio alla traslazione orizzontale, è possibile valutare la tensione tangenziale di aderenza:

$$\tau = \frac{F}{p \cdot l} \quad 4.52$$

dove p è il perimetro della barra d'acciaio.

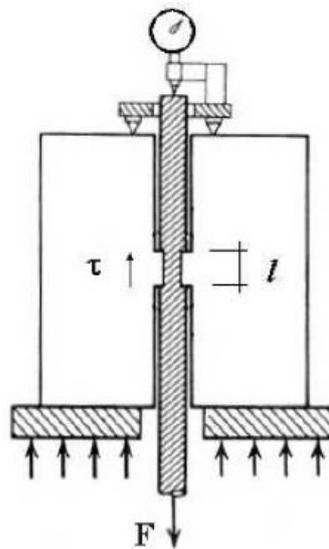


Figura 4.21: Pull-out test proposto da Rehm (1961).

La prova registra anche lo scorrimento terminale della barra, per cui, mettendo in relazione le due grandezze, si costruisce la curva che descrive il legame d'aderenza (Figura 4.22).

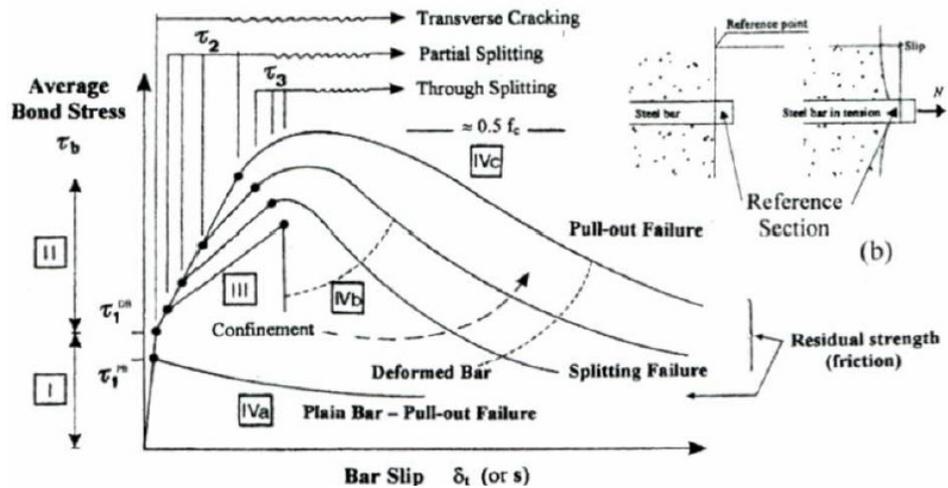


Figura 4.22: Legame τ -s locale.

Il meccanismo resistente sul quale si basa l'aderenza è ben rappresentato, al crescere della forza di trazione, dalla successione di quattro fasi (Tassios et.al.) (Figura 4.22), di seguito descritte:

Fase I: calcestruzzo non fessurato.

Per bassi valori della forza di trazione, si mobilitano altrettanto bassi livelli della tensione tangenziale di aderenza $\tau \leq \tau_1 = (0.2 \div 0.8) f_{ct}$, essendo f_{ct} la resistenza a trazione del calcestruzzo. L'ancoraggio è assicurato principalmente dall'adesione chimica che si instaura durante il getto di calcestruzzo. Essa è accompagnata dall'interazione meccanica associata all'irregolarità della superficie della barra; tuttavia, queste tipologie d'aderenza giocano un ruolo molto modesto, come confermato dal comportamento di una barra liscia (Stage IV/a). Per quest'ultima, anche basse sollecitazioni tangenziali sono sufficienti a rompere rapidamente l'adesione tra barra e calcestruzzo, determinando l'immediata crisi del sistema resistente. Sebbene in questa fase gli scorrimenti relativi siano nulli, nelle prove di *pull-out* si registra comunque uno scorri-

mento minimo, che attiene però alla deformazione in trazione del calcestruzzo (Figura 4.22 b).

Fase II: comparsa delle prime fessure nel calcestruzzo.

Per sollecitazioni crescenti, anche la tensione di aderenza aumenta ($\tau > \tau_1$) e viene meno il contributo resistente dell'adesione chimica. Nelle barre ad aderenza migliorata, la presenza delle nervature genera una componente radiale di compressione in direzione perpendicolare alla nervatura (Figura 4.23 a-b). A tale componente radiale il calcestruzzo, per equilibrio, oppone tensioni di trazione. Le limitate caratteristiche del conglomerato in tali condizioni determinano la lesione dello stesso, evidenziando delle microfessure trasversali che si estendono dall'estremità d'ogni nervatura (Figura 4.23 c), in corrispondenza delle quali si ottiene sfilamento locale della barra rispetto al calcestruzzo: l'apertura delle microfessure permette un reale scorrimento della barra d'acciaio. La modesta entità delle tensioni circonferenziali, determinata principalmente dalla favorevole geometria dei risalti, che mostrano un angolo α elevato, confina le microfessure, e quindi lo scorrimento, a valori trascurabili.

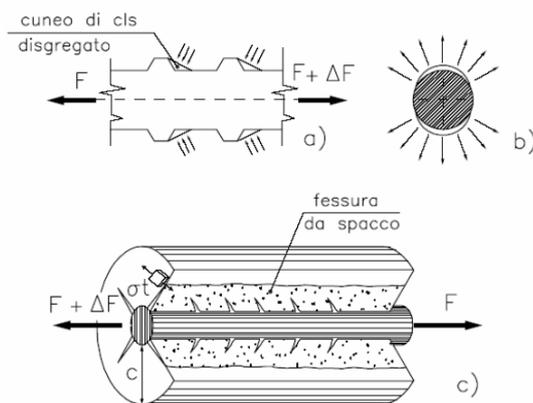


Figura 4.23: Cunei di conglomerato a monte della nervatura (Tepfers, 1979) (a), spinte radiali da essi esercitate (b) e fessure trasversali e longitudinali da *splitting* (Gambarova e Karako, 1982) (c).

In questa fase, lo stato di sollecitazione del calcestruzzo all'interno delle nervature è caratterizzato da elevate sollecitazioni di compressio-

ne e da tensioni di trazione, che ingenerano l'apertura delle prime micro-fessure trasversali, cui sono associati valori di scorrimento via via più elevati. La propagazione delle micro-fessure non raggiunge pertanto la superficie esterna del tirante e non si assiste in genere a fenomeni di *splitting*.

Fase III: fessurazione longitudinale.

Per valori di tensione tangenziale ancor maggiori, dalle microfessure si originano le "fessure longitudinali da spacco" (*splitting cracks*, Figura 4.24 b).

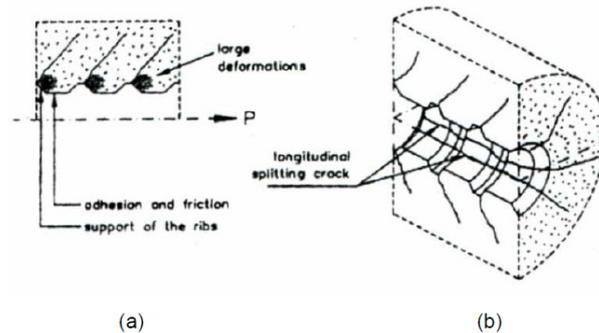


Figura 4.24: Fessurazioni nel calcestruzzo.

Ciò si deve essenzialmente al disgregamento del calcestruzzo che preme contro ogni risalto. A causa del deterioramento, il conglomerato si comporta come un cuneo, determinando un cospicuo incremento delle tensioni circonferenziali. La contemporanea presenza della propagazione delle fessure e del fenomeno dei cunei di calcestruzzo implica che tutti i fattori relativi al confinamento abbiano un importante impatto sull'aderenza. Il calcestruzzo non fessurato esercita un'azione di confinamento sulla barra mediante una sorta di puntellamento attraverso lo strato di conglomerato fessurato circostante la barra d'acciaio.

Nel caso di nulla o scarsa presenza di un rinforzo trasversale si arriva alla crisi, con sfilamento della barra, non appena le fessure raggiungono la superficie esterna del provino (Stage IVb, *splitting failure*). Nel caso di considerevole staffatura o notevole ricoprimento, l'azione di confinamento è tanto elevata da prevenire il diffondersi delle fratture longitudinali che rimangono relegate intorno la barra d'acciaio (Stage

IVc, *pull-out failure*).

Fase IVa: barre lisce.

Questo stadio segue immediatamente la rottura dell'aderenza per adesione chimica; il trasferimento delle tensioni tangenziali è fortemente condizionato da azioni trasversali; il ritiro del calcestruzzo e la scabrezza dell'armatura favoriscono l'attrito, mentre il deterioramento della superficie in movimento riduce le compressioni radiali fino al completo sfilamento della barra.

Fase IVb: barre ad aderenza migliorata.

All'aumentare dello scorrimento, la tensione d'aderenza raggiunge un massimo, per poi decrescere più o meno rapidamente in funzione dell'azione di confinamento: nel caso di minima armatura trasversale, le *splitting cracks* interessano l'intero copriferro con conseguente, improvvisa, perdita d'aderenza. D'altra parte, una sufficiente staffatura può assicurare una modesta efficienza a dispetto dello scorrimento. Per scorrimenti ancor maggiori, prevale un'aderenza d'attrito: le mensole di calcestruzzo tra le nervature si disgregano o sono tranciate e la barra scorre senza l'apprezzabile contributo dell'azione dei cunei di conglomerato.

Fase IVc: barre ad aderenza migliorata.

Nel caso di armatura trasversale notevole, l'azione di confinamento impedisce lo scorrimento per *splitting*: la crisi avviene, pertanto, per tranciamento delle mensole di calcestruzzo.

La Figura 4.25 illustra i possibili meccanismi di collasso locale dell'aderenza richiamati in precedenza (Cairns et al. (1992) e Andreasen et al. (1992)).

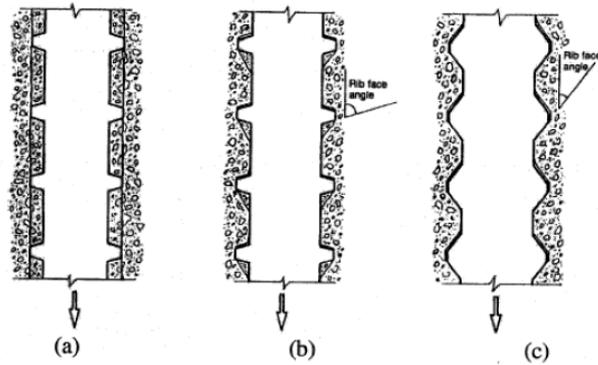


Figura 4.25: Possibili meccanismi locali di collasso dell'aderenza.

Schematizzando, la perdita d'aderenza, che generalmente dipende dall'efficacia del confinamento offerto sia dal copriferro sia dalle armature trasversali, si può manifestare per:

- Crisi per *pull-out* senza (o minima) fessurazione longitudinale: confinamento efficace e/o ingente copriferro (molto superiore ai valori normalmente utilizzati), tranciamento del calcestruzzo;
- Crisi per *pull-out* accompagnata da una moderata fenditura longitudinale: confinamento modesto e/o copriferro limitato, tranciamento del calcestruzzo associato a scorrimento per *splitting*;
- Crisi per *splitting* indotta dalla completa perdita del ricoprimento per insufficiente confinamento e/o copriferro: lo scorrimento avviene con minimo danneggiamento dei risalti tra le nervature.

I parametri che caratterizzano il legame d'aderenza dipendono, pertanto:

- dalle caratteristiche geometriche e meccaniche dell'armatura;
- dalle caratteristiche meccaniche del calcestruzzo;
- dall'azione di confinamento esercitato dal copriferro e dall'armatura trasversale;
- dal tipo di storia carico applicata;
- da fattori ambientali.

In relazione alle caratteristiche geometriche e meccaniche dell'armatura, le possibili forme delle nervature sono molteplici e per anni sono state al centro di discussioni che cercavano di determinare i parametri geometrici necessari a garantire l'aderenza. In linea teorica, il mo-

dello migliore dovrebbe essere quello che minimizza la forza di *splitting* e rende massima l'aderenza.

Un utile strumento per valutare l'influenza delle caratteristiche geometriche delle barre ad aderenza migliorata sul legame d'aderenza è il cosiddetto "indice d'aderenza o superficie relativa delle nervature" (Rehm), che per barre ad aderenza migliorata è pari a:

$$f_R = \frac{A_{np}}{\pi \cdot \Phi \cdot c} \tag{4.53}$$

dove i parametri geometrici della barra sono riportati in Figura 4.26.

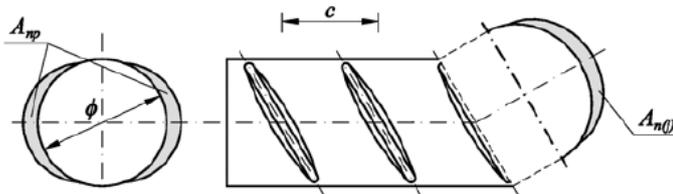


Figura 4.26: Definizione parametri geometrici per calcolo indice d'aderenza.

Nel caso della barra con nervature idealizzate anulari (Figura 4.27), si ottiene per l'indice d'aderenza:

$$f_R = \frac{A_{np}}{\pi \cdot \Phi \cdot c} = \frac{(2a + \Phi)^2 - \Phi^2}{4 \cdot \Phi \cdot c} \cong \frac{a}{c} \tag{4.47}$$

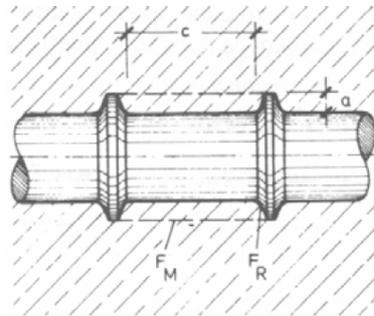


Figura 4.27: Caratteristiche geometriche barra nervata idealizzata (Rehm,1961).

Al crescere dell'indice di aderenza (il che significa aumento dell'altezza dei denti a parità della loro distanza e/o diminuzione della distanza a parità di altezza), cresce la resistenza d'aderenza e diminuisce il corrispondente scorrimento, ma contemporaneamente aumenta la predisposizione allo *splitting* (Figura 4.28).

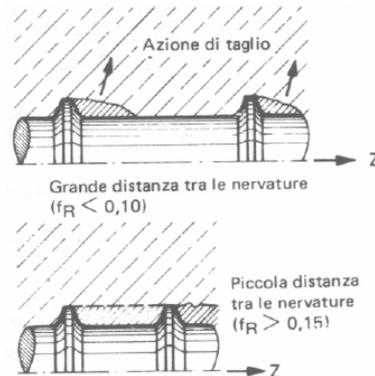


Figura 4.28: Rottura per *splitting* e rottura per *pull-out* (Rehm, 1961).

Per risalti troppo ravvicinati o di notevole dimensione, non potrà sfruttarsi la resistenza delle mensole di calcestruzzo: il fenomeno sarà fortemente condizionato dal valore della tensione tangenziale che si instaura sulla superficie cilindrica che avvolge la barra nervata (Figura 4.29, rottura per *pull-out*). Nel caso in cui le nervature sono lontane più di 10 volte la loro altezza, la rottura arriva per schiacciamento del calcestruzzo compreso nella zona radiale posta contro i risalti determinando una crisi per *splitting* (Figura 4.29).

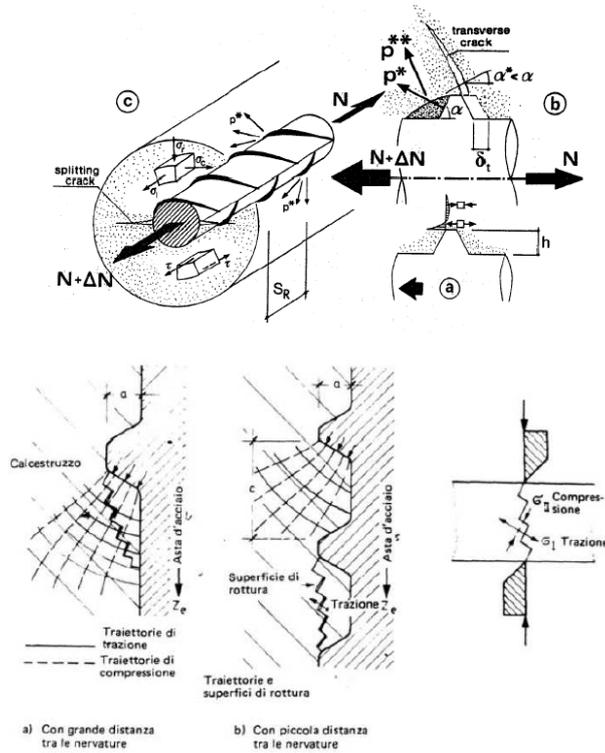


Figura 4.29: Andamento qualitativo tensioni principali e superfici di rottura nelle mensole di calcestruzzo sotto l'azione di nervature anulari (barra idealizzata) (Leonhardt, 1977).

I risultati delle prove sperimentali condotte da Rehm individuano una dipendenza lineare tra la tensione d'aderenza media e l'indice d'aderenza f_R (Figura 4.30).

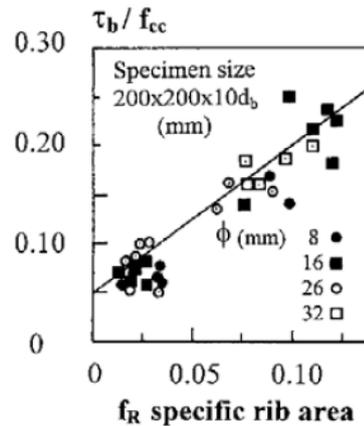


Figura 4.30: Tensioni d'aderenza in funzione dell'indice f_R (Rehm, 1969).

Per le barre ad aderenza migliorata, la deformazione dell'acciaio non ha nessuna influenza sul legame d'aderenza solo se l'acciaio lavora in campo elastico. Prove sperimentali hanno evidenziato che lo snervamento dell'acciaio ha invece un effetto negativo sul legame, che presenta un improvviso tratto di *softening* (Shima et al. 1987, Engström 1992, Bigaj, 1995). Probabilmente, la causa di questo decadimento delle proprietà d'aderenza è da ricercare nella forte contrazione trasversale della barra che fa diminuire l'intensità delle pressioni di compressione del calcestruzzo sulle nervature, con conseguente perdita d'attrito.

In relazione alle *Caratteristiche meccaniche del calcestruzzo*, il contributo offerto dal calcestruzzo è indubbiamente determinante e dipende, dunque, dalle sue caratteristiche meccaniche, intese principalmente in termini di resistenza a trazione. Il raggiungimento del limite ultimo per sollecitazioni di trazione individua l'istante di apertura delle fessure radiali prima ed eventualmente longitudinali poi e, come si è visto in precedenza, la fessurazione precede i fenomeni di degrado dell'aderenza e rappresenta su larga scala uno dei principali motivi di abbattimento del contributo irrigidente del calcestruzzo per le armature tese. Pertanto, f_c e f_t rivestono i ruoli più importanti nella determinazione della crisi di un provino soggetto a *pull-out*.

La dipendenza dell'aderenza dalla resistenza a compressione semplice del calcestruzzo è mostrata nella Figura 4.31.

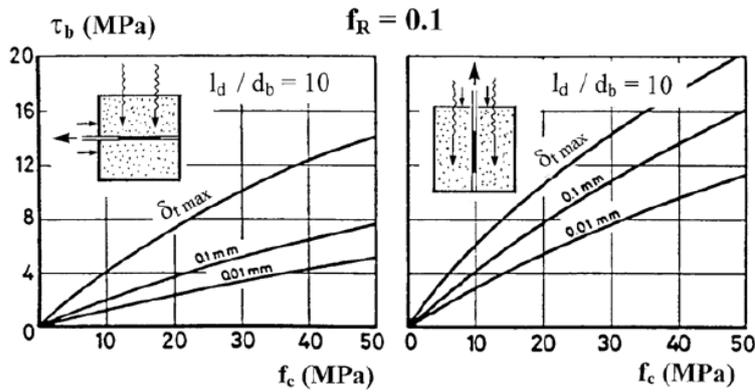


Figura 4.31: Comportamento aderenza in relazione alla resistenza a compressione semplice del calcestruzzo: prova d'estrazione per differenti posizioni di betonaggio e diversi valori di scorrimento terminale (Martin e Noakowski, 1981).

Come già premesso, tra i parametri che influenzano le caratteristiche d'aderenza vi è l'azione di confinamento, che può essere di tipo attivo se generata dall'azione di carichi strutturali, o di tipo passivo, generalmente sviluppata dalla staffatura e dal copriferro. Risulta evidente che l'efficacia di un confinamento attivo è maggiore, poichè i suoi effetti non dipendono dall'entità delle tensioni d'aderenza mobilitate. I carichi strutturali modificano il campo in corrispondenza dell'ancoraggio, riducendo le tensioni circonferenziali e, quindi, diminuendo il rischio di una lesione da *splitting*. Al contrario, un confinamento passivo è meno efficace poichè risulta, in ultima analisi, correlato a fenomeni di deformazione del calcestruzzo e, quindi, all'aderenza sviluppata: nella Figura 4.32 si deduce che l'azione della staffatura non inizia fintantochè la fessura non arriva in prossimità di essa.

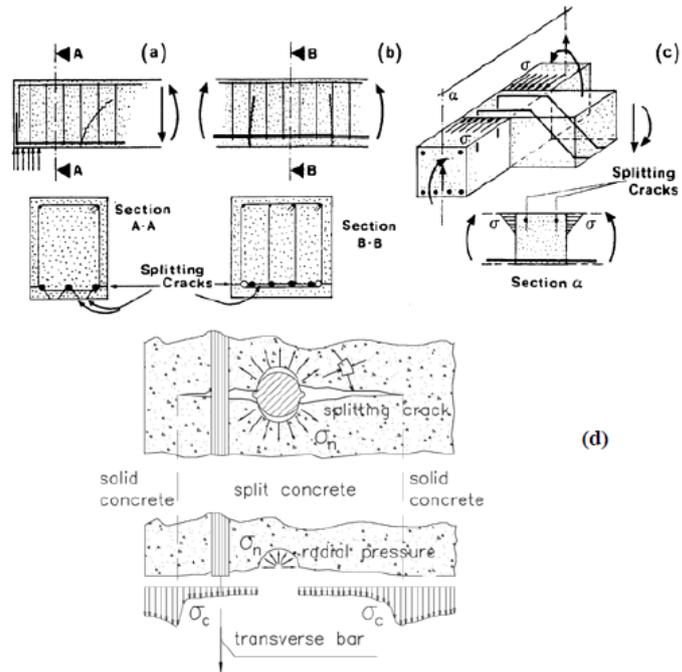


Figura 4.32: Esempi di confinamento: (a) confinamento misto (parte attivo, parte passivo) di un ancoraggio; (b) confinamento passivo con staffe di una giunzione per sovrapposizione; (c) ancoraggio in confinamento attivo (Gambarova and Rosati, 1997) e (d) azione di confinamento di una staffa su una splitting crack (Giuriani et al., 1991)

Compito del confinamento, sia passivo che attivo, è contrastare l'apertura delle fessure da *splitting* per evitare una rottura improvvisa del legame d'aderenza. Nella Figura 4.33 sono riportate le modalità di rottura negli elementi non confinati e confinati secondo (Nagatomo and Kaku, 1992).

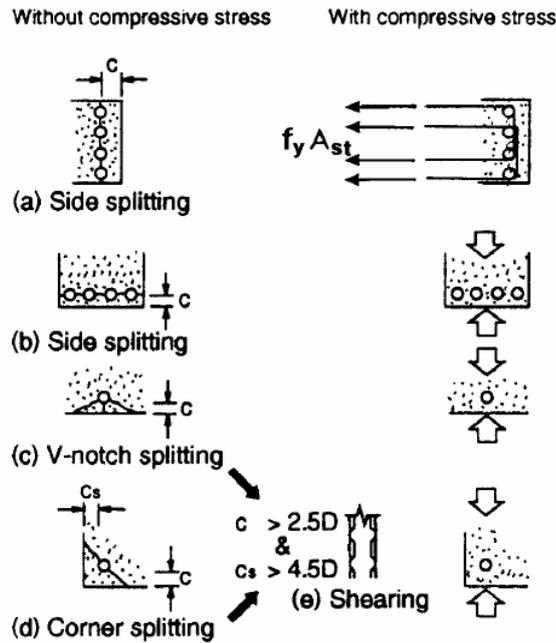


Figura 4.33: Effetto del confinamento sulle modalità di rottura (Nagatomo and Kaku, 1992)

Ulteriori informazioni sull'influenza del confinamento laterale e della fessurazione longitudinale sull'aderenza possono essere reperiti dai risultati sperimentali delle prove condotte da Malvar (1992).

La storia di carico e la ripetizione dei cicli di carico su di un elemento in cemento armato sono determinanti anch'esse ai fini dell'aderenza.

Molte esperienze sono state condotte per accertare l'influenza della storia di carico sul legame di aderenza e molti sono i parametri che intervengono, quali la sensibilità a cicli di fatica con frequenze variabili, fatica oligociclica, la natura delle sollecitazioni pulsanti, siano esse dello stesso segno o con inversione.

In sintesi, i principali esiti delle ricerche condotte per indagare il comportamento del legame di aderenza per carichi ciclici (Eligehausen et al., 1983), possono essere riassunte come segue:

- gli effetti indotti dalla fatica sui meccanismi di collasso dell'aderenza governati dalla fessurazione del calcestruzzo sono paragonabili a

quelli che riguardano lo stesso materiale sottoposto a cicli di sollecitazioni a trazione;

- gli effetti indotti dalla fatica sui meccanismi di collasso per *pull-out* sono strettamente correlabili agli analoghi effetti che si registrano per campioni di calcestruzzo soggetti a stati di sollecitazione monoassiale pulsante di compressione;
- l'inversione della sollecitazione è negativa ai fini dell'aderenza;
- per cicli di carico con inversione delle sollecitazioni, mantenuti entro limiti contenuti delle tensioni tangenziali di aderenza, l'effetto negativo si esaurisce con i cicli e la resistenza ultima non diminuisce significativamente rispetto al caso di processi di carico monotoni (Figura 4.34 a). Al contrario, nel caso di cicli che raggiungano livelli della tensione di aderenza maggiori e prossimi a quegli ultimi (circa l'80%), il degrado dell'aderenza è marcato anche in termini di resistenza ultima (Figura 4.34 b).

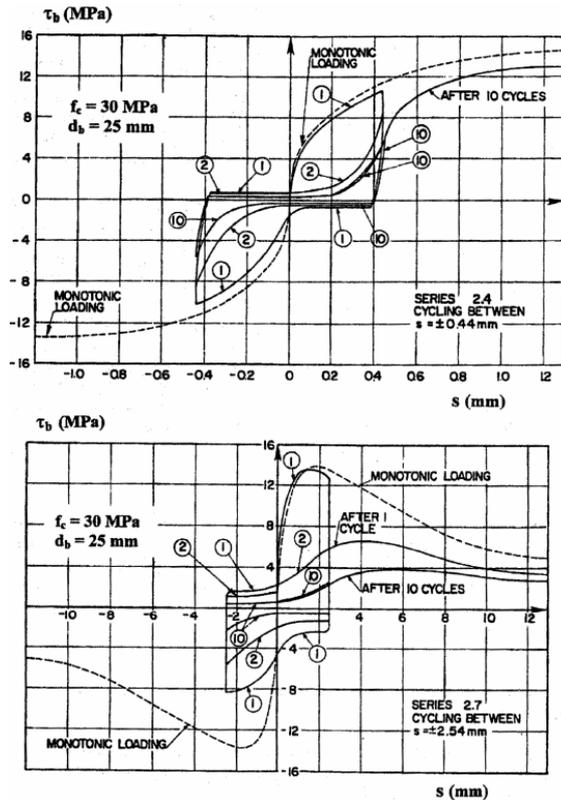


Figura 4.34 a,b: Variazione del legame locale t - s dopo 1 e 10 cicli di carico con inversione dello stato di sollecitazione [Eligehausen et al., 1983]

Vi sono, infine, altri aspetti che influenzano, sia pure in modo minore, l'aderenza e sono legati a *fattori tecnologici o ambientali*.

È dimostrato che, nel caso di armature disposte orizzontalmente in prossimità del fondo del cassero, così come nel caso di barre disposte verticalmente e sollecitate parallelamente ma in direzione opposta alla direzione di getto, l'aderenza migliora rispetto al caso di armature orizzontali vicine alla estremità libera superiore dei getti e di armature verticali sollecitate parallelamente e concordemente alla direzione dei getti. Le differenze rilevate sono dovute alla diversa porosità della pasta del calcestruzzo nelle varie zone del cassero. In prossimità della superficie libera del getto, ad esempio, si concentra una maggior porosità dell'impasto, a causa della risalita delle micro-bolle d'aria intrappolate

nel materiale.

Altro elemento oggetto di studio è stata l'influenza del sottile strato di ruggine che spesso ricopre le armature prima del getto del calcestruzzo [Morgan, 1998]. Le prove condotte hanno dimostrato che un sottile strato di ruggine ($0,3 \div 1,5 \text{ g/dm}^2$), non solo non compromette lo sviluppo dell'aderenza ma, al contrario, ne può favorire un miglioramento rispetto alle barre in perfette condizioni. In aggiunta, lo strato di ruggine agisce come inibitore per ulteriori processi di corrosione e la conseguente riduzione di sezione non è generalmente significativa ai fini della resistenza ultima.

In relazione alle *formulazioni analitiche presenti in letteratura* del legame d'aderenza, la funzione che correla la tensione tangenziale di aderenza allo scorrimento ed eventualmente all'ascissa della sezione in esame lungo la barra, è stata oggetto di numerosi studi, che nella grande maggioranza dei casi sono strettamente correlati ai risultati delle prove sperimentali del tipo *pull-out* su provini corti. Sarà esposta di seguito una panoramica dei legami τ -s presenti in letteratura.

Tra le formulazioni più ricorrenti in letteratura per il caso di carichi monotoni crescenti se ne citano solamente alcune in ordine cronologico, anche perché tra queste, la *formulazione proposta da Ciampi, Eligehausen, Bertero e Popov (1981)*, e successivamente ripresa anche nel *Model Code 90 del CEB (1993)*, ha rappresentato, e continua a rappresentare, la formulazione di riferimento.

La formulazione analitica del legame (Figura 4.35) è rappresentata da una funzione definita a tratti, caratterizzata da un primo ramo crescente (OC); un tratto costante la cui estensione in termini di scorrimento è variabile fino ad annullarsi completamente per tenere conto delle modalità di crisi conseguenti alla fessurazione di *splitting*; un tratto discendente con legge lineare fino alla stabilizzazione dell'ultimo tratto, con valore della tensione τ costante al crescere degli scorrimenti, che rappresenta la fase in cui, vinta l'aderenza e degradata l'interfaccia tra i due materiali, rimane attivo il solo contributo di attrito tra questi ultimi.

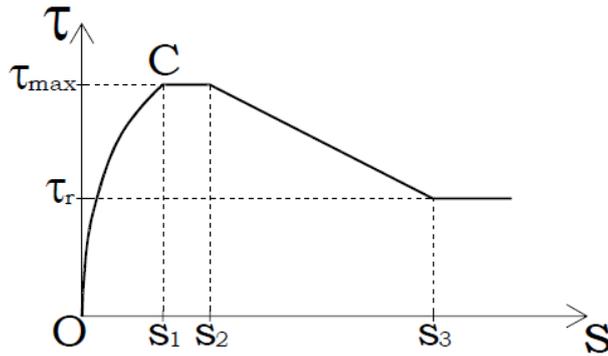


Figura 4.35: Legame d'aderenza proposto da [Eligehausen et al., 1983]

La funzione che esprime il legame τ - s è la seguente:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tau(s) = \tau_1 \left(\frac{s}{s_1} \right)^\alpha & 0 \leq s \leq s_1 \\ \tau(s) = \tau_1 & s_1 < s \leq s_2 \\ \tau(s) = \tau_1 + \frac{\tau_r - \tau_1}{s_3 - s_2} (s - s_2) & s_2 < s \leq s_3 \\ \tau(s) = \tau_r & s > s_3 \end{array} \right. \quad 4.54$$

Il valore dell'esponente α è assunto pari a 0.4.

I valori degli scorrimenti s_1 , s_2 ed s_3 , che delimitano i campi di validità delle varie espressioni sopra richiamate, sono dipendenti dalle condizioni di confinamento della barra, mentre i valori delle tensioni tangenziali massima (τ_{max}) e residua (τ_r) sono funzione della qualità del calcestruzzo, e, più specificamente, della sua resistenza a compressione.

Nella Tabella 4.2 sono riportati i valori dei parametri che definiscono la funzione, così come inizialmente proposti da Ciampi, Eligehausen, Bertero e Popov e come poi definitivamente introdotti nel CEB Model Code 90.

Tabella 4.2: Parametri τ_i e s_i per la definizione del legame τ - s .

Eligehausen Bertero Popov	CEB Model Code 1990			
	CLS confinato		CLS non confinato	
	Condizioni di buona aderenza	Altre condizioni di aderenza	Condizioni di buona aderenza	Altre condizioni di aderenza
$\tau_1 \cong 11.5-15.5 \text{ MPa}$	$\tau_1 = 2.5 \sqrt{f_{ck}}$	$\tau_1 = 1.25 \sqrt{f_{ck}}$	$\tau_1 = 2 \sqrt{f_{ck}}$	$\tau_1 = 1 \sqrt{f_{ck}}$
$\tau_3 \cong 4.2-6 \text{ MPa}$	$\tau_3 = 0.4 \sqrt{f_{ck}}$	$\tau_3 = 0.4 \sqrt{f_{ck}}$	$\tau_3 = 0.15 \sqrt{f_{ck}}$	$\tau_3 = 0.15 \sqrt{f_{ck}}$
$s_1 \cong 1.0 \text{ mm}$	$s_1 = 1.0 \text{ mm}$	$s_1 = 1.0 \text{ mm}$	$s_1 = 0.6 \text{ mm}$	$s_1 = 0.6 \text{ mm}$
$s_2 \cong 3.0 \text{ mm}$	$s_2 = 3.0 \text{ mm}$	$s_2 = 3.0 \text{ mm}$	$s_2 = 0.6 \text{ mm}$	$s_2 = 0.6 \text{ mm}$
$s_3 \cong 10.5 \text{ mm}$	$s_3 = \text{passo delle nervature}$	$s_3 = \text{passo delle nervature}$	$s_3 = 1.0 \text{ mm}$	$s_3 = 2.5 \text{ mm}$

Il legame di aderenza descritto, valido per il caso di sollecitazioni monotone, è stato successivamente adattato dagli stessi autori, al fine di tenere conto del degrado che interviene per effetto dei carichi ciclici. Il legame proposto in questo caso è schematicamente illustrato nella Figura 4.36.

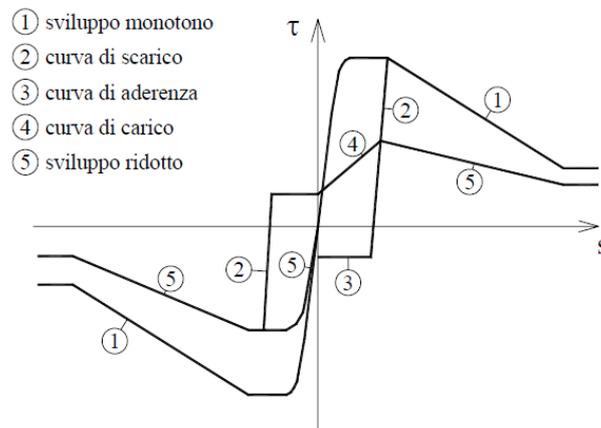


Figura 4.36: Legame d'aderenza proposto da Eligehausen (1983) per carichi ciclici

L'importanza dello snervamento dell'acciaio nel legame d'aderenza è stato oggetto di studio di numerosi ricercatori (Huang et al., 1996, Shima et al. 1987, Engstrom 1992, Bigaj, 1995), i quali suggeriscono di modificare il legame di Eligehausen (1983) con un legame che segue la seguente formulazione analitica nel caso in cui l'acciaio è snervato:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau(s) = \tau_y - (\tau_y - \tau_{yf}) \left(\frac{s - s_y}{s_{yf} - s_y} \right) \quad s_y \leq s \leq s_{yf} \\ \tau(s) = \tau_{yf} - \tau_{yf} \left(\frac{s - s_5}{s_5 - s_{yf}} \right) \quad s_y \leq s \leq s_5 \end{array} \right. \quad 4.55$$

altrimenti, se l'acciaio è in campo elastico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau(s) = \tau_r - (\tau_{\max} - \tau_r) \left(\frac{s - s_2}{s_3 - s_2} \right) \quad s_2 \leq s \leq s_3 \\ \tau(s) = \tau_r - \tau_r \left(\frac{s - s_3}{s_4 - s_3} \right) \quad s_3 \leq s \leq s_4 \end{array} \right. \quad 4.56$$

dove s_y è lo scorrimento che si ha nella sezione in cui l'acciaio raggiunge lo snervamento e τ_y è la corrispondente tensione tangenziale (Figura 4.37).

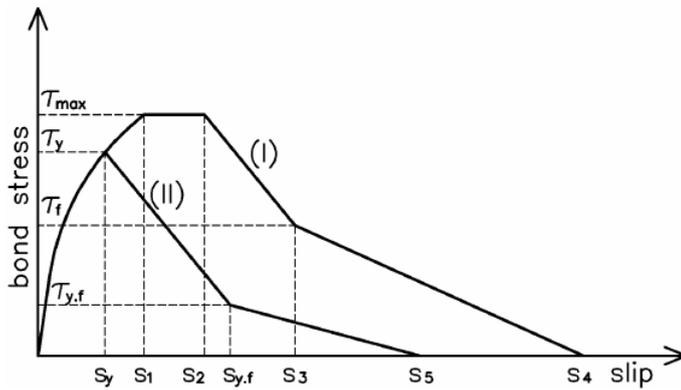


Figura 4.37: Legame d'aderenza: (I) quando l'acciaio lavora in campo elastico, (II) quando l'acciaio lavora in campo plastico, proposto in (Huang et al., 1996).

Nella Tabella 4.3 vengono riportati i valori degli scorrimenti e delle tensioni tangenziali che delimitano le curve di aderenza proposte da Eligehausen (1983) e Huang (1996).

Tabella 4.3: Parametri che definiscono il legame d'aderenza secondo Eligehausen (1983) e Huang (1996).

	Eligehausen et al (1983)		Huang et al (1996)			
	Condizioni di aderenza		Condizioni di aderenza			
	buone	altro	buone		altro	
			cls	Cls alta resistenza	cls	Cls alta resistenza
s_1 (mm)	1.0		1.0	0.5	1.0	0.5
s_2 (mm)	3.0		3.0	1.5	3.0	1.5
s_3 (mm)	Distanza tra le nervature		Distanza tra le nervature			
s_y (mm)	NC		Valore dello snervamento calcolato nella sezione in cui l'acciaio si snerva			
s_{yf} (mm)			$s_y + 2.5$	$s_y + 0.25$	$s_y + 2.5$	$s_y + 0.25$
s_4 (mm)			3.0 s_3			
s_5 (mm)			2.0 s_3			
α	0.4	0.4	0.4	0.3	0.4	0.3
τ_{max} (MPa)	$2.5 \sqrt{f_c}$	$2.0 \sqrt{f_c}$	$0.45 f_c$	$0.45 f_c$	$0.225 f_c$	$0.225 f_c$
τ_r (MPa)	$1.0 \sqrt{f_c}$	$0.3 \sqrt{f_c}$	$0.4 \tau_{max}$			
τ_y (MPa)	NC		$f(s_y)$			
τ_{yf} (MPa)			$0.2 \tau_{max}$			

Il *Modello di Sigrist* (1995) rappresenta un legame d'aderenza per barre ad aderenza migliorata semplificato rispetto ai precedenti, funzione solo della resistenza del calcestruzzo e della deformazione nell'acciaio. La relazione che lega la tensione tangenziale allo scorrimento è rappresentata da una funzione costante a tratti, pari a τ_{b0} se l'acciaio è elastico e a τ_{b1} se l'acciaio è snervato (Figura 4.38). I valori di τ_{b1} e τ_{b0} sono dati da:

$$\begin{aligned} \tau_{b1} &= 0.3\sqrt[3]{f_c^2} \\ \tau_{b0} &= 0.6\sqrt[3]{f_c^2} \end{aligned} \tag{4.57}$$

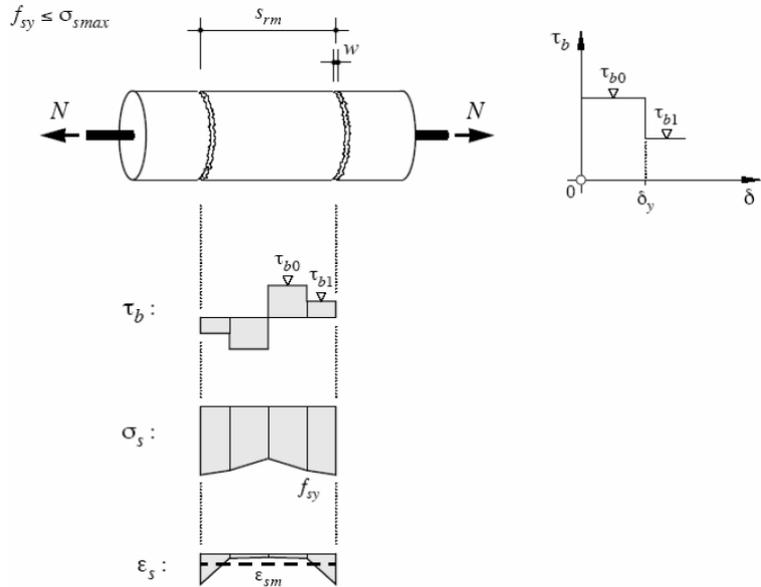


Figura 4.38: Legame di aderenza proposto da (Sigst, 1995) e distribuzione deformazioni e tensioni conseguenti al legame proposto.

Nel *Modello di Shima* (1987) viene proposto un legame d'aderenza che è funzione anche della deformazione dell'acciaio:

$$\tau(s) = f_c \frac{0.73 \left[\ln \left(1 + 5000 \frac{s}{\Phi} \right) \right]^3}{1 + \epsilon_s 10^5} \tag{4.58}$$

Nella Figura 4.39 viene riportato l'andamento della tensione tangenziale in funzione dello scorrimento secondo la relazione proposta dall'autore per diversi rapporti della deformazione dell'acciaio, normalizzato rispetto alla deformazione di snervamento (presa pari al 2.75‰), considerando un calcestruzzo la cui resistenza cilindrica a compressione è pari a 32 MPa.

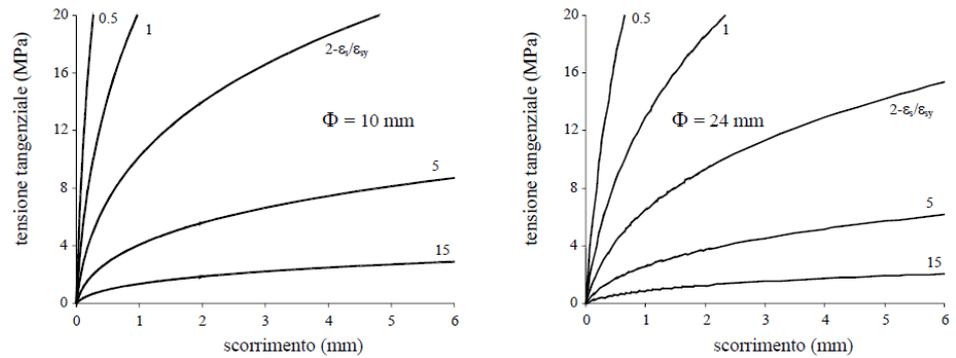


Figura 4.39: Legame d'aderenza proposto in (Shima et al, 1987).

Un *Modello* analitico per studiare il comportamento dell'aderenza è quello proposto da *Tepfers* (1982). Come visto precedentemente, alla componente radiale di compressione in direzione perpendicolare alla nervatura si associano, per equilibrio, delle tensioni di trazione nel calcestruzzo (Figura 4.40). Nel momento in cui questa tensione principale di trazione supera il valore di resistenza f_t , il calcestruzzo inizia a fessurarsi e, per questo stato di sollecitazione, la componente radiale della tensione tangenziale d'aderenza risulta pari a:

$$f_{br} = f_b \tan(\alpha) \quad 4.59$$

Tale tensione può essere vista come una pressione idraulica agente su un anello di calcestruzzo (Figura 4.40), la cui intensità può essere valutata conoscendo la distribuzione delle tensioni di trazioni che si instaurano lungo il raggio dell'anello.

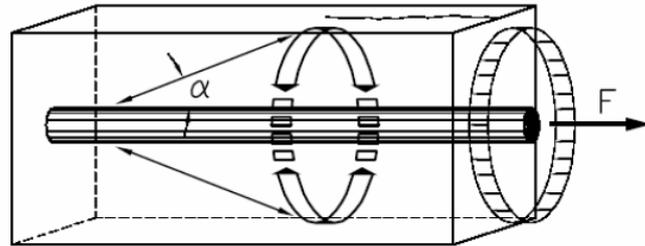


Figura 4.40: Formazione delle fessure di splitting secondo (Tepfers, 1982).

Il comportamento dell'anello di calcestruzzo può essere di tre tipi

(Figura 4.41):

- elastico;
- parzialmente fessurato-elastico;
- plastico.

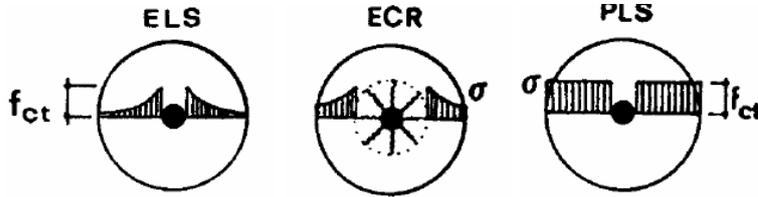


Figura 4.41: Comportamento elastico (ELS), parzialmente fessurato-elastico (ECR) e plastico (PLS) del modello suggerito da (Tepfers, 1982).

Nel primo caso, la tensione tangenziale associata ad una distribuzione elastica di tensioni può essere valutata partendo dalla formulazione proposta da Timoshenko (1976) per un corpo elastico lineare; la tensione tangenziale risulta, quindi, pari a:

$$\frac{f_t}{\tan(\alpha)} \frac{\left(c + \frac{\varphi}{2}\right)^2 - \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}{\left(c + \frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{\varphi}{2}\right)^2} \quad 4.60$$

dove c rappresenta il copriferro e φ il diametro della barra.

Nel caso di comportamento parzialmente fessurato-elastico, la tensione d'aderenza è pari a:

$$\frac{f_t}{\tan(\alpha)} \frac{\left(c + \frac{\varphi}{2}\right)}{1.664 \cdot \varphi} \quad 4.61$$

Nel caso di comportamento plastico:

$$\frac{f_t}{\tan(\alpha)} \frac{2c}{\varphi} \quad 4.62$$

L'effetto del confinamento delle staffe si traduce in un contributo nella pressione di confinamento oltre a quello offerto dal copriferro.

Partendo dal presupposto di voler valutare il comportamento in e-

servizio dell'aderenza, Giuriani ha eseguito numerosi test sperimentali dai quali gli è stato possibile evidenziare che esistono 3 campi in cui suddividere il legame τ - s (*Modello trilatero di Giuriani*) in Figura 4.42:

Campo 1: relativo a spostamenti inferiori a 0.01 mm, corrisponde alla fase di deformazioni elastiche del calcestruzzo che segue la barra; tale fase è caratterizzata dall'adesione chimica.

Campo 2: per scorrimenti ancora piccoli, compresi tra 0.01 mm e 0.4 mm, con presenza di microfissurazione ed inizio del *crushing* (schiacciamento) del calcestruzzo davanti ai denti delle barre. Questa fase corrisponde propriamente allo stato di esercizio della struttura.

Campo 3: è la fase dei grandi spostamenti.

La legge proposta da Giuriani è descritta analiticamente dalle seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \tau_1 = \tau_{11} s & 0 \leq s \leq s_1 \\ \tau_2 = \tau_{02} + \tau_{12} s & s_1 < s \leq s_2 \\ \tau_3 = \tau_{13} s & s > s_2 \end{cases} \quad 4.63$$

Tali equazioni sono in grado di ricalcare quanto l'autore evince dalla sperimentazione, pur linearizzando ciascun campo in cui è stato suddiviso il legame costitutivo. Purtroppo i parametri τ_{ij} presenti non sono costanti, ma devono essere sempre valutati a posteriori sulla sperimentazione eseguita e ciò rappresenta un problema per poter assumere qualsiasi ipotesi in fase progettuale.

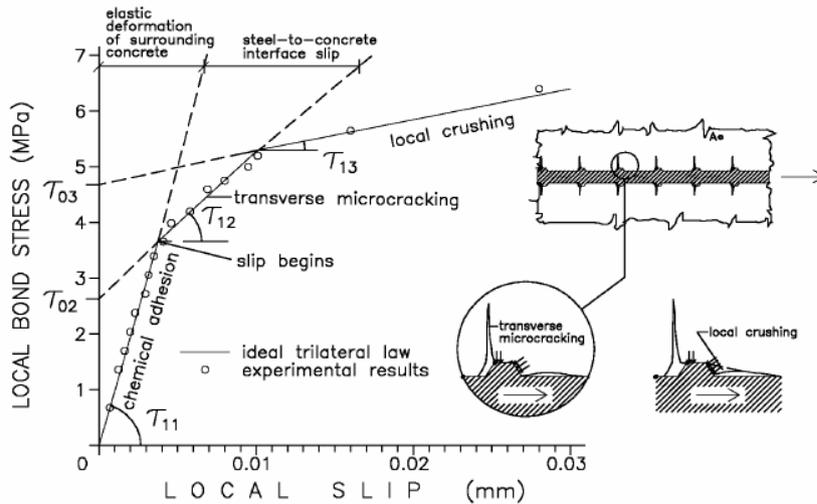


Figura 4.42: Legame d'aderenza idealizzato (Giuriani, 1991).

Partendo da risultati di numerose sperimentazioni, diversi autori si sono dedicati a ricercare leggi τ - s che si adattassero in modo adeguato ai relativi grafici sperimentali, ottenendo spesso espressioni di tipo polinomiale (*Modelli di tipo polinomiale*).

Nilson [Nilson, 1968] ha proposto una curva sulla base dei risultati sperimentali ottenuti da Bresler e Bertero (1968), che si riferivano allo studio di campioni lunghi, costituiti da tiranti in cemento armato, in cui le barre erano strumentate con estensimetri elettrici, così come poi utilizzati dallo stesso Nilson. La formulazione proposta è del tipo polinomiale del terzo grado, in cui i coefficienti sono stati ricavati per regressione dai dati sperimentali.

$$\tau(s) = 998.4s - 584 \cdot 10^2 s^2 + 852.2 \cdot 10^3 s^3 \quad 4.64$$

Successivamente, lo stesso Nilson ha proposto una modifica del legame τ - s , a seguito della sperimentazione da egli stesso ha condotto su campioni di barre strumentate. La principale variazione rispetto alla formulazione proposta in precedenza consiste nel riconoscimento della dipendenza di τ , oltre che dallo scorrimento s , anche dall'ascissa della sezione di barra lungo il suo asse.

La formulazione proposta è la seguente:

$$\tau(s, x) = 3100 (1.43 \cdot x + 1.5) \cdot d \cdot f_c \quad 4.65$$

in cui:

x è la distanza dalla sezione di estremità caricata espressa in pollici;
ci;

f_c è la resistenza a compressione del calcestruzzo espressa in psi;

d è lo scorrimento espresso in pollici.

Nella Figura 4.43 sono rappresentati i legami d'aderenza trovati sperimentalmente da (Nilson, 1972). Il legame trovato può essere rappresentato come una funzione crescente e linearmente dipendente dalla distanza dalla fessura, fino ad un valore che, nei risultati riportati dall'autore, è di 153 mm; oltre tale valore il legame non dipende più dalla distanza. La variazione del legame dalla distanza dalla sezione fessurata può essere causata dalla microfessurazione radiale del calcestruzzo in prossimità di questa sezione (Figura 4.44).

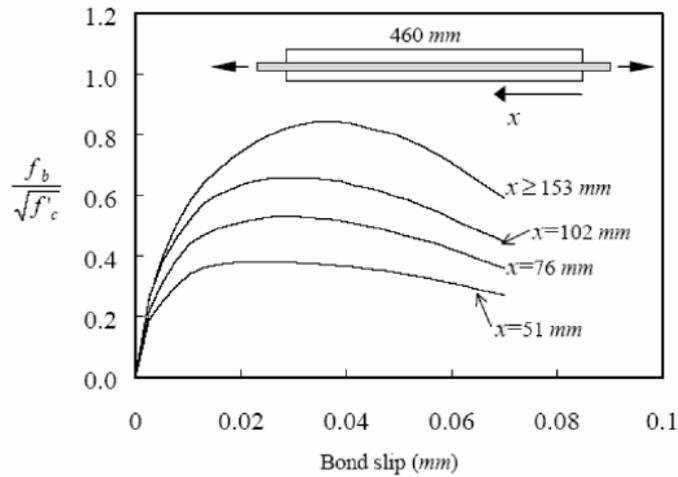


Figura 4.43: Legame d'aderenza trovato sperimentalmente da (Nilson, 1972).

È ragionevole pensare che la distanza in cui il legame costitutivo rimane costante è funzione del diametro della barra. Dalle prove di (Nilson, 1972) ciò si verifica ad una distanza dalla fessura pari a circa 6Φ , mentre dai risultati delle prove sperimentali di (KanKam, 1997), si ha ad una distanza pari a 3Φ .

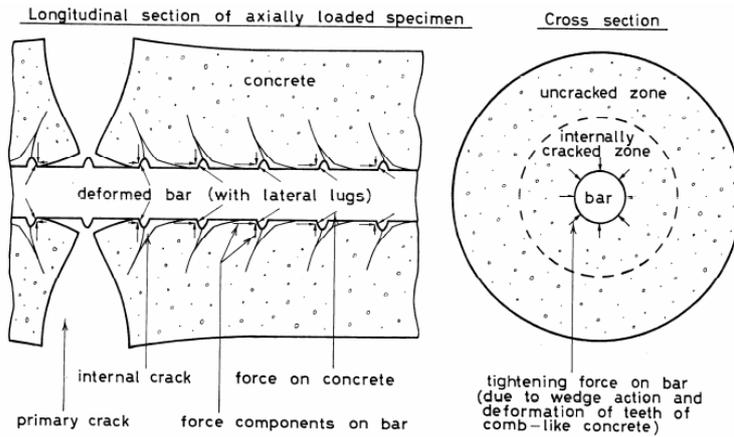


Figura 4.44: Schema del dettaglio della disposizione delle fessure interne intorno ad una sezione fessurata trasversalmente.

Il lavoro di Mirza e Houde (1979) è finalizzato, come gli studi di Nilson, alla definizione di un legame di aderenza per l'impiego in modellazioni agli elementi finiti e si basa sui risultati di una vasta campagna sperimentale condotta su provini ancora del tipo di quelli impiegati da Nilson e Bertero.

La formulazione proposta è un polinomio del 4 grado (Figura 4.45), ottenuto per regressione da una serie di 62 provini:

$$\tau(s) = 539.8 \cdot s - 256.1 \cdot 10^2 s^2 + 592.2 \cdot 10^3 s^3 - 557.4 \cdot 10^4 s^4 \quad 4.66$$

in cui s è lo scorrimento espresso in mm e τ la tensione tangenziale di aderenza in MPa.

Anche Mirza e Houde sono giunti alla conclusione che la tensione di aderenza è dipendente dalla distanza della sezione in esame dalla fessura più vicina; tale variabilità, tuttavia, si perde per sezioni collocate oltre 7-10 cm dalla sezione di estremità del concio fessurato. Per sezioni collocate entro i primi 7-10 cm, il massimo valore della tensione di aderenza decresce progressivamente man mano che ci si avvicina alla sezione di estremità.

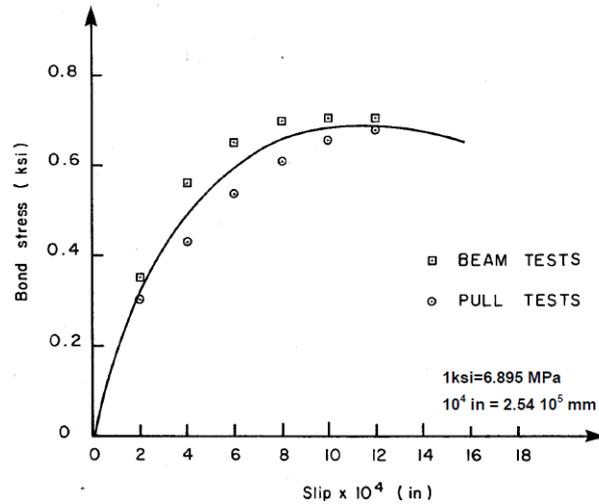


Figura 4.45: Diagramma τ - s in formulazione proposta da Mirza e Houde.

4.3.3.2. Il modello proposto

Il modello trattato nella presente tesi è stato arricchito mediante la sostituzione del legame tensione di aderenza - scorrimento locale esistente a livello di interfaccia di tipo non lineare proposto nel CEB-FIP MC 90, con un equivalente legame sempre non lineare scelto tra i tanti proposti da diversi autori, per le innumerevoli difficoltà di convergenza incontrate nell'integrazione numerica delle funzioni non lineari, dalle quali si ricavano le forze interne, utili ai fini della determinazione dei residui delle forze (un-balanced forces) e dei termini della matrice di rigidezza tangente.

Tali problematiche si sono riscontrate a causa della tangente verticale all'origine che presenta tale tipo di legge τ - s , corrispondendo tale situazione ad un valore infinito del modulo $G(s)$ da utilizzare nel calcolo della matrice di rigidezza tangente.

Al fine di risolvere i problemi numerici riscontrati, si è adottata la seguente legge della tensione di aderenza in funzione dello scorrimento:

$$\tau[S(x)] = \tau_{\max} \frac{\text{Log}[1 + 4 \tau_{\max} S(x)]}{\text{Log}[1 + 4 \tau_{\max} S_1]} \quad 4.67$$

che presenta un valore del modulo iniziale (a scorrimento nullo):

$$G_{\text{init}} = \frac{\partial}{\partial S(x)} \tau[S(x)] \Big|_{S(x)=0} \quad 4.68$$

elevato ma non infinito ed avendo indicato con S_1 il valore dello scorrimento per il quale si raggiunge la τ_{max} .

La Figura 4.46 ci permette di verificare che gli errori in termini di area sottesa dalle curve che rappresentano i due legami τ - S (in rosso quello tratto dal CEB-FIP MC 90 ed in verde quello logaritmico adottato nel presente lavoro) sono percentualmente abbastanza contenuti (circa 4%).

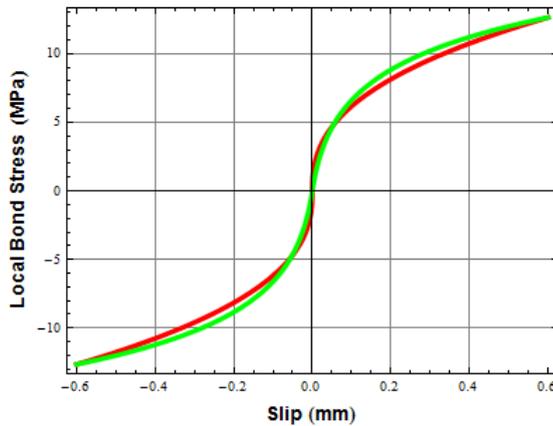


Figura 4.46: Local Bond Stress - Slip relationship adottata.

I tratti lineari del legame presentato nel CEB-FIP MC 90 [1993] continuano ad essere adottati anche nel presente lavoro.

Per completezza, si riporta la relazione che lega il modulo predetto G con lo scorrimento S :

$$G[S(x)] = \frac{\partial}{\partial S(x)} \tau[S(x)] = \frac{4 \tau_{\text{max}}^2}{\text{Log}[1 + 4 \tau_{\text{max}} S_1]} \frac{1}{1 + 4 \tau_{\text{max}} S(x)} \quad 4.69$$

Per confronto, il legame τ - S presentato in [49] è del tipo polinomiale (del terzo ordine in S). Nel caso di calcestruzzo non confinato, utilizzando i risultati sperimentali su provini cilindrici caricati assialmente a trazione (Doerr [1980]), esso si presenta della forma:

$$\tau[S(x)] = f_{ct} \left(3.28 \cdot 10^2 S(x) - 1.953 \cdot 10^4 S(x)^2 + 3.95 \cdot 10^5 S(x)^3 \right) [ksi] \quad 4.70$$

$$\text{con } \begin{cases} [S(x) [in]] \\ f_{ct} = 0.39 \text{ ksi } (2.7 \text{ Mpa}) \end{cases} \quad 4.71$$

per la quale il valore del modulo iniziale (a scorrimento nullo):

$$G_{\text{init}} = \frac{\partial}{\partial S(x)} \tau[S(x)] \Big|_{S(x)=0} = 3.28 \cdot 10^2 f_{ct} = 885.6 \frac{N}{mm^2} \quad 4.72$$

4.4. Funzioni di forma e geometria

Il campo di spostamenti all'interno dell'elemento, a partire dal quale si calcoleranno poi deformazioni e tensioni, è normalmente espresso mediante funzioni di forma utilizzate per approssimare il predetto campo degli spostamenti; si ricorda, a questo punto, come, in linea generale, la descrizione della cinematica dell'elemento mediante un numero finito di parametri comporti l'introduzione di vincoli cinematici, obbligando l'elemento a muoversi e deformarsi secondo le leggi imposte.

Di conseguenza, i risultati saranno sempre approssimati; il grado di approssimazione dipende dal numero di elementi utilizzati per modellare la struttura e dalla tipologia della funzione interpolante scelta per rappresentare il campo di spostamenti (ad esempio il grado del polinomio, nel caso di funzioni interpolanti di tipo polinomiale). Per garantire la convergenza dell'analisi al diminuire delle dimensioni dell'elemento, la funzione scelta per approssimare il campo di spostamenti dovrà obbedire a determinate regole e cioè:

- 1) Deve essere continua all'interno dell'elemento e possedere derivata sino all'ordine n richiesto dal particolare problema (ad esempio $n = 1$ per l'elemento asta o $n = 2$ per l'elemento trave inflessa, ecc.);
- 2) Deve essere in grado di rappresentare il moto rigido dell'elemento con una corrispondente energia di deformazione nulla;
- 3) Deve essere in grado di rappresentare uno stato di deformazione costante;

- 4) Deve avere continuità tra gli elementi, cioè non devono nascere, se non erano già presenti, discontinuità al contorno fra elementi adiacenti.

Inoltre, la funzione scelta dovrebbe essere geometricamente isotropa, cioè il campo di spostamenti dovrebbe essere invariante rispetto al sistema di riferimento e non presentare particolari direzioni preferenziali.

Se la funzione scelta soddisfa le condizioni 1, 2 e 3 si dice *completa*; se soddisfa la condizione 4 si dice *compatibile*. Una funzione *completa e compatibile* si dice *conforme*.

La compatibilità è automaticamente assicurata per gli elementi analizzati, perché il collegamento avviene solo attraverso i nodi.

Si può dimostrare che per avere convergenza monotona verso la risposta esatta un elemento deve essere *conforme*. Gli elementi che non rispettano la condizione 4 sono detti *incompatibili*; la convergenza si ha anche con tali elementi se l'incompatibilità diminuisce al diminuire delle dimensioni dell'elemento.

Per gli elementi monodimensionali studiati, la descrizione del campo di spostamenti è stata fatta sostanzialmente, mediante funzioni di forma, nel modo seguente.

Come già ampiamente discusso nel capitolo precedente, sia nel caso di elemento di lunghezza L (continuo elastico) soggetto a trazione EFE-TM (Elementary Finite Element - Tension Member), sia in quello soggetto a flessione EFE-FM (Elementary Finite Element - Flexural Member), le ipotesi assunte per la determinazione delle *Funzioni di Forma* a partire dalla geometria del problema, tratte dal Modello di Newmark et al. (1951) per travi composte acciaio-calcestruzzo a parziale interazione, sono:

- 1) Trave di Eulero-Bernoulli;
- 2) Assenza di flessione deviata;
- 3) Piccoli spostamenti e piccoli gradienti di spostamento;
- 4) Interazione parziale acciaio-calcestruzzo secondo approccio di (Newmark et al., 1951), sia nel DE-TM (Differential Element - Tension Member) sia nel DE-FM (Differential Element - Flexural Member), che si traduce nelle ulteriori ipotesi:

- a) Acciaio e calcestruzzo secondo teoria di Bernoulli e cioè assenza di shear strain (solo DE-FM);
- b) Spostamento verticale v in ogni sezione uguale per acciaio e calcestruzzo (solo DE-FM);
- c) Scorrimento all'interfaccia linearmente collegato alla tensione tangenziale.

Per ricavare le funzioni di forma nel caso di elemento soggetto a trazione, riportiamo le espressioni delle funzioni di spostamento (3.3) e (3.4):

$$u_s(x) = \frac{1}{1+n\rho} \left[c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} - \frac{\lambda}{6} x^3 - \frac{\gamma}{2} x^2 \right] + c_3 x + c_4 \quad 4.73$$

$$u_c(x) = -\frac{n\rho}{1+n\rho} \left[c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} + \frac{1}{6} \left[\frac{D_c \nabla q_c \alpha^2}{D_s G_o} - \lambda \right] x^3 + \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[\gamma + \frac{D_c q_{ci} \alpha^2}{D_s G_o} \right] x^2 \right] + c_5 x + c_6. \quad 4.74$$

Le predette relazioni valgono in forma incrementale, considerando nei passi di discretizzazione del percorso di carico - spostamento, i materiali calcestruzzo ed acciaio elastico lineari con moduli di elasticità normale tangente E_c ed E_s ; anche l'interfaccia sarà di tipo elastico lineare con modulo G_o .

Considerato che nella forma discretizzata, la relazione tra il vettore delle funzioni di spostamento e gli spostamenti nodali è espressa dal prodotto della matrice \mathbf{N} , che contiene nella prima riga le funzioni di forma dell'acciaio N_{is} e nella seconda quelle del calcestruzzo N_{ic} , per il vettore \mathbf{U} degli spostamenti nodali (3.16):

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}(x) \mathbf{U},$$

in forma estesa la precedente si scrive come:

$$u_s(x) = N_{sis}(x) u_{si} + N_{cis}(x) u_{ci} + N_{sjs}(x) u_{sj} + N_{cjs}(x) u_{cj} \quad 4.75$$

$$u_c(x) = N_{sic}(x) u_{si} + N_{cic}(x) u_{ci} + N_{sjc}(x) u_{sj} + N_{cjc}(x) u_{cj} \quad 4.76$$

Considerando solo la parte omogenea delle (4.73) e (4.74), di seguito, viene riportata una base delle soluzioni delle equazioni differenziali in $u_s(x)$ e $u_c(x)$:

$$\boldsymbol{\psi}(x) = \begin{bmatrix} e^{\alpha x} \\ e^{-\alpha x} \\ x \\ 1 \end{bmatrix} \quad 4.77$$

Posto

$$\alpha^2 = \pi D_s G_o \left(\frac{1}{E_s A_s} + \frac{1}{E_c A_c} \right) \quad 4.78$$

$$H = \pi D_s G_o \left(\frac{1}{E_s A_s} - \frac{1}{E_c A_c} \right) \quad 4.79$$

attraverso l'imposizione dell'identità con le precedenti (4.73) e (4.74), dopo alcune sostituzioni e rinumerando le costanti di integrazione, è possibile scrivere

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{H}{\alpha^2} + 1 & \frac{H}{\alpha^2} + 1 & 0 & 1 \\ \frac{H}{\alpha^2} - 1 & \frac{H}{\alpha^2} - 1 & 0 & 1 \\ \left(\frac{H}{\alpha^2} + 1 \right) e^{\alpha L} & \left(\frac{H}{\alpha^2} + 1 \right) e^{-\alpha L} & L & 1 \\ \left(\frac{H}{\alpha^2} - 1 \right) e^{\alpha L} & \left(\frac{H}{\alpha^2} - 1 \right) e^{-\alpha L} & L & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{si} \\ u_{ci} \\ u_{sj} \\ u_{cj} \end{bmatrix} \quad 4.80$$

ed in forma compatta

$$\mathbf{M} \mathbf{c} = \mathbf{b} \quad 4.81$$

Imponendo le condizioni al contorno e ponendo, dunque,

$$\mathbf{b}_{si} = \begin{bmatrix} u_{si}^{si} = 1 \\ u_{ci}^{si} = 0 \\ u_{sj}^{si} = 0 \\ u_{cj}^{si} = 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{ci} = \begin{bmatrix} u_{si}^{ci} = 0 \\ u_{ci}^{ci} = 1 \\ u_{sj}^{ci} = 0 \\ u_{cj}^{ci} = 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{sj} = \begin{bmatrix} u_{si}^{sj} = 0 \\ u_{ci}^{sj} = 0 \\ u_{sj}^{sj} = 1 \\ u_{cj}^{sj} = 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{b}_{cj} = \begin{bmatrix} u_{si}^{cj} = 0 \\ u_{ci}^{cj} = 0 \\ u_{sj}^{cj} = 0 \\ u_{cj}^{cj} = 1 \end{bmatrix} \quad 4.82$$

mediante la soluzione dei seguenti quattro problemi

$$\mathbf{c}_{si} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_{si} \quad \mathbf{c}_{ci} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_{ci} \quad \mathbf{c}_{sj} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_{sj} \quad \mathbf{c}_{cj} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_{cj} \quad 4.83$$

si ricavano le costanti che definiscono le espressioni esplicite delle funzioni di forma esponenziali dell'acciaio e del calcestruzzo:

$$N_{sis}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\alpha^2} + 1 \right) \left(c_{si1} e^{\alpha x} + c_{si2} e^{-\alpha x} \right) + \frac{1}{2} \left(c_{si3} x + c_{si4} \right) \quad 4.84$$

$$N_{sic}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\alpha^2} - 1 \right) \left(c_{si1} e^{\alpha x} + c_{si2} e^{-\alpha x} \right) + \frac{1}{2} \left(c_{si3} x + c_{si4} \right) \quad 4.85$$

$$N_{cis}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\alpha^2} + 1 \right) \left(c_{ci1} e^{\alpha x} + c_{ci2} e^{-\alpha x} \right) + \frac{1}{2} \left(c_{ci3} x + c_{ci4} \right) \quad 4.86$$

$$N_{cic}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\alpha^2} - 1 \right) \left(c_{ci1} e^{\alpha x} + c_{ci2} e^{-\alpha x} \right) + \frac{1}{2} \left(c_{ci3} x + c_{ci4} \right) \quad 4.87$$

$$N_{sjs}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\alpha^2} + 1 \right) \left(c_{sj1} e^{\alpha x} + c_{sj2} e^{-\alpha x} \right) + \frac{1}{2} \left(c_{sj3} x + c_{sj4} \right) \quad 4.88$$

$$N_{sjc}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\alpha^2} - 1 \right) \left(c_{sj1} e^{\alpha x} + c_{sj2} e^{-\alpha x} \right) + \frac{1}{2} \left(c_{sj3} x + c_{sj4} \right) \quad 4.89$$

$$N_{cjs}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\alpha^2} + 1 \right) \left(c_{cj1} e^{\alpha x} + c_{cj2} e^{-\alpha x} \right) + \frac{1}{2} \left(c_{cj3} x + c_{cj4} \right) \quad 4.90$$

$$N_{cjc}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\alpha^2} - 1 \right) \left(c_{cj1} e^{\alpha x} + c_{cj2} e^{-\alpha x} \right) + \frac{1}{2} \left(c_{cj3} x + c_{cj4} \right). \quad 4.91$$

Nelle espressioni dalla (4.84) alla (4.91) i primi due indici fanno riferimento allo spostamento unitario impresso, mentre il terzo si riferisce alle funzioni di forma degli spostamenti dell'acciaio (s) e del calcestruzzo (c); ad esempio, la

$$N_{sic}(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{H}{\alpha^2} - 1 \right) \left(c_{si1} e^{\alpha x} + c_{si2} e^{-\alpha x} \right) + \frac{1}{2} \left(c_{si3} x + c_{si4} \right)$$

rappresenta la funzione di forma degli spostamenti nel calcestruzzo per spostamento unitario impresso al primo nodo (si) della barra in acciaio.

Per completezza, si riportano anche le corrispondenti funzioni $S(x)$:

$$S(x) \Big|_{u_{s_i}=1} = u_s(x) - u_c(x) \Big|_{u_{s_i}=1} = N_{\text{sis}}(x) - N_{\text{sic}}(x) \quad 4.92$$

$$S(x) \Big|_{u_{c_i}=1} = u_s(x) - u_c(x) \Big|_{u_{c_i}=1} = N_{\text{cis}}(x) - N_{\text{cic}}(x) \quad 4.93$$

$$S(x) \Big|_{u_{s_j}=1} = u_s(x) - u_c(x) \Big|_{u_{s_j}=1} = N_{\text{sjis}}(x) - N_{\text{sjc}}(x) \quad 4.94$$

$$S(x) \Big|_{u_{c_j}=1} = u_s(x) - u_c(x) \Big|_{u_{c_j}=1} = N_{\text{cjis}}(x) - N_{\text{cjc}}(x) \quad 4.95$$

Sostituendo nelle espressioni dalla (4.84) alla (4.91) le soluzioni in forma chiusa dei problemi (4.83), si ottengono le formulazioni esplicite delle funzioni di forma esponenziali utilizzate per l'interpolazione della geometria e del campo di spostamento dell'acciaio e del calcestruzzo:

$$N_{\text{sis}}(x) = -\frac{\left(\frac{H}{\alpha^2} + 1\right)e^{x\alpha}}{2(e^{2L\alpha} - 1)} + \frac{\left(\frac{H}{\alpha^2} + 1\right)e^{2L\alpha - x\alpha}}{2(e^{2L\alpha} - 1)} + \frac{x(H - \alpha^2)}{2L\alpha^2} + \frac{\alpha^2 - H}{2\alpha^2} \quad 4.96$$

$$N_{\text{sic}}(x) = -\frac{\left(\frac{H}{\alpha^2} - 1\right)e^{x\alpha}}{2(e^{2L\alpha} - 1)} + \frac{\left(\frac{H}{\alpha^2} + 1\right)e^{2L\alpha - x\alpha}}{2(e^{2L\alpha} - 1)} + \frac{x(H - \alpha^2)}{2L\alpha^2} + \frac{\alpha^2 - H}{2\alpha^2} \quad 4.97$$

$$N_{\text{cis}}(x) = -\frac{\left(\frac{H}{\alpha^2} + 1\right)e^{x\alpha}}{2(e^{2L\alpha} - 1)} + \frac{\left(\frac{H}{\alpha^2} + 1\right)e^{2L\alpha - x\alpha}}{2(e^{2L\alpha} - 1)} + \frac{x(H - \alpha^2)}{2L\alpha^2} + \frac{\alpha^2 - H}{2\alpha^2} \quad 4.98$$

$$N_{\text{cic}}(x) = \frac{\left(\frac{H}{\alpha^2} - 1\right)e^{x\alpha}}{2(e^{2L\alpha} - 1)} - \frac{\left(\frac{H}{\alpha^2} - 1\right)e^{2L\alpha - x\alpha}}{2(e^{2L\alpha} - 1)} + \frac{x(-H - \alpha^2)}{2L\alpha^2} + \frac{\alpha^2 + H}{2\alpha^2} \quad 4.99$$

$$N_{\text{sjis}}(x) = -\frac{\left(\frac{H}{\alpha^2} + 1\right)e^{L\alpha - x\alpha}}{2(e^{2L\alpha} - 1)} + \frac{\left(\frac{H}{\alpha^2} + 1\right)e^{L\alpha + x\alpha}}{2(e^{2L\alpha} - 1)} + \frac{x(-H + \alpha^2)}{2L\alpha^2} \quad 4.100$$

$$N_{sjc}(x) = -\frac{\left(\frac{H}{\alpha^2} - 1\right) e^{L\alpha - x\alpha}}{2(e^{2L\alpha} - 1)} - \frac{\left(\frac{H}{\alpha^2} - 1\right) e^{L\alpha + x\alpha}}{2(e^{2L\alpha} - 1)} + \frac{x(-H + \alpha^2)}{2L\alpha^2} \quad 4.101$$

$$N_{cjs}(x) = \frac{\left(\frac{H}{\alpha^2} + 1\right) e^{L\alpha - x\alpha}}{2(e^{2L\alpha} - 1)} - \frac{\left(\frac{H}{\alpha^2} + 1\right) e^{L\alpha + x\alpha}}{2(e^{2L\alpha} - 1)} + \frac{x(H + \alpha^2)}{2L\alpha^2} \quad 4.102$$

$$N_{cjc}(x) = \frac{\left(\frac{H}{\alpha^2} - 1\right) e^{L\alpha - x\alpha}}{2(e^{2L\alpha} - 1)} - \frac{\left(\frac{H}{\alpha^2} - 1\right) e^{L\alpha + x\alpha}}{2(e^{2L\alpha} - 1)} + \frac{x(H + \alpha^2)}{2L\alpha^2}. \quad 4.103$$

Si riportano in Figura 4.47 e 4.48 i grafici relativi alle funzioni di forma per l'acciaio e per il calcestruzzo per un elemento monodimensionale soggetto a trazione di lunghezza $L = 1000$ mm e con una percentuale di armatura $\rho = 4.00\%$.

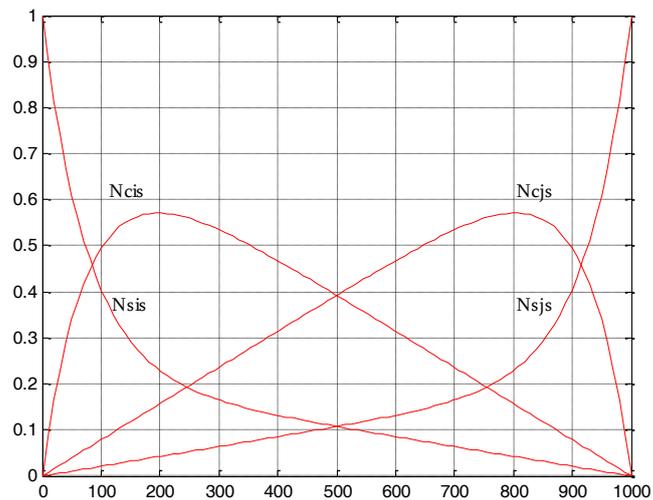


Figura 4.47: Funzioni di forma N_s elemento EFE-TM $\rho = 4.00\%$.

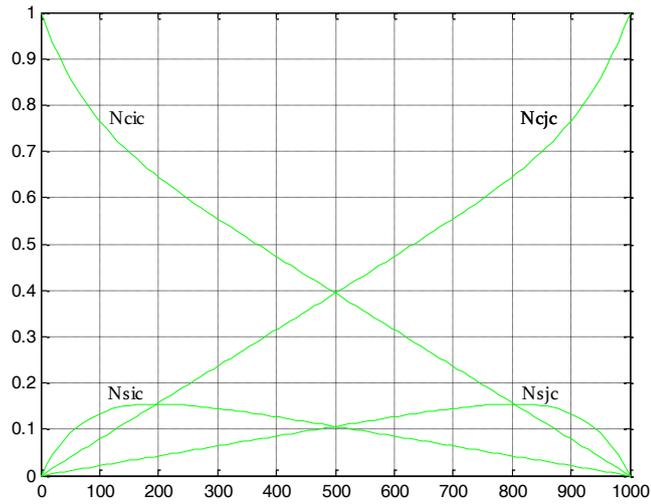


Figura 4.48: Funzioni di forma N_C elemento EFE-TM $\rho = 4.00\%$.

Nelle Figure dalla 4.49 alla 4.56 viene evidenziata la dipendenza dell'andamento delle funzioni di forma dalla percentuale di armatura.

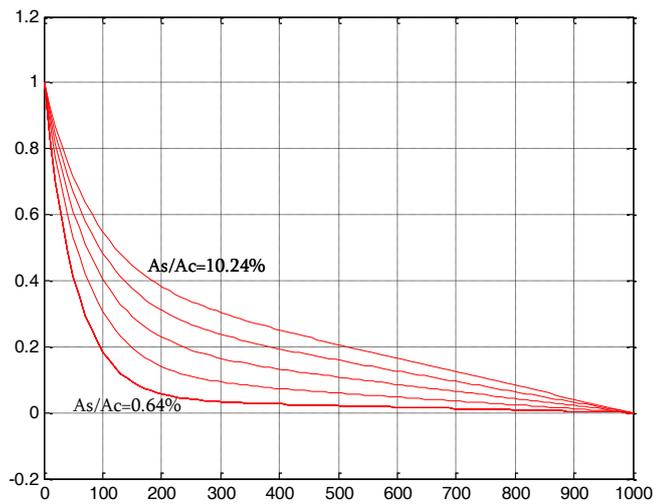


Figura 4.49: Funzione di forma N_{Sis} elemento EFE-TM al variare di ρ .

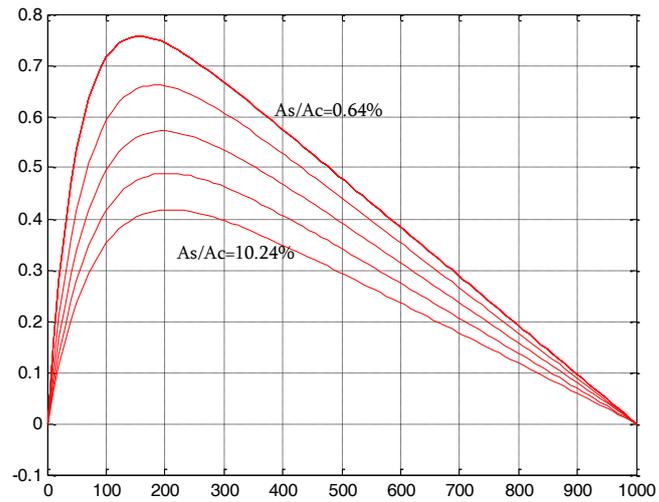


Figura 4.50: Funzione di forma N_{Cis} elemento EFE-TM al variare di ρ .

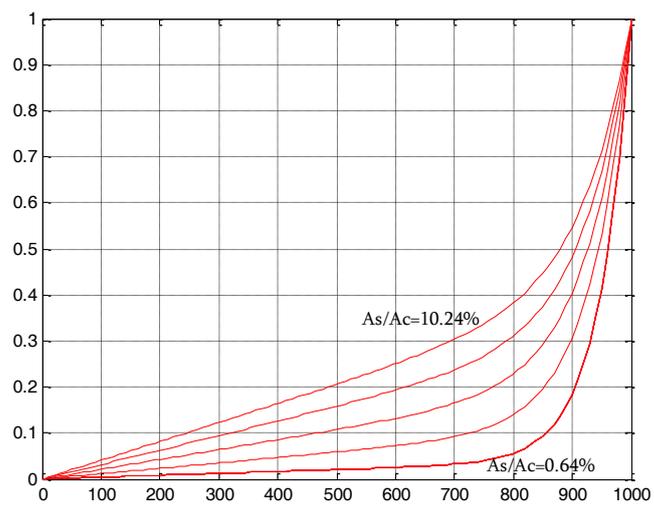


Figura 4.51: Funzione di forma N_{Sjs} elemento EFE-TM al variare di ρ .

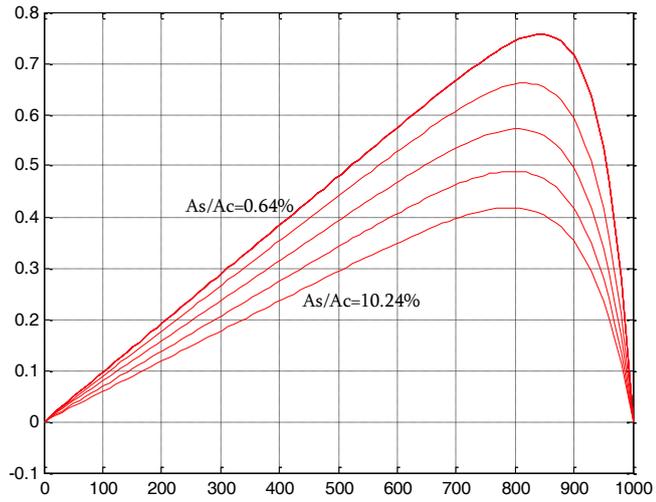


Figura 4.52: Funzione di forma N_{Cjs} elemento EFE-TM al variare di ρ .

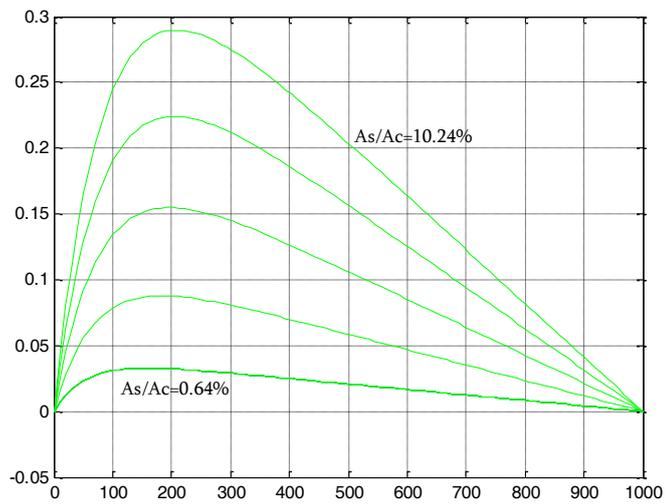


Figura 4.53: Funzione di forma N_{Sic} elemento EFE-TM al variare di ρ .

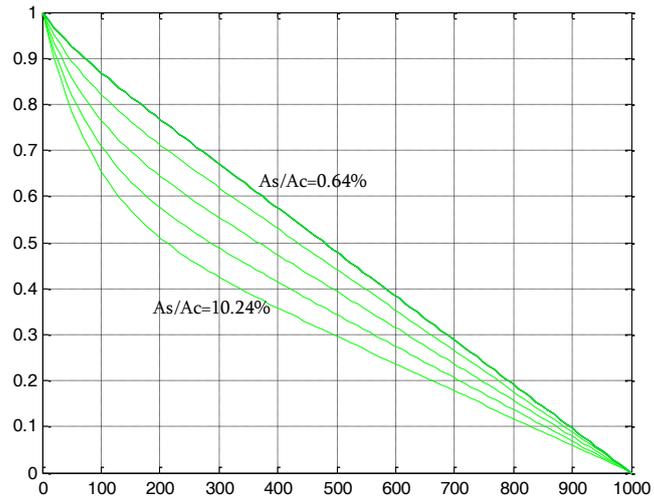


Figura 4.54: Funzione di forma N_{Cic} elemento EFE-TM al variare di ρ .

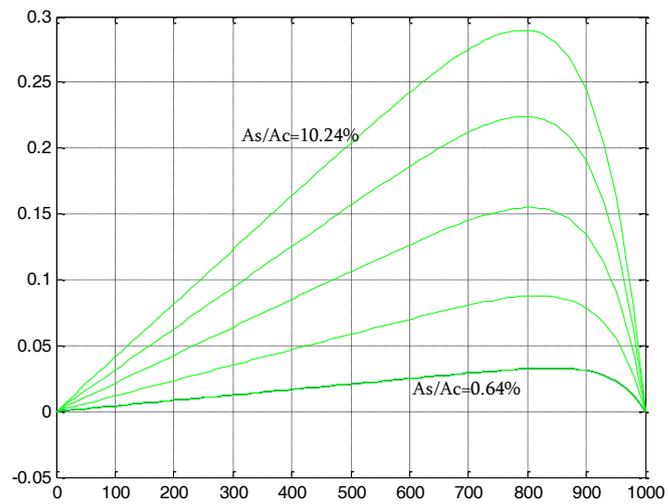


Figura 4.55: Funzione di forma N_{SjC} elemento EFE-TM al variare di ρ .

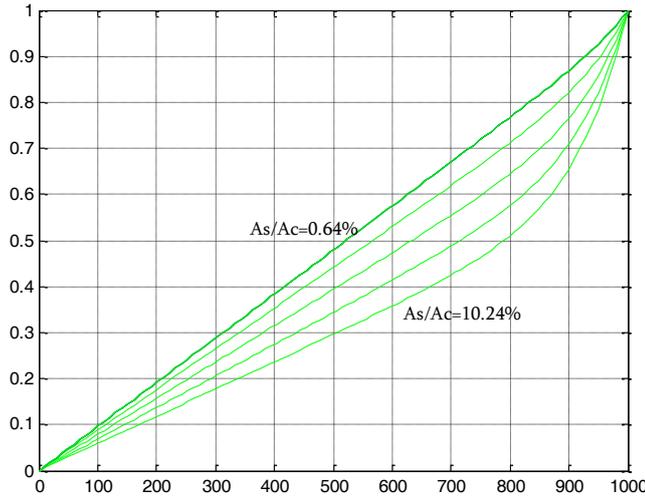


Figura 4.56: Funzione di forma N_{CjC} elemento EFE-TM al variare di ρ .

Per ricavare le funzioni di forma nel caso di elemento soggetto a flessione, riportiamo le espressioni delle funzioni di spostamento generalizzato (3.29), (3.30), (3.31), (3.32) e (3.33):

$$u_{ST}(x) = -\frac{1}{2} \frac{\beta_{ST} \alpha_C^2 x^2}{\alpha_T^2 \alpha_{SC} + \alpha_C^2 \alpha_{ST}} c_1 + c_2 \frac{\beta_{ST}}{\beta_1^2} e^{-\beta_1 x} + c_3 \frac{\beta_{ST}}{\beta_1^2} e^{\beta_1 x} + c_4 \frac{\beta_{ST}}{\beta_2^2} e^{-\beta_2 x} + c_5 \frac{\beta_{ST}}{\beta_2^2} e^{\beta_2 x} + c_6 x + c_7 \quad 4.104$$

$$u_{SC}(x) = \frac{1}{2} \frac{\beta_{SC} \alpha_T^2 x^2}{\alpha_T^2 \alpha_{SC} + \alpha_C^2 \alpha_{ST}} c_1 + c_2 \frac{\beta_{SC}}{\beta_1^2} \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{ST})}{\alpha_C^2 - \alpha_{SC}} e^{-\beta_1 x} + c_3 \frac{\beta_{SC}}{\beta_1^2} \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{ST})}{\alpha_C^2 - \alpha_{SC}} e^{\beta_1 x} + c_4 \frac{\beta_{SC}}{\beta_2^2} \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{ST})}{\alpha_C^2 - \alpha_{SC}} e^{-\beta_2 x} + c_5 \frac{\beta_{SC}}{\beta_2^2} \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{ST})}{\alpha_C^2 - \alpha_{SC}} e^{\beta_2 x} + c_8 x + c_9 \quad 4.105$$

$$\begin{aligned}
u_{\text{co}}(x) = & c_1 \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\text{SC}} \alpha_{\text{T}}^2 - \beta_{\text{ST}} \alpha_{\text{C}}^2}{\alpha_{\text{T}}^2 \alpha_{\text{SC}} + \alpha_{\text{C}}^2 \alpha_{\text{ST}}} \frac{x^2}{2} - \frac{\alpha_{\text{T}}^2 - \alpha_{\text{C}}^2}{\alpha_{\text{T}}^2 \alpha_{\text{SC}} + \alpha_{\text{C}}^2 \alpha_{\text{ST}}} \right) + \\
& + c_2 \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\text{ST}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} + \frac{\beta_{\text{SC}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{ST}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{SC}}} \right) e^{-\beta_1 x} + \\
& + c_3 \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\text{ST}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} + \frac{\beta_{\text{SC}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{ST}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{SC}}} \right) e^{\beta_1 x} + \\
& + c_4 \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\text{ST}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} + \frac{\beta_{\text{SC}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{ST}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{SC}}} \right) e^{-\beta_2 x} + \\
& + c_5 \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\text{ST}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} + \frac{\beta_{\text{SC}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{ST}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{SC}}} \right) e^{\beta_2 x} + \\
& + c_6 \frac{1}{2} x + c_7 \frac{1}{2} + c_8 \frac{1}{2} x + c_9 \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{4.106}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = & c_1 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} \left(- \frac{\beta_{\text{SC}} \alpha_{\text{T}}^2 + \beta_{\text{ST}} \alpha_{\text{C}}^2}{\alpha_{\text{T}}^2 \alpha_{\text{SC}} + \alpha_{\text{C}}^2 \alpha_{\text{ST}}} \frac{x^2}{2} + \frac{\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{C}}^2}{\alpha_{\text{T}}^2 \alpha_{\text{SC}} + \alpha_{\text{C}}^2 \alpha_{\text{ST}}} \right) + \\
& + c_2 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} \left(\frac{\beta_{\text{ST}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} - \frac{\beta_{\text{SC}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{ST}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{SC}}} \right) e^{-\beta_1 x} + \\
& + c_3 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} \left(\frac{\beta_{\text{ST}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} - \frac{\beta_{\text{SC}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{ST}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{SC}}} \right) e^{\beta_1 x} + \\
& + c_4 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} \left(\frac{\beta_{\text{ST}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} - \frac{\beta_{\text{SC}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{ST}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{SC}}} \right) e^{-\beta_2 x} + \\
& + c_5 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} \left(\frac{\beta_{\text{ST}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} - \frac{\beta_{\text{SC}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{ST}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{SC}}} \right) e^{\beta_2 x} + \\
& + c_6 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} x + c_7 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} - c_8 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} x - c_9 \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}}
\end{aligned} \tag{4.107}$$

$$\begin{aligned}
v(x) = & c_1 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} \left(-\frac{\beta_{sc} \alpha_T^2 + \beta_{st} \alpha_c^2}{\alpha_T^2 \alpha_{sc} + \alpha_c^2 \alpha_{st}} \frac{x^3}{6} + \frac{\alpha_T^2 + \alpha_c^2}{\alpha_T^2 \alpha_{sc} + \alpha_c^2 \alpha_{st}} x \right) + \\
& + c_2 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} \left(-\frac{\beta_{st} - \beta_1^2}{\beta_1^3} + \frac{\beta_{sc} - \beta_1^2}{\beta_1^3} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{-\beta_1 x} + \\
& + c_3 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} \left(\frac{\beta_{st} - \beta_1^2}{\beta_1^3} - \frac{\beta_{sc} - \beta_1^2}{\beta_1^3} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{\beta_1 x} + \\
& + c_4 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} \left(-\frac{\beta_{st} - \beta_2^2}{\beta_2^3} + \frac{\beta_{sc} - \beta_2^2}{\beta_2^3} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{-\beta_2 x} + \\
& + c_5 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} \left(\frac{\beta_{st} - \beta_2^2}{\beta_2^3} - \frac{\beta_{sc} - \beta_2^2}{\beta_2^3} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{\beta_2 x} + \\
& + c_6 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} \frac{x^2}{2} + c_7 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} x - c_8 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} \frac{x^2}{2} - c_9 \frac{1}{2 \bar{y}_{sf}} x + c_{10}
\end{aligned} \tag{4.108}$$

Anche in questo caso, le predette relazioni valgono in forma incrementale, considerando nei passi di discretizzazione del percorso di carico - spostamento, i materiali calcestruzzo ed acciaio elastico lineari con moduli di elasticità normale tangente E_c ed E_s ; anche l'interfaccia sarà di tipo elastico lineare con modulo G_0 .

Considerato che nella forma discretizzata, la relazione tra il vettore delle funzioni di spostamento generalizzato e gli spostamenti nodali generalizzati è espressa dal prodotto della matrice \mathbf{N} , che contiene nella prima riga le funzioni di forma dell'acciaio inferiore N_{ist} , nella seconda quelle dell'acciaio superiore N_{isc} , nella terza quello dello spostamento assiale della sezione del calcestruzzo N_{ico} , nella quarta quelle della rotazione della sezione in calcestruzzo $N_{i\phi}$ e nella quinta quelle dello spostamento verticale della linea d'asse baricentrica dell'elemento N_{iv} , per il vettore \mathbf{U} degli spostamenti nodali generalizzati (3.41):

$$\mathbf{u}(x) = \mathbf{N}(x) \mathbf{U},$$

in forma estesa la precedente si scrive come:

$$\begin{aligned}
u_{st}(x) = & N_{stri}(x) u_{sti} + N_{scist}(x) u_{sci} + N_{coist}(x) u_{coi} + N_{\phi ist}(x) \varphi_i + \\
& + N_{vist}(x) v_i + N_{stjst}(x) u_{stj} + N_{scjst}(x) u_{scj} + N_{cojst}(x) u_{coj} + \\
& + N_{\phi jst}(x) \varphi_j + N_{vjst}(x) v_j
\end{aligned} \tag{4.109}$$

$$\begin{aligned}
u_{sc}(x) = & N_{stisc}(x) u_{sti} + N_{scisc}(x) u_{sci} + N_{coisc}(x) u_{coi} + N_{\phi isc}(x) \varphi_i + \\
& + N_{visc}(x) v_i + N_{stjsc}(x) u_{stj} + N_{scjsc}(x) u_{scj} + N_{cojsc}(x) u_{coj} + \\
& + N_{\phi jsc}(x) \varphi_j + N_{vjsc}(x) v_j
\end{aligned} \quad 4.110$$

$$\begin{aligned}
u_{co}(x) = & N_{stico}(x) u_{sti} + N_{scico}(x) u_{sci} + N_{coico}(x) u_{coi} + N_{\phi ico}(x) \varphi_i + \\
& + N_{vico}(x) v_i + N_{stjco}(x) u_{stj} + N_{scjco}(x) u_{scj} + N_{cojco}(x) u_{coj} + \\
& + N_{\phi jco}(x) \varphi_j + N_{vjco}(x) v_j
\end{aligned} \quad 4.111$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = & N_{st\phi}(x) u_{sti} + N_{sc\phi}(x) u_{sci} + N_{co\phi}(x) u_{coi} + N_{\phi\phi}(x) \varphi_i + \\
& + N_{v\phi}(x) v_i + N_{stj\phi}(x) u_{stj} + N_{scj\phi}(x) u_{scj} + N_{coj\phi}(x) u_{coj} + \\
& + N_{\phi j\phi}(x) \varphi_j + N_{vj\phi}(x) v_j
\end{aligned} \quad 4.112$$

$$\begin{aligned}
v(x) = & N_{stiv}(x) u_{sti} + N_{sciv}(x) u_{sci} + N_{coiv}(x) u_{coi} + N_{\phi iv}(x) \varphi_i + \\
& + N_{viv}(x) v_i + N_{stjv}(x) u_{stj} + N_{scjv}(x) u_{scj} + N_{cojv}(x) u_{coj} + \\
& + N_{\phi jv}(x) \varphi_j + N_{vjv}(x) v_j
\end{aligned} \quad 4.113$$

Considerando solo la parte omogenea delle (4.109), (4.110), (4.111), (4.112) e (4.113), di seguito, vengono riportate le base delle soluzioni delle equazioni differenziali in $u_{st}(x)$, $u_{sc}(x)$, $u_{co}(x)$, $\varphi(x)$ e $v(x)$:

$$\begin{aligned}
\Psi_{st}(x) = & \left[-\frac{1}{2} \frac{\beta_{st} \alpha_c^2 x^2}{\alpha_t^2 \alpha_{sc} + \alpha_c^2 \alpha_{st}}, \frac{\beta_{st}}{\beta_1^2} e^{-\beta_1 x}, \frac{\beta_{st}}{\beta_1^2} e^{\beta_1 x}, \right. \\
& \left. \frac{\beta_{st}}{\beta_2^2} e^{-\beta_2 x}, \frac{\beta_{st}}{\beta_2^2} e^{\beta_2 x}, x, 1, 0, 0, 0 \right]
\end{aligned} \quad 4.114$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{sc}(x) = & \left[\frac{1}{2} \frac{\beta_{sc} \alpha_t^2 x^2}{\alpha_t^2 \alpha_{sc} + \alpha_c^2 \alpha_{st}}, \frac{\beta_{sc}}{\beta_1^2} \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_t^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} e^{-\beta_1 x}, \right. \\
& \frac{\beta_{sc}}{\beta_1^2} \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_t^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} e^{\beta_1 x}, \frac{\beta_{sc}}{\beta_2^2} \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_t^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} e^{-\beta_2 x}, \\
& \left. \frac{\beta_{sc}}{\beta_2^2} \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_t^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} e^{\beta_2 x}, 0, 0, x, 1, 0 \right]
\end{aligned} \quad 4.115$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{\text{co}}(x) = & \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\text{SC}} \alpha_{\text{T}}^2 - \beta_{\text{ST}} \alpha_{\text{C}}^2}{\alpha_{\text{T}}^2 \alpha_{\text{SC}} + \alpha_{\text{C}}^2 \alpha_{\text{ST}}} \frac{x^2}{2} - \frac{\alpha_{\text{T}}^2 - \alpha_{\text{C}}^2}{\alpha_{\text{T}}^2 \alpha_{\text{SC}} + \alpha_{\text{C}}^2 \alpha_{\text{ST}}} \right), \right. \\
& \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\text{ST}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} + \frac{\beta_{\text{SC}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{ST}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{SC}}} \right) e^{-\beta_1 x}, \\
& \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\text{ST}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} + \frac{\beta_{\text{SC}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{ST}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{SC}}} \right) e^{\beta_1 x}, \\
& \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\text{ST}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} + \frac{\beta_{\text{SC}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{ST}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{SC}}} \right) e^{-\beta_2 x}, \\
& \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{\text{ST}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} + \frac{\beta_{\text{SC}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{ST}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{SC}}} \right) e^{\beta_2 x}, \\
& \left. \frac{1}{2} x, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} x, \frac{1}{2}, 0 \right]
\end{aligned} \tag{4.116}$$

$$\begin{aligned}
\Psi_{\Phi}(x) = & \left[\frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} \left(- \frac{\beta_{\text{SC}} \alpha_{\text{T}}^2 + \beta_{\text{ST}} \alpha_{\text{C}}^2}{\alpha_{\text{T}}^2 \alpha_{\text{SC}} + \alpha_{\text{C}}^2 \alpha_{\text{ST}}} \frac{x^2}{2} + \frac{\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{C}}^2}{\alpha_{\text{T}}^2 \alpha_{\text{SC}} + \alpha_{\text{C}}^2 \alpha_{\text{ST}}} \right), \right. \\
& \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} \left(\frac{\beta_{\text{ST}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} - \frac{\beta_{\text{SC}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{ST}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{SC}}} \right) e^{-\beta_1 x}, \\
& \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} \left(\frac{\beta_{\text{ST}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} - \frac{\beta_{\text{SC}} - \beta_1^2}{\beta_1^2} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{ST}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{SC}}} \right) e^{\beta_1 x}, \\
& \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} \left(\frac{\beta_{\text{ST}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} - \frac{\beta_{\text{SC}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{ST}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{SC}}} \right) e^{-\beta_2 x}, \\
& \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} \left(\frac{\beta_{\text{ST}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} - \frac{\beta_{\text{SC}} - \beta_2^2}{\beta_2^2} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_{\text{T}}^2 + \alpha_{\text{ST}})}{\alpha_{\text{C}}^2 - \alpha_{\text{SC}}} \right) e^{\beta_2 x}, \\
& \left. \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} x, \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}}, - \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}} x, - \frac{1}{2 \bar{y}_{\text{sf}}}, 0 \right]
\end{aligned} \tag{4.117}$$

$$\begin{aligned}
 \Psi_v(x) = & \left[\frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \left(-\frac{\beta_{sc}\alpha_T^2 + \beta_{st}\alpha_c^2}{\alpha_T^2\alpha_{sc} + \alpha_c^2\alpha_{st}} \frac{x^3}{6} + \frac{\alpha_T^2 + \alpha_c^2}{\alpha_T^2\alpha_{sc} + \alpha_c^2\alpha_{st}} x \right), \right. \\
 & \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \left(-\frac{\beta_{st} - \beta_1^2}{\beta_1^3} + \frac{\beta_{sc} - \beta_1^2}{\beta_1^3} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{-\beta_1 x}, \\
 & \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \left(\frac{\beta_{st} - \beta_1^2}{\beta_1^3} - \frac{\beta_{sc} - \beta_1^2}{\beta_1^3} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{\beta_1 x} \\
 & \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \left(-\frac{\beta_{st} - \beta_2^2}{\beta_2^3} + \frac{\beta_{sc} - \beta_2^2}{\beta_2^3} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{-\beta_2 x}, \\
 & \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \left(\frac{\beta_{st} - \beta_2^2}{\beta_2^3} - \frac{\beta_{sc} - \beta_2^2}{\beta_2^3} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{\beta_2 x}, \\
 & \left. \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \frac{x^2}{2}, \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} x, -\frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \frac{x^2}{2}, -\frac{1}{2\bar{y}_{sf}} x, 1 \right].
 \end{aligned}
 \tag{4.118}$$

attraverso l'imposizione dell'identità con le precedenti (4.73) e (4.74), dopo alcune sostituzioni e rinumerando le costanti di integrazione, è possibile scrivere in forma compatta

$$\mathbf{M}\mathbf{c} = \mathbf{b}
 \tag{4.119}$$

in cui

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \Psi_{st}(0) \\ \Psi_{sc}(0) \\ \Psi_{co}(0) \\ \Psi_{\phi}(0) \\ \Psi_v(0) \\ \Psi_{st}(L) \\ \Psi_{sc}(L) \\ \Psi_{co}(L) \\ \Psi_{\phi}(L) \\ \Psi_v(L) \end{bmatrix}
 \tag{4.120}$$

Imponendo le condizioni al contorno e ponendo, dunque,

$$\begin{array}{c}
 \mathbf{b}_{\text{sri}} = \begin{bmatrix} u_{\text{sri}}^{\text{sri}} = 1 \\ u_{\text{sci}}^{\text{sri}} = 0 \\ u_{\text{coi}}^{\text{sri}} = 0 \\ \varphi_1^{\text{sri}} = 0 \\ v_i^{\text{sri}} = 0 \\ u_{\text{stj}}^{\text{sri}} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\text{sri}} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\text{sri}} = 0 \\ \varphi_j^{\text{sri}} = 0 \\ v_j^{\text{sri}} = 0 \end{bmatrix} \quad
 \mathbf{b}_{\text{sci}} = \begin{bmatrix} u_{\text{sri}}^{\text{sci}} = 0 \\ u_{\text{sci}}^{\text{sci}} = 1 \\ u_{\text{coi}}^{\text{sci}} = 0 \\ \varphi_1^{\text{sci}} = 0 \\ v_i^{\text{sci}} = 0 \\ u_{\text{stj}}^{\text{sci}} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\text{sci}} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\text{sci}} = 0 \\ \varphi_j^{\text{sci}} = 0 \\ v_j^{\text{sci}} = 0 \end{bmatrix} \quad
 \mathbf{b}_{\text{coi}} = \begin{bmatrix} u_{\text{sri}}^{\text{coi}} = 0 \\ u_{\text{sci}}^{\text{coi}} = 0 \\ u_{\text{coi}}^{\text{coi}} = 1 \\ \varphi_1^{\text{coi}} = 0 \\ v_i^{\text{coi}} = 0 \\ u_{\text{stj}}^{\text{coi}} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\text{coi}} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\text{coi}} = 0 \\ \varphi_j^{\text{coi}} = 0 \\ v_j^{\text{coi}} = 0 \end{bmatrix} \quad
 \mathbf{b}_{\varphi_i} = \begin{bmatrix} u_{\text{sri}}^{\varphi_i} = 0 \\ u_{\text{sci}}^{\varphi_i} = 0 \\ u_{\text{coi}}^{\varphi_i} = 0 \\ \varphi_1^{\varphi_i} = 1 \\ v_i^{\varphi_i} = 0 \\ u_{\text{stj}}^{\varphi_i} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\varphi_i} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\varphi_i} = 0 \\ \varphi_j^{\varphi_i} = 0 \\ v_j^{\varphi_i} = 0 \end{bmatrix} \quad
 \mathbf{b}_{\text{vi}} = \begin{bmatrix} u_{\text{sri}}^{\text{vi}} = 0 \\ u_{\text{sci}}^{\text{vi}} = 0 \\ u_{\text{coi}}^{\text{vi}} = 0 \\ \varphi_1^{\text{vi}} = 0 \\ v_i^{\text{vi}} = 1 \\ u_{\text{stj}}^{\text{vi}} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\text{vi}} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\text{vi}} = 0 \\ \varphi_j^{\text{vi}} = 0 \\ v_j^{\text{vi}} = 0 \end{bmatrix} \\
 \\
 \mathbf{b}_{\text{stj}} = \begin{bmatrix} u_{\text{sri}}^{\text{stj}} = 0 \\ u_{\text{sci}}^{\text{stj}} = 0 \\ u_{\text{coi}}^{\text{stj}} = 0 \\ \varphi_1^{\text{stj}} = 0 \\ v_i^{\text{stj}} = 0 \\ u_{\text{stj}}^{\text{stj}} = 1 \\ u_{\text{coj}}^{\text{stj}} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\text{stj}} = 0 \\ \varphi_j^{\text{stj}} = 0 \\ v_j^{\text{stj}} = 0 \end{bmatrix} \quad
 \mathbf{b}_{\text{scj}} = \begin{bmatrix} u_{\text{sri}}^{\text{scj}} = 0 \\ u_{\text{sci}}^{\text{scj}} = 0 \\ u_{\text{coi}}^{\text{scj}} = 0 \\ \varphi_1^{\text{scj}} = 0 \\ v_i^{\text{scj}} = 0 \\ u_{\text{stj}}^{\text{scj}} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\text{scj}} = 1 \\ u_{\text{coj}}^{\text{scj}} = 0 \\ \varphi_j^{\text{scj}} = 0 \\ v_j^{\text{scj}} = 0 \end{bmatrix} \quad
 \mathbf{b}_{\text{coj}} = \begin{bmatrix} u_{\text{sri}}^{\text{coj}} = 0 \\ u_{\text{sci}}^{\text{coj}} = 0 \\ u_{\text{coi}}^{\text{coj}} = 0 \\ \varphi_1^{\text{coj}} = 0 \\ v_i^{\text{coj}} = 0 \\ u_{\text{stj}}^{\text{coj}} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\text{coj}} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\text{coj}} = 1 \\ \varphi_j^{\text{coj}} = 0 \\ v_j^{\text{coj}} = 0 \end{bmatrix} \quad
 \mathbf{b}_{\varphi_j} = \begin{bmatrix} u_{\text{sri}}^{\varphi_j} = 0 \\ u_{\text{sci}}^{\varphi_j} = 0 \\ u_{\text{coi}}^{\varphi_j} = 0 \\ \varphi_1^{\varphi_j} = 0 \\ v_i^{\varphi_j} = 0 \\ u_{\text{stj}}^{\varphi_j} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\varphi_j} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\varphi_j} = 0 \\ \varphi_j^{\varphi_j} = 1 \\ v_j^{\varphi_j} = 0 \end{bmatrix} \quad
 \mathbf{b}_{\text{vj}} = \begin{bmatrix} u_{\text{sri}}^{\text{vj}} = 0 \\ u_{\text{sci}}^{\text{vj}} = 0 \\ u_{\text{coi}}^{\text{vj}} = 0 \\ \varphi_1^{\text{vj}} = 0 \\ v_i^{\text{vj}} = 0 \\ u_{\text{stj}}^{\text{vj}} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\text{vj}} = 0 \\ u_{\text{coj}}^{\text{vj}} = 0 \\ \varphi_j^{\text{vj}} = 0 \\ v_j^{\text{vj}} = 1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

mediante la soluzione dei seguenti dieci problemi (4.121)

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{c}_{\text{sri}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_{\text{sri}} \quad \mathbf{c}_{\text{sci}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_{\text{sci}} \quad \mathbf{c}_{\text{coi}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_{\text{coi}} \quad \mathbf{c}_{\varphi_i} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_{\varphi_i} \quad \mathbf{c}_{\text{vi}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_{\text{vi}} \\
 \mathbf{c}_{\text{stj}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_{\text{stj}} \quad \mathbf{c}_{\text{scj}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_{\text{scj}} \quad \mathbf{c}_{\text{coj}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_{\text{coj}} \quad \mathbf{c}_{\varphi_j} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_{\varphi_j} \quad \mathbf{c}_{\text{vj}} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{b}_{\text{vj}}
 \end{array}$$

si ricavano le costanti che definiscono le espressioni esplicite delle funzioni di forma esponenziali dell'acciaio e del calcestruzzo:

$$\begin{aligned}
 N_{STiST}(x) &= \Psi_{ST}(x) \cdot \mathbf{c}_{STi} \\
 N_{ScIST}(x) &= \Psi_{ST}(x) \cdot \mathbf{c}_{Sci} \\
 N_{CoIST}(x) &= \Psi_{ST}(x) \cdot \mathbf{c}_{CoI} \\
 N_{\phi iST}(x) &= \Psi_{ST}(x) \cdot \mathbf{c}_{\phi i} \\
 N_{viST}(x) &= \Psi_{ST}(x) \cdot \mathbf{c}_{vi} \\
 N_{STjST}(x) &= \Psi_{ST}(x) \cdot \mathbf{c}_{STj} \\
 N_{ScjST}(x) &= \Psi_{ST}(x) \cdot \mathbf{c}_{Scj} \\
 N_{CojST}(x) &= \Psi_{ST}(x) \cdot \mathbf{c}_{Coj} \\
 N_{\phi jST}(x) &= \Psi_{ST}(x) \cdot \mathbf{c}_{\phi j} \\
 N_{vjST}(x) &= \Psi_{ST}(x) \cdot \mathbf{c}_{vj}
 \end{aligned}
 \tag{4.122}$$

$$\begin{aligned}
 N_{STisc}(x) &= \Psi_{sc}(x) \cdot \mathbf{c}_{STi} \\
 N_{Scisc}(x) &= \Psi_{sc}(x) \cdot \mathbf{c}_{Sci} \\
 N_{Coisc}(x) &= \Psi_{sc}(x) \cdot \mathbf{c}_{CoI} \\
 N_{\phi isc}(x) &= \Psi_{sc}(x) \cdot \mathbf{c}_{\phi i} \\
 N_{visc}(x) &= \Psi_{sc}(x) \cdot \mathbf{c}_{vi} \\
 N_{STjsc}(x) &= \Psi_{sc}(x) \cdot \mathbf{c}_{STj} \\
 N_{Scjsc}(x) &= \Psi_{sc}(x) \cdot \mathbf{c}_{Scj} \\
 N_{Cojsc}(x) &= \Psi_{sc}(x) \cdot \mathbf{c}_{Coj} \\
 N_{\phi jsc}(x) &= \Psi_{sc}(x) \cdot \mathbf{c}_{\phi j} \\
 N_{vjsc}(x) &= \Psi_{sc}(x) \cdot \mathbf{c}_{vj}
 \end{aligned}
 \tag{4.123}$$

$$\begin{aligned}
N_{\text{stico}}(x) &= \Psi_{\text{co}}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{stri}} \\
N_{\text{scico}}(x) &= \Psi_{\text{co}}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{sci}} \\
N_{\text{coico}}(x) &= \Psi_{\text{co}}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{coi}} \\
N_{\text{fico}}(x) &= \Psi_{\text{co}}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{fi}} \\
N_{\text{vico}}(x) &= \Psi_{\text{co}}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{vi}} \\
N_{\text{stjco}}(x) &= \Psi_{\text{co}}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{stj}} \\
N_{\text{scjco}}(x) &= \Psi_{\text{co}}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{scj}} \\
N_{\text{cojco}}(x) &= \Psi_{\text{co}}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{coj}} \\
N_{\text{fjco}}(x) &= \Psi_{\text{co}}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{fj}} \\
N_{\text{vjco}}(x) &= \Psi_{\text{co}}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{vj}}
\end{aligned}
\tag{4.124}$$

$$\begin{aligned}
N_{\text{stri}\varphi}(x) &= \Psi_{\varphi}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{stri}} \\
N_{\text{sci}\varphi}(x) &= \Psi_{\varphi}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{sci}} \\
N_{\text{coi}\varphi}(x) &= \Psi_{\varphi}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{coi}} \\
N_{\text{fi}\varphi}(x) &= \Psi_{\varphi}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{fi}} \\
N_{\text{vi}\varphi}(x) &= \Psi_{\varphi}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{vi}} \\
N_{\text{stj}\varphi}(x) &= \Psi_{\varphi}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{stj}} \\
N_{\text{scj}\varphi}(x) &= \Psi_{\varphi}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{scj}} \\
N_{\text{coj}\varphi}(x) &= \Psi_{\varphi}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{coj}} \\
N_{\text{fj}\varphi}(x) &= \Psi_{\varphi}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{fj}} \\
N_{\text{vj}\varphi}(x) &= \Psi_{\varphi}(x) \cdot \mathbf{c}_{\text{vj}}
\end{aligned}
\tag{4.125}$$

$$\begin{aligned}
N_{stiv}(x) &= \Psi_v(x) \cdot \mathbf{c}_{sti} \\
N_{sciv}(x) &= \Psi_v(x) \cdot \mathbf{c}_{sci} \\
N_{coiv}(x) &= \Psi_v(x) \cdot \mathbf{c}_{coi} \\
N_{\phi iv}(x) &= \Psi_v(x) \cdot \mathbf{c}_{\phi i} \\
N_{v iv}(x) &= \Psi_v(x) \cdot \mathbf{c}_{vi} \\
N_{stjv}(x) &= \Psi_v(x) \cdot \mathbf{c}_{stj} \\
N_{scjv}(x) &= \Psi_v(x) \cdot \mathbf{c}_{scj} \\
N_{cojv}(x) &= \Psi_v(x) \cdot \mathbf{c}_{coj} \\
N_{\phi jv}(x) &= \Psi_v(x) \cdot \mathbf{c}_{\phi j} \\
N_{vjv}(x) &= \Psi_v(x) \cdot \mathbf{c}_{vj}.
\end{aligned}
\tag{4.126}$$

Nelle espressioni dalla (4.122) alla (4.126) i primi tre/due indici fanno riferimento allo spostamento generalizzato unitario impresso, mentre gli ultimi due/l'ultimo si riferiscono alle funzioni di forma degli spostamenti dell'acciaio inferiore (ST), dell'acciaio superiore (SC), del calcestruzzo (CO), della rotazione e dello spostamento verticale; ad esempio, la

$$N_{\phiico}(x) = \Psi_{co}(x) \cdot \mathbf{c}_{\phi i}$$

rappresenta la funzione di forma degli spostamenti della fibra baricentrica nella sezione in calcestruzzo per rotazione unitaria impressa alla sezione nel primo nodo (i).

Si riportano, nelle Figure dalla 4.57 alla 4.106, i grafici relativi alle funzioni di forma degli spostamenti dell'acciaio inferiore (ST), dell'acciaio superiore (SC), del calcestruzzo (CO), della rotazione e dello spostamento verticale, per un elemento monodimensionale soggetto a flessione (DR) di lunghezza $L = 5000$ mm; viene, inoltre, evidenziata la dipendenza dell'andamento delle funzioni di forma dalla percentuale di armatura compressa ρ_{sc} .

In particolare, l'elemento suddetto presenta una sezione rettangolare di base $b = 300$ mm ed altezza $h = 400$ mm, armata con quattro barre di acciaio inferiori ($nfst = 4$) di diametro $\Phi_{ST} = 16$ mm e con una quantità di armatura superiore variabile da due a quattro barre di diametro $\Phi_{SC} = 16$ mm (in rosso il numero di barre superiori $nfsc = 2$, in verde $nfsc = 3$, in blu $nfsc = 4$ (caso di doppia armatura simmetrica)).

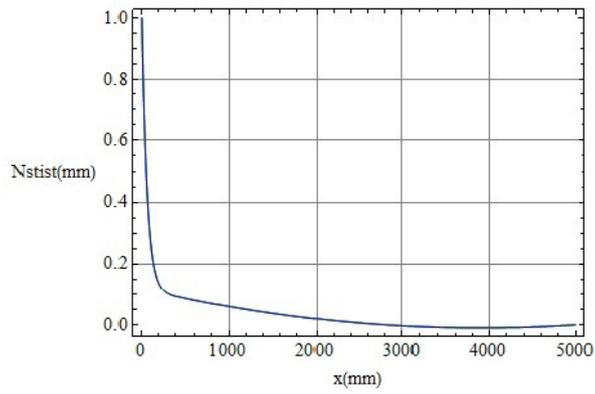


Figura 4.57: Funzioni di forma N_{STIST} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

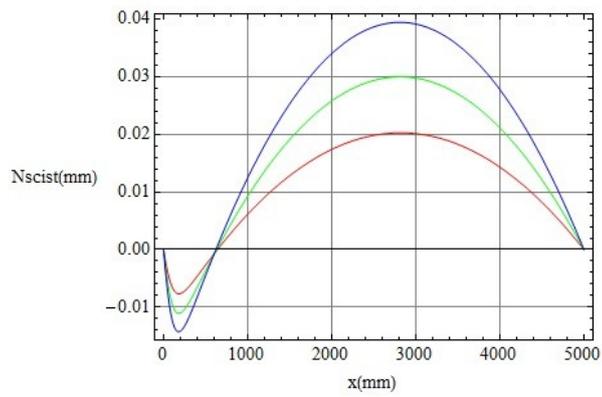


Figura 4.58: Funzioni di forma N_{SCIST} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

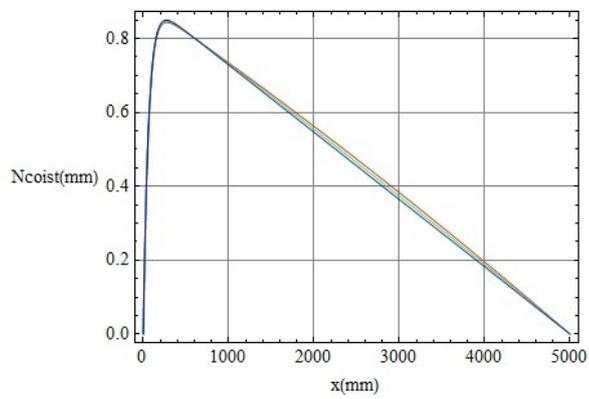
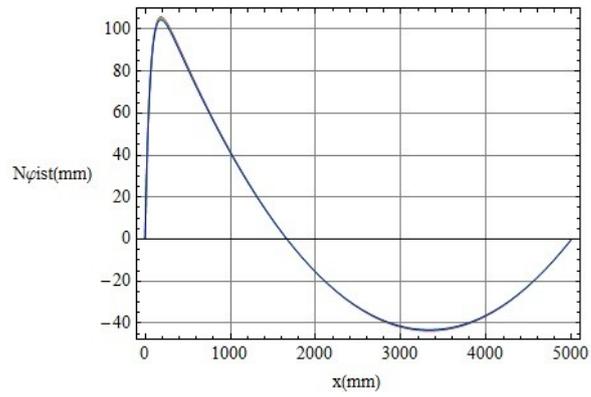
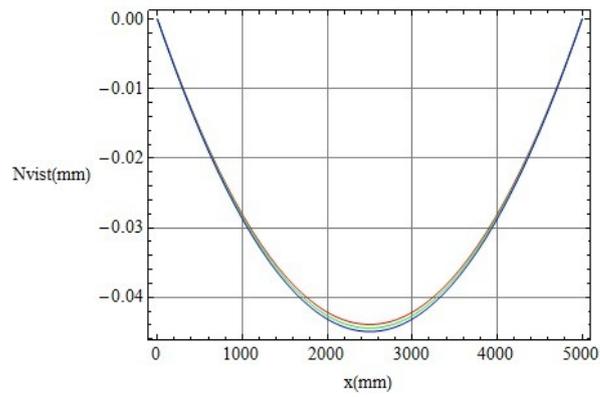
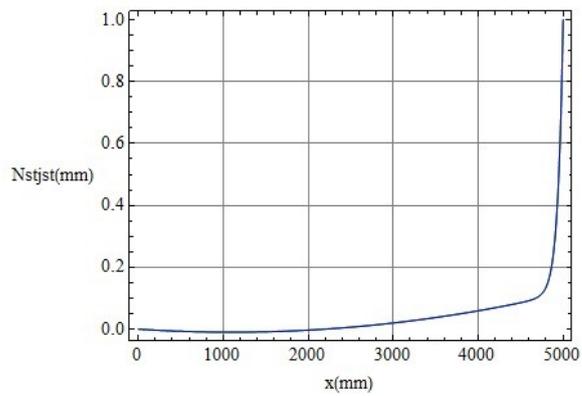


Figura 4.59: Funzioni di forma N_{COIST} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

Figura 4.60: Funzioni di forma $N_{\phi_{IST}}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .Figura 4.61: Funzioni di forma $N_{V_{IST}}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .Figura 4.62: Funzioni di forma $N_{ST_{IST}}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

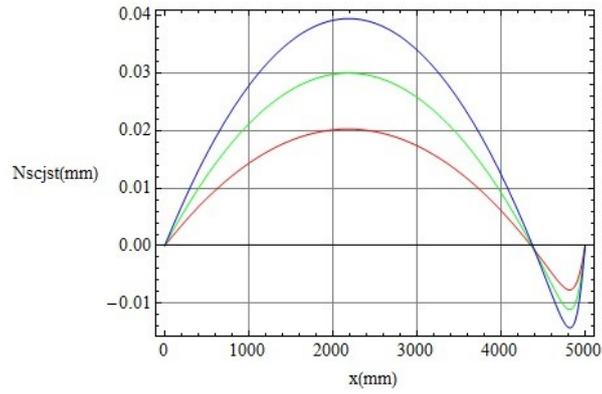


Figura 4.63: Funzioni di forma N_{scjst} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

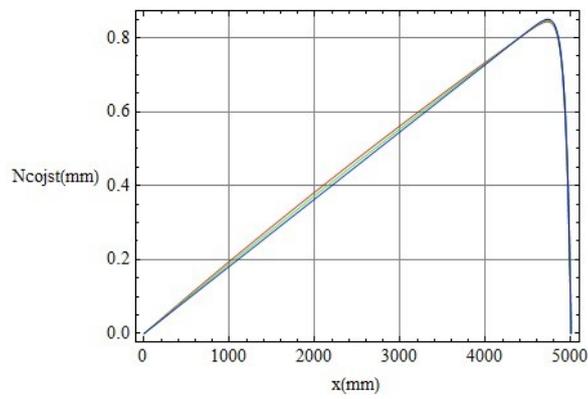


Figura 4.64: Funzioni di forma N_{cojst} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

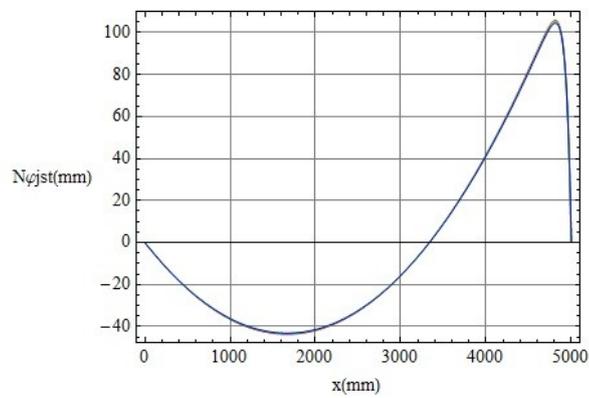
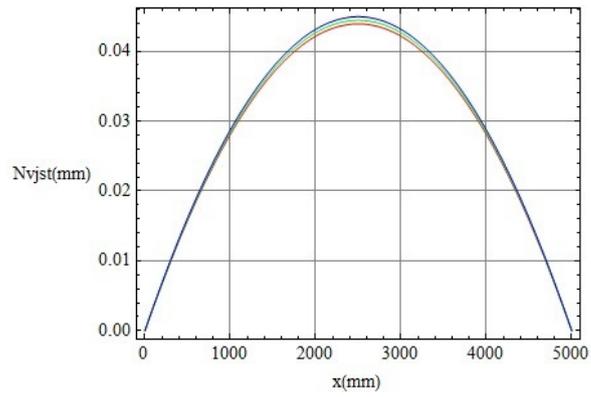
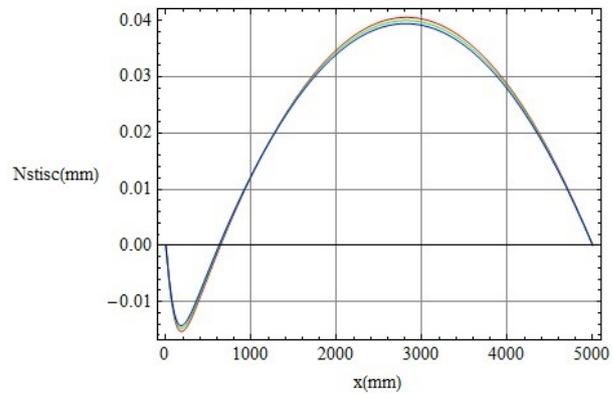
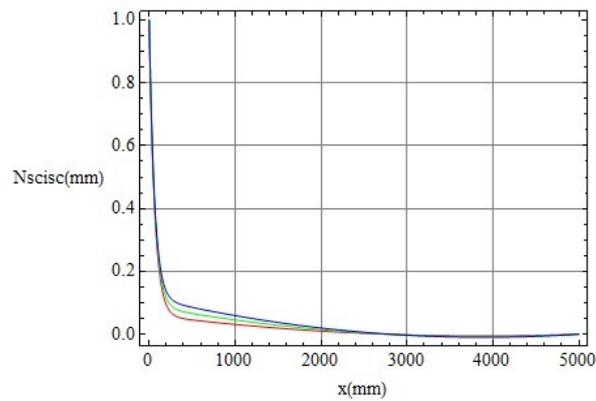


Figura 4.65: Funzioni di forma $N_{\phi jst}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

Figura 4.66: Funzioni di forma N_{vjst} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .Figura 4.67: Funzioni di forma N_{stisc} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .Figura 4.68: Funzioni di forma N_{scisc} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

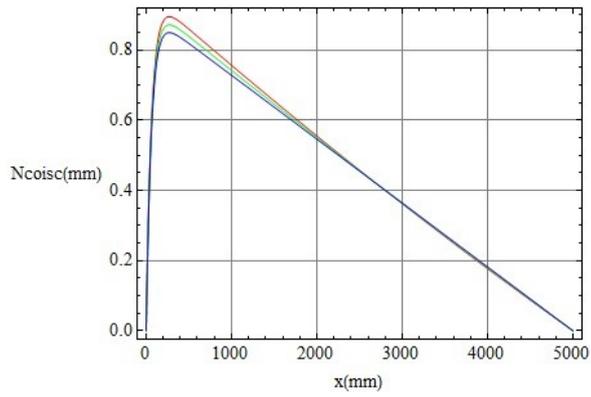


Figura 4.69: Funzioni di forma N_{coisc} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

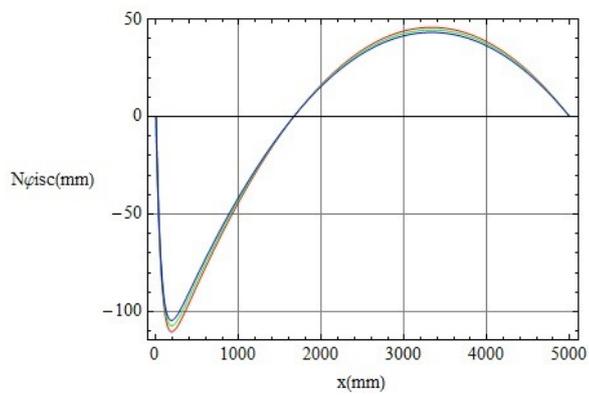


Figura 4.70: Funzioni di forma $N_{\phi\text{isc}}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

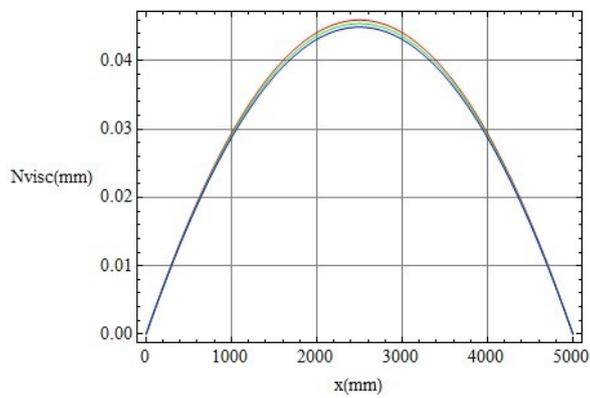


Figura 4.71: Funzioni di forma N_{visc} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

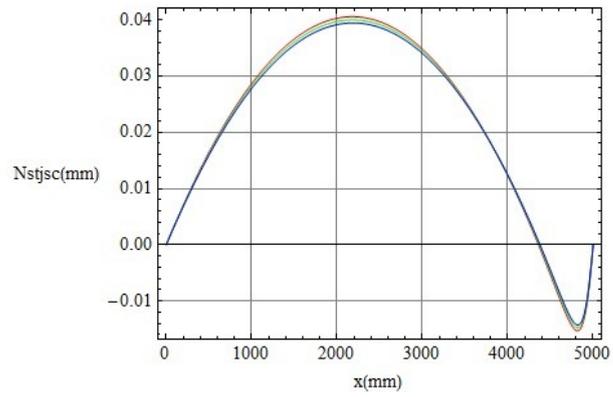


Figura 4.72: Funzioni di forma N_{STJSC} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

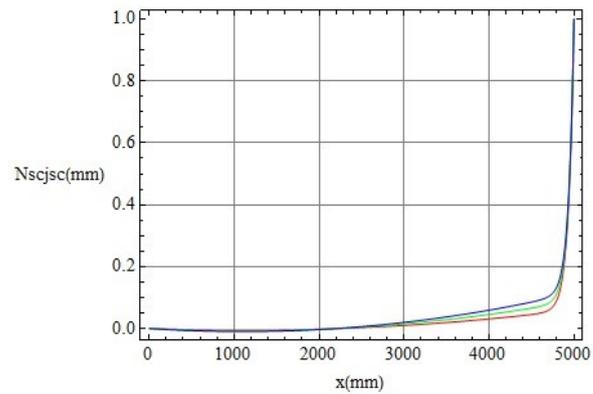


Figura 4.73: Funzioni di forma N_{SCJSC} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

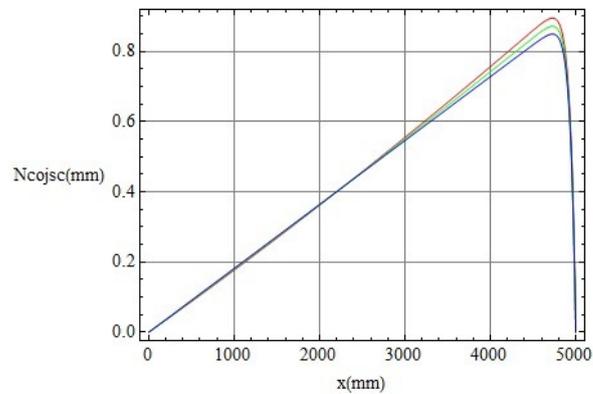


Figura 4.74: Funzioni di forma N_{COJSC} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

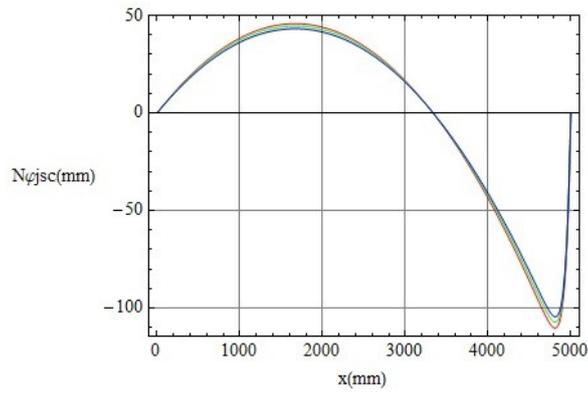


Figura 4.75: Funzioni di forma $N_{\phi_{jSC}}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

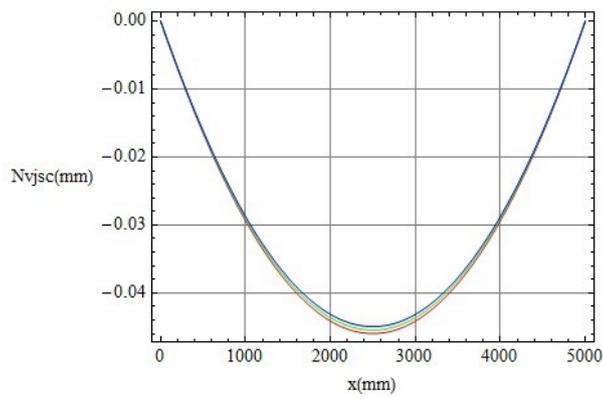


Figura 4.76: Funzioni di forma $N_{v_{jSC}}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

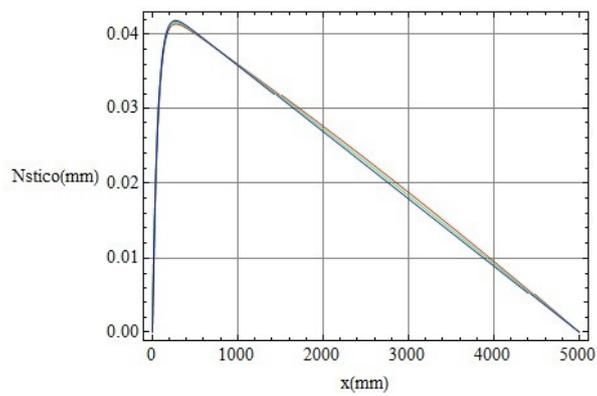


Figura 4.77: Funzioni di forma N_{stico} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

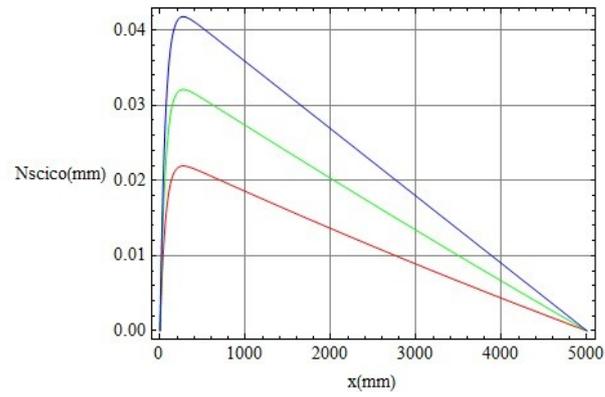


Figura 4.78: Funzioni di forma N_{SCICO} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

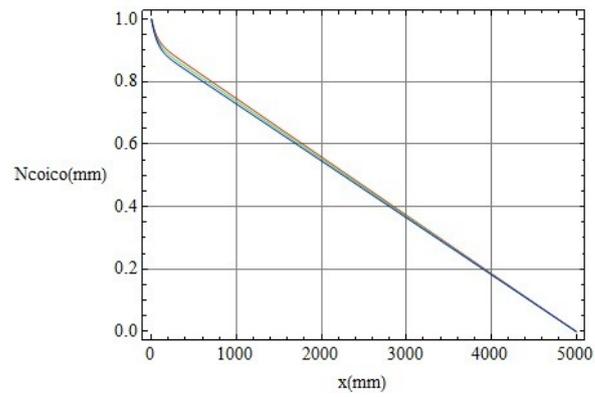


Figura 4.79: Funzioni di forma N_{COICO} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

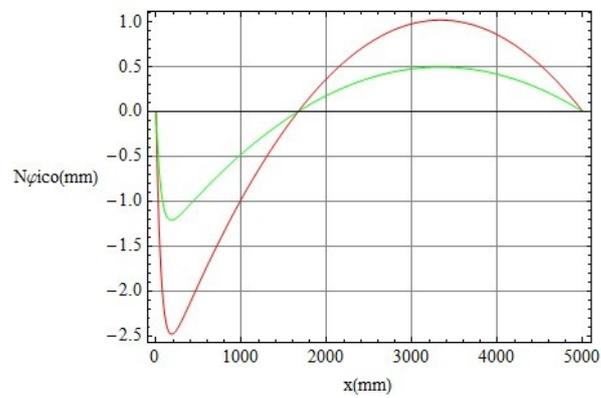


Figura 4.80: Funzioni di forma $N_{\Phi ICO}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

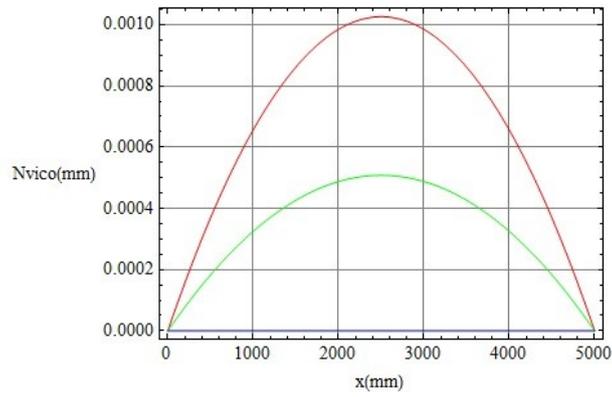


Figura 4.81: Funzioni di forma N_{vico} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

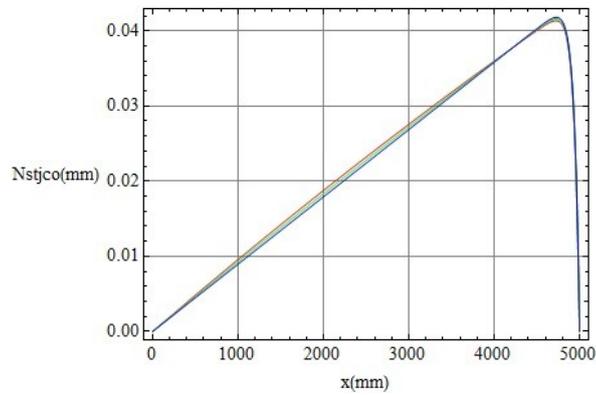


Figura 4.82: Funzioni di forma N_{stjco} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

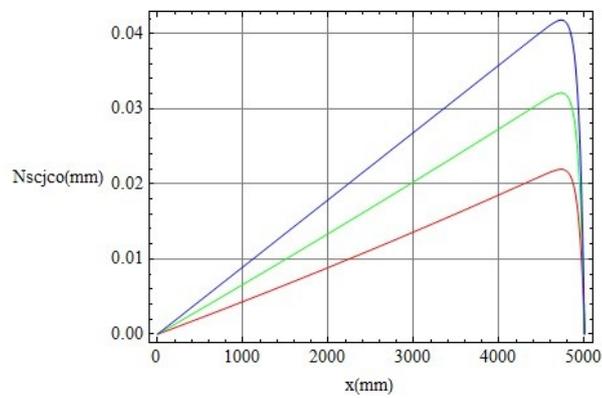


Figura 4.83: Funzioni di forma N_{sjco} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

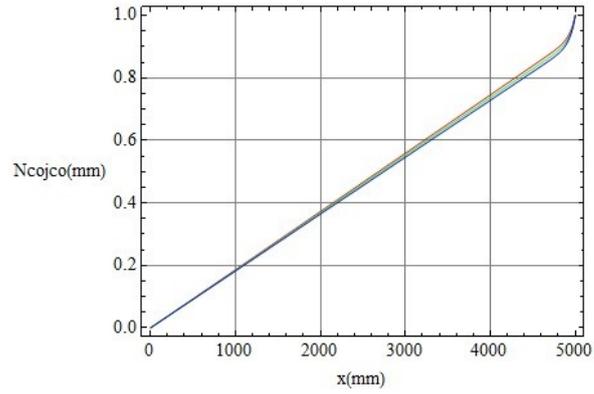


Figura 4.84: Funzioni di forma N_{ϕ_jCO} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

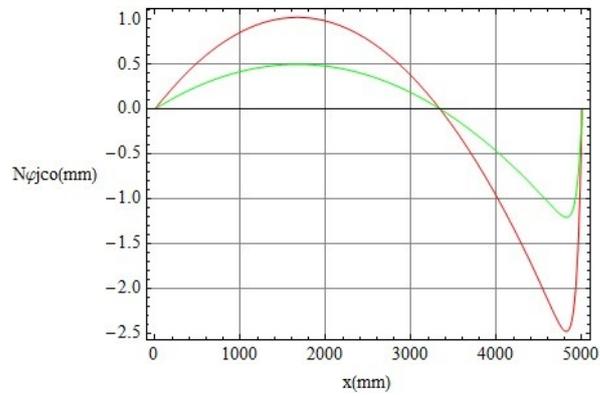


Figura 4.85: Funzioni di forma N_{ψ_jCO} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

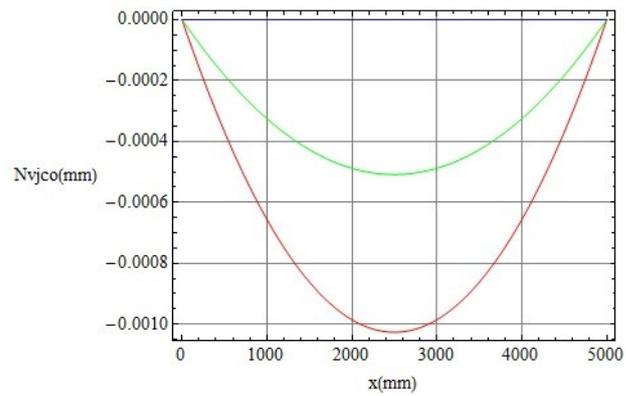


Figura 4.86: Funzioni di forma N_{V_jCO} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

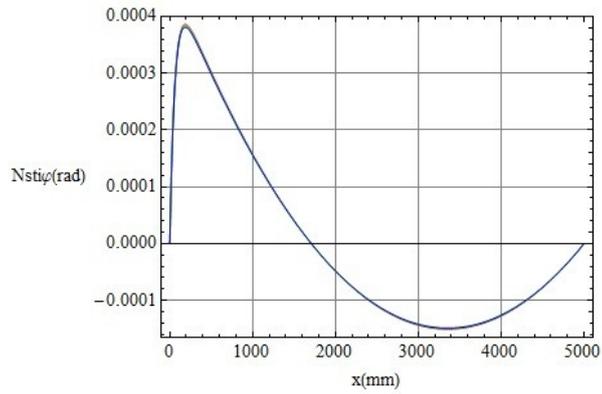


Figura 4.87: Funzioni di forma $N_{STi\Phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

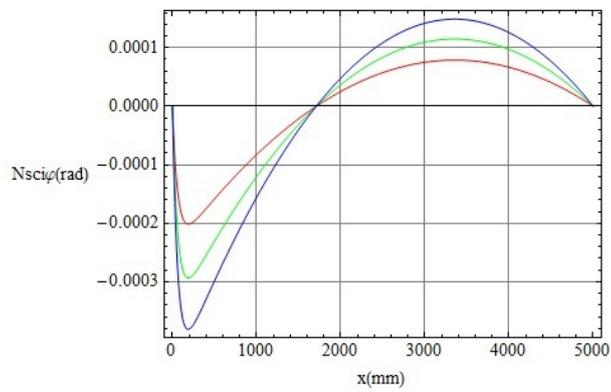


Figura 4.88: Funzioni di forma $N_{SCi\Phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

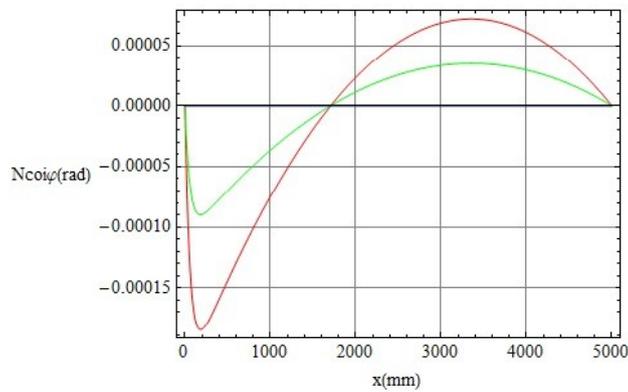


Figura 4.89: Funzioni di forma $N_{COi\Phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

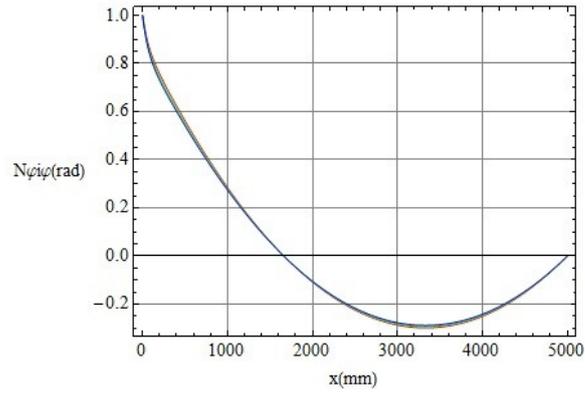


Figura 4.90: Funzioni di forma $N_{\phi_i\phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

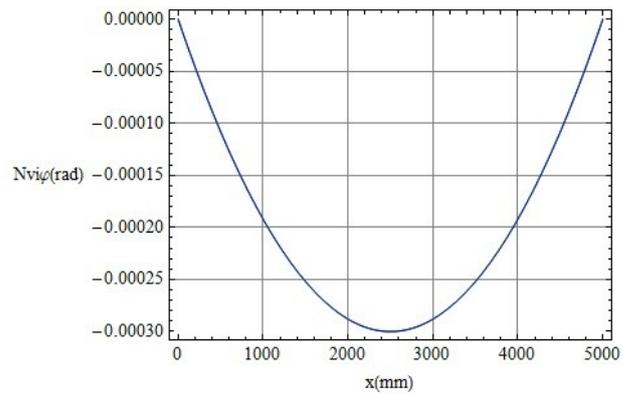


Figura 4.91: Funzioni di forma $N_{v_i\phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

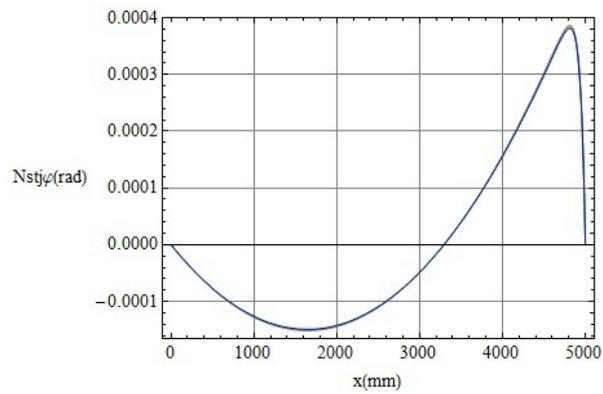


Figura 4.92: Funzioni di forma $N_{stj\phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

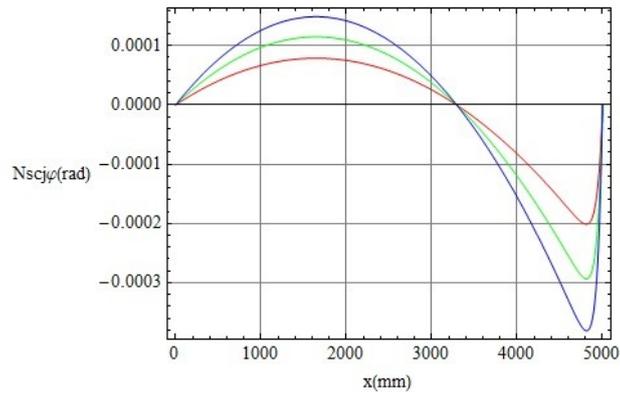


Figura 4.93: Funzioni di forma $N_{SCj\phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

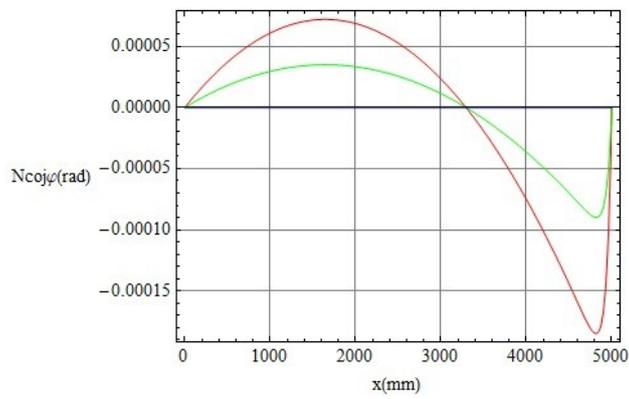


Figura 4.94: Funzioni di forma $N_{COj\phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

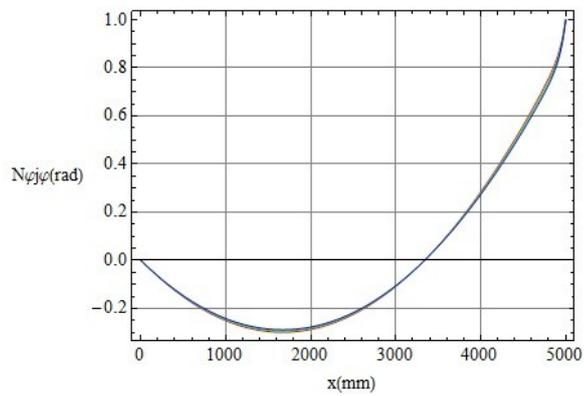


Figura 4.95: Funzioni di forma $N_{\phi j\phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

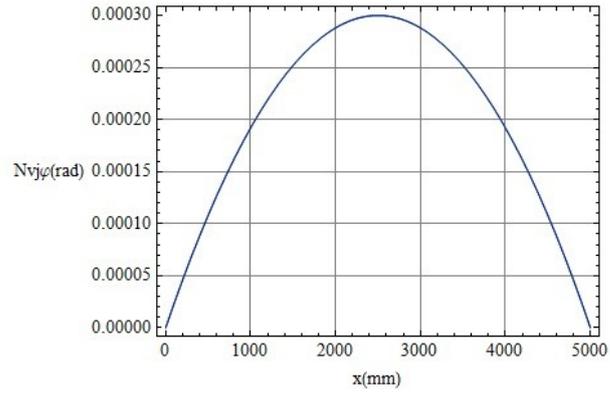


Figura 4.96: Funzioni di forma $N_{vj\phi}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

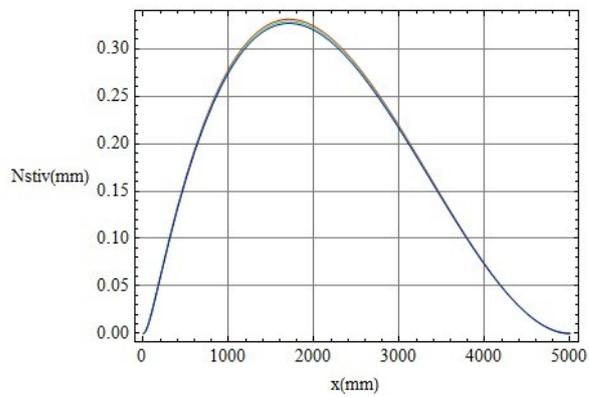


Figura 4.97: Funzioni di forma N_{stiv} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

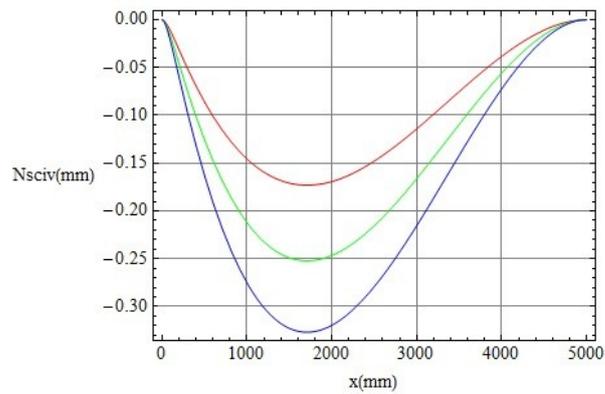


Figura 4.98: Funzioni di forma N_{sciv} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

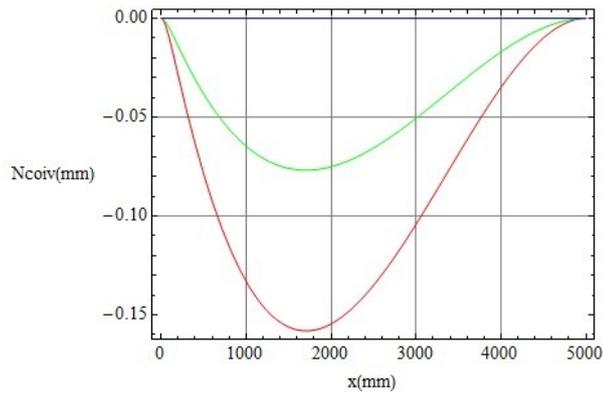


Figura 4.99: Funzioni di forma N_{COIV} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

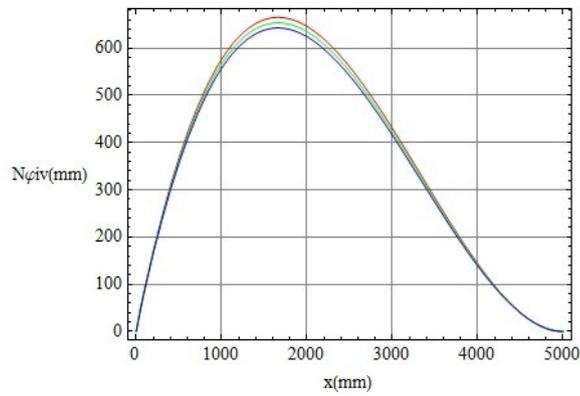


Figura 4.100: Funzioni di forma $N_{\Phi IV}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

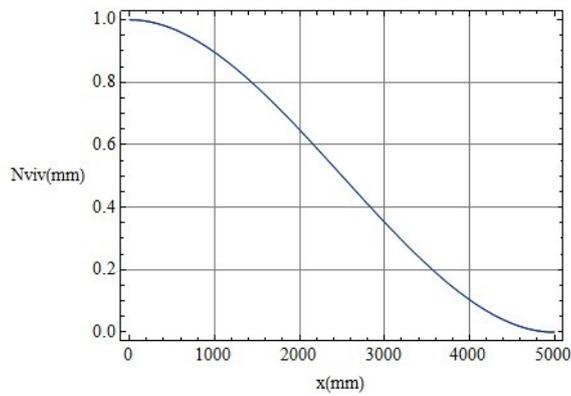


Figura 4.101: Funzioni di forma N_{VIV} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

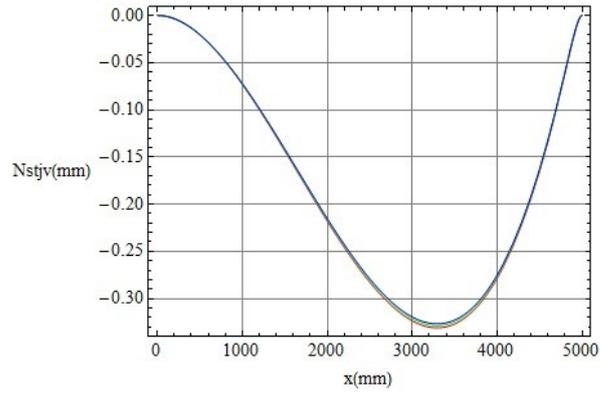


Figura 4.102: Funzioni di forma N_{STjV} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

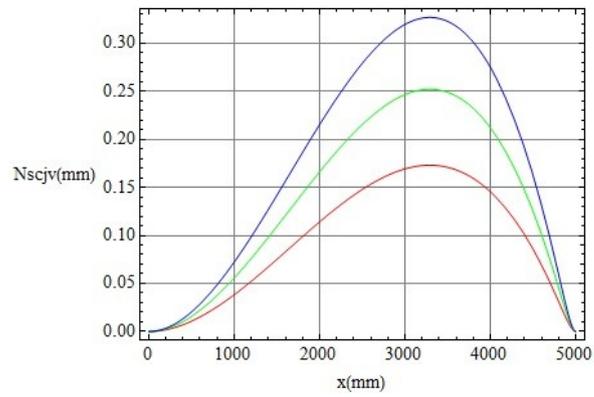


Figura 4.103: Funzioni di forma N_{SCjV} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

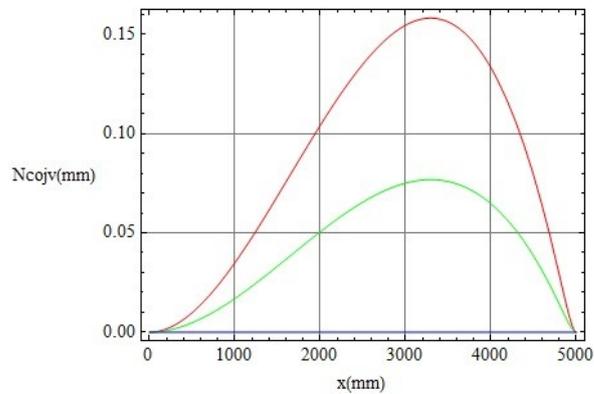


Figura 4.104: Funzioni di forma N_{COjV} elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

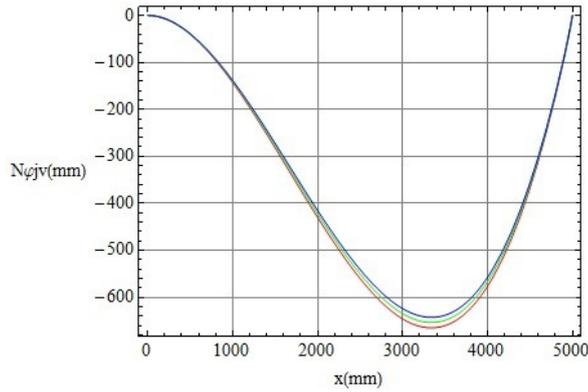


Figura 4.105: Funzioni di forma $N_{\phi_{jv}}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

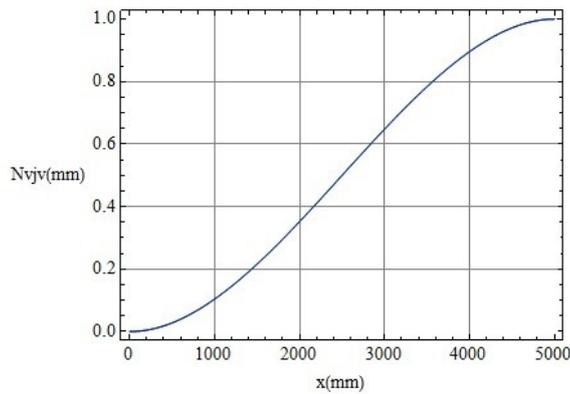


Figura 4.106: Funzioni di forma $N_{v_{jv}}$ elemento EFE-FM al variare di ρ_{sc} .

Alcune figure precedenti evidenziano come alcune funzioni di forma sono identicamente nulle nel caso di doppia armatura simmetrica e cioè quando $n_{fsc} = n_{fst} = 4$ (condizione di disaccoppiamento).

4.5. Deformazioni e tensioni

Le deformazioni $\boldsymbol{\varepsilon}$, essendo date dal gradiente degli spostamenti \mathbf{u} rispetto alle coordinate effettive, si scrivono come

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \mathbf{D}[\mathbf{N}(x)\mathbf{U}] = \mathbf{B}(x)\mathbf{U} \quad 4.127$$

dove \mathbf{D} rappresenta l'operatore gradiente del primo ordine.

Nel caso di elemento soggetto a trazione le deformazioni sono

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_c \end{bmatrix} \quad 4.128$$

ed in quello soggetto a flessione

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{ST} \\ \varepsilon_{SC} \\ \varepsilon_{CO} \\ \chi \end{bmatrix} \quad 4.129$$

mentre, la matrice \mathbf{B} , che contiene le derivate delle funzioni di forma rispetto alle coordinate effettive, può scriversi rispettivamente, nei due casi precedenti, come

$$\mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} B_s \\ B_c \end{bmatrix} \quad 4.130$$

in cui il vettore riga B_s contiene le derivate prime delle funzioni di forma dell'acciaio e B_c quelle del calcestruzzo e

$$\mathbf{B}(x) = \begin{bmatrix} B_{ST} \\ B_{SC} \\ B_{CO} \\ B_\chi \end{bmatrix} \quad 4.131$$

in cui il vettore riga B_{ST} contiene le derivate prime delle funzioni di forma dell'acciaio inferiore, B_{SC} quelle dell'acciaio superiore, B_{CO} quelle della fibra baricentrica della sezione in calcestruzzo e B_χ quelle delle ro-

tazioni della medesima sezione.

In maniera analoga, è possibile introdurre un vettore \mathbf{s} di scorrimenti all'interfaccia tra i due materiali base del composito (acciaio e calcestruzzo), che rappresentando le differenze fra gli scorrimenti dell'acciaio inferiore o di quello superiore ed il corrispondente spostamento del calcestruzzo, può scriversi come:

$$\mathbf{s}(x) = (\mathbf{N}_S(x) - \mathbf{N}_C(x)) \mathbf{U} = \mathbf{B}_G(x) \mathbf{U} \quad 4.132$$

dove, nel caso di elemento soggetto a trazione,

$$\mathbf{s}(x) = [s] \quad 4.133$$

ed in quello soggetto a flessione

$$\mathbf{s}(x) = \begin{bmatrix} s_T \\ s_C \end{bmatrix} \quad 4.134$$

mentre, la matrice \mathbf{B}_G , che contiene differenze di funzioni di forma e nel caso flessionale anche loro derivate rispetto alle coordinate effettive, può scriversi rispettivamente, nei due casi indicati sopra, come

$$\mathbf{B}_G(x) = [N_S - N_C] \quad 4.135$$

in cui N_S contiene le funzioni di forma dell'acciaio e N_C quelle del calcestruzzo e

$$\mathbf{B}_G(x) = \begin{bmatrix} B_{GT} \\ B_{GC} \end{bmatrix} \quad 4.136$$

in cui il vettore riga B_{GT} assume la forma

$$\mathbf{B}_{GT}(x) = \left[N_{STIST} - N_{STICO} - \bar{y}_{sf} \frac{\partial}{\partial x} N_{STIV}, \dots \quad -N_{VJCO} - \bar{y}_{sf} \frac{\partial}{\partial x} N_{VJV} \right]$$

ed vettore riga B_{GC} può scriversi come

$$\mathbf{B}_{GC}(x) = \left[N_{STISC} - N_{STICO} + \bar{y}_{sf} \frac{\partial}{\partial x} N_{STIV}, \dots \quad -N_{VJCO} + \bar{y}_{sf} \frac{\partial}{\partial x} N_{VJV} \right].$$

Infine, stabilita la congruenza delle deformazioni in termini incre-

mentali, al fine di considerare il comportamento non lineare dei materiali, il legame tra deformazioni e tensioni nella sezione può, infatti, essere espresso solo in termini incrementali, sulla scorta delle leggi costitutive dei materiali definite in precedenza, con la relazione:

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \boldsymbol{\sigma}[\boldsymbol{\varepsilon}(x)]. \quad 4.137$$

Nel caso di elemento soggetto a trazione la (4.137) si scrive come

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_s[\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)] \\ \boldsymbol{\sigma}_c[\boldsymbol{\varepsilon}_c(x)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s} \boldsymbol{\sigma}_s[\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)] \right) \boldsymbol{\varepsilon}_s(x) \\ \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_c} \boldsymbol{\sigma}_c[\boldsymbol{\varepsilon}_c(x)] \right) \boldsymbol{\varepsilon}_c(x) \end{bmatrix} \quad 4.138$$

$$\boldsymbol{\tau}(x) = [\boldsymbol{\tau}[\mathbf{s}(x)]] = \left[\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \boldsymbol{\tau}[\mathbf{s}(x)] \right) \mathbf{s}(x) \right] \quad 4.139$$

ed in quello a flessione

$$\boldsymbol{\sigma}(x) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{ST}[\boldsymbol{\varepsilon}_{ST}(x)] \\ \boldsymbol{\sigma}_{SC}[\boldsymbol{\varepsilon}_{SC}(x)] \\ \boldsymbol{\sigma}_{CO}[\boldsymbol{\varepsilon}_{CO}(x)] \\ \boldsymbol{\sigma}_\chi[\chi(x), y] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{ST}} \boldsymbol{\sigma}_{ST}[\boldsymbol{\varepsilon}_{ST}(x)] \right) \boldsymbol{\varepsilon}_{ST}(x) \\ \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{SC}} \boldsymbol{\sigma}_{SC}[\boldsymbol{\varepsilon}_{SC}(x)] \right) \boldsymbol{\varepsilon}_{SC}(x) \\ \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{CO}} \boldsymbol{\sigma}_{CO}[\boldsymbol{\varepsilon}_{CO}(x)] \right) \boldsymbol{\varepsilon}_{CO}(x) \\ - \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{CO}} \boldsymbol{\sigma}_{CO}[\boldsymbol{\varepsilon}_{CO}(x)] \right) \chi(x) y \end{bmatrix} \quad 4.140$$

$$\boldsymbol{\tau}(x) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau}_T[\mathbf{s}_T(x)] \\ \boldsymbol{\tau}_C[\mathbf{s}_C(x)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}_T} \boldsymbol{\tau}_T[\mathbf{s}_T(x)] \right) \mathbf{s}_T(x) \\ \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{s}_C} \boldsymbol{\tau}_C[\mathbf{s}_C(x)] \right) \mathbf{s}_C(x) \end{bmatrix}. \quad 4.141$$

4.6. Matrice di rigidezza tangente elementare

Il sistema di equazioni di equilibrio è un sistema non lineare e può essere risolto tramite metodi numerici. Generalmente si procede tramite una procedura di tipo incrementale iterativo. Il carico viene applicato in un certo numero di incrementi (passi di carico) e lo stato equilibrato a fine passo viene determinato tramite una procedura iterativa volta ad annullare il residuo delle forze.

Come già indicato nel paragrafo 4.2., assumendo che \mathbf{U} sia il vettore degli spostamenti globali, \mathbf{A} l'operatore di assemblaggio e \mathbf{w} il valore corrente del salto di spostamento nella sezione in cui viene introdotta la discontinuità immersa tra i nodi interni dell'elemento in calcestruzzo, il campo di spostamenti del calcestruzzo ed anche gli scorrimenti risultano discontinui.

In particolare, il campo di spostamenti nel calcestruzzo può essere scritto come la somma di un termine continuo ed uno discontinuo come in (4.6) e (4.7).

Per il caso esaminato, attraverso il campo di deformazioni ed il corrispondente delle tensioni basato sul legame costitutivo, come definiti nel paragrafo 4.5, il sistema globale di equazioni non lineari di equilibrio è dato da:

$$\mathbf{A}_{e=1}^{nelem} \int_0^{L_{el}} \left[A_s \mathbf{B}_s^T(x) \sigma_s + A_c \mathbf{B}_c^T(x) \sigma_c + \Phi_s \mathbf{B}_G^T(x) \tau \right] dx - \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{eq}^{Qc} = 0 \quad 4.142$$

$$\mathbf{A}_{e=1}^{nelem} \int_0^{L_{el}} \left[A_c \bar{\mathbf{B}}_c^T(x) \sigma_c + \Phi_s \bar{\mathbf{B}}_G^T(x) \tau \right] dx + A_c \mathbf{t}_n = 0 \quad 4.143$$

In notazione matriciale, come già detto, la relazione tra il vettore delle deformazioni e quello degli spostamenti è espressa attraverso la matrice \mathbf{B} nella forma (4.10) e tale relazione nel caso del calcestruzzo può scriversi come in (4.11), in cui la $\bar{\mathbf{B}}_c$ corrisponde al salto di spostamento all'interfaccia.

In maniera analoga, attraverso la definizione di scorrimento in (4.12), l'operatore $\bar{\mathbf{B}}_G$ si scrive come in (4.13).

Le equazioni di equilibrio vengono, dunque, imposte mediante l'uguaglianza fra le forze nodali equivalenti alle sollecitazioni interne e le forze nodali esterne, comprese quelle equivalenti ai carichi esterni applicati sulla superficie dell'elemento (Qc).

La matrice di rigidità tangente elementare dell'elemento monodimensionale di lunghezza L, calcolata con la soluzione corrente in termini di spostamenti,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{UU} & \mathbf{K}_{Uw} \\ \mathbf{K}_{wU} & \mathbf{K}_{ww} \end{bmatrix} \quad 4.144$$

essendo

$$\mathbf{K}_{UU} = \int_0^L \left[A_s \mathbf{B}_s^T(x) E_s^{tg} \mathbf{B}_s(x) + A_c \mathbf{B}_c^T(x) E_c^{tg} \mathbf{B}_c(x) + \Phi_s \mathbf{B}_G^T(x) G_\tau^{tg} \mathbf{B}_G \right] dx \quad 4.145$$

$$\mathbf{K}_{Uw} = \mathbf{K}_{wU} = \int_0^L \left[A_c \mathbf{B}_c^T(x) E_c^{tg} \bar{\mathbf{B}}_c(x) + \Phi_s \mathbf{B}_G^T(x) G_\tau^{tg} \bar{\mathbf{B}}_G \right] dx \quad 4.146$$

$$\mathbf{K}_{ww} = \int_0^L \left[A_c \bar{\mathbf{B}}_c^T(x) E_c^{tg} \bar{\mathbf{B}}_c(x) + \Phi_s \bar{\mathbf{B}}_G^T(x) G_\tau^{tg} \bar{\mathbf{B}}_G \right] dx + K_n^{tg} A_c = 0 \quad 4.147$$

può essere allora scritta sostituendo ad $E_s^{tg}(x)$, $E_c^{tg}(x)$, $G_\tau^{tg}(x)$, rispettivamente le espressioni seguenti:

$$E_s^{tg}(x) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_s} \boldsymbol{\sigma}_s[\boldsymbol{\varepsilon}_s(x)] \quad 4.148$$

$$E_c^{tg}(x) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_c} \boldsymbol{\sigma}_c[\boldsymbol{\varepsilon}_c(x)] \quad 4.149$$

$$G_\tau^{tg}(x) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{s}} \boldsymbol{\tau}[\mathbf{s}(x)] \quad 4.150$$

e considerando ancora che K_n^{tg} rappresenta il modulo tangente del tratto di softening del legame trazione - separazione del calcestruzzo.

4.7. Forze nodali

Abbiamo visto che il punto di partenza della formulazione sono le equazioni di equilibrio che vengono, dunque, imposte mediante l'uguaglianza fra le forze nodali equivalenti alle sollecitazioni interne e le forze nodali esterne, comprese quelle equivalenti ai carichi esterni applicati sulla superficie dell'elemento (Qc).

L'applicazione del metodo dei residui conduce alla loro soluzione iterativa, nella forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{UU} & \mathbf{K}_{Uw} \\ \mathbf{K}_{wU} & \mathbf{K}_{ww} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{r}_U \\ -\mathbf{r}_w \end{bmatrix} \quad 4.151$$

dove, ad ogni passo di iterazione, attraverso gli operatori di compatibilità \mathbf{B} e $\bar{\mathbf{B}}$ definiti nel paragrafo 4.1, devono calcolarsi i residui:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_U = \frac{A}{e=1} \int_0^{L_{el}} \left[A_s \mathbf{B}_s^T(x) \sigma_s[\varepsilon_s(x)] + A_c \mathbf{B}_c^T(x) \sigma_c[\varepsilon_c(x)] + \right. \\ \left. + \Phi_s \mathbf{B}_g^T(x) \tau[s(x)] \right] dx - \mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{eq}^{Qc} \end{aligned} \quad 4.152$$

$$\mathbf{r}_w = \frac{A}{e=1} \int_0^{L_{el}} \left[A_c \bar{\mathbf{B}}_c^T(x) \sigma_c[\varepsilon_c(x)] + \Phi_s \bar{\mathbf{B}}_g^T(x) \tau[s(x)] \right] dx + A_c \mathbf{t}_n, \quad 4.153$$

che, determinati sulla scorta del campo di deformazioni correnti, attraverso i legami costitutivi dei materiali definiti prima, rappresentano le forze nodali del problema non lineare nel passo di iterazione.

CAPITOLO 5

SOLUZIONE DEL PROBLEMA NON LINEARE

5.1. Introduzione

Nella stessa maniera in cui con il metodo degli elementi finiti si discretizza la struttura nello spazio, con le procedure di tipo incrementale, tipiche dei problemi non lineari, si effettua la discretizzazione del percorso di carico-spostamento.

In altre parole, dato uno stato di equilibrio definito dalla coppia spostamento-carico in un istante $t_{i\text{-esimo}}$, la procedura incrementale stabilisce come si può arrivare al successivo stato di equilibrio definito da una ulteriore coppia relativa all'istante t_{i+1} .

Considerato, inoltre, che le equazioni che governano il problema sono non lineari, ogni coppia in equilibrio viene ricercata con l'ausilio di un metodo iterativo.

Esistono in letteratura diversi metodi iterativi con cui si possono risolvere i problemi non lineari, ma tra essi quello più largamente in uso è il Metodo di Newton - Raphson con rigidità tangente aggiornata o la sua versione modificata, che tiene conto della rigidità tangente non aggiornata.

A questi metodi iterativi bisogna associare un criterio di convergenza, che fornisce la grandezza con la quale misurare l'errore e che deter-

mina la fine del processo iterativo stesso; tra questi criteri possono annoverarsi quello della norma dei residui delle forze, quello della norma degli spostamenti e quello della norma energetica.

Generalmente, scegliendo di operare con il Metodo di Newton - Raphson classico, si avrà la garanzia della convergenza di tipo quadratico del problema con poche iterazioni, caratterizzate però da un elevato onere computazionale, in quanto bisogna aggiornare ad ogni passo la rigidezza del sistema.

Nel caso in cui si utilizzi, invece, la versione modificata del predetto Metodo, con la quale la rigidezza viene calcolata una sola volta ed applicata ad ogni iterazione, il processo sarà più lungo, ma la singola iterazione più breve.

La procedura iterativa termina quando l'errore (relativo od assoluto) del passo iterativo corrente sarà minore della precisione ricercata (tolleranza), generalmente fissata dall'utente.

Come indicato nel Capitolo 4, nel caso in questione l'attenzione è stata rivolta all'individuazione ed implementazione numerica di un metodo di soluzione iterativa alla Newton - Raphson modificato delle equazioni di equilibrio, contenenti la modellazione dei legami non lineari dei materiali costituenti l'EFE (Elementary Finite Element) e l'interfaccia tra questi ultimi (legame tensione di aderenza - scorrimento).

5.2. Integrazione numerica

Gli integrali presenti nelle espressioni ricavate per la matrice di rigidezza dell'elemento, per i vettori dei carichi nodali e per i residui delle forze, non possono essere risolti in forma analitica, poiché i legami costitutivi possono essere non lineari.

Per risolvere gli integrali e ricavare, per esempio, la matrice di rigidezza, lungo l'asse dell'elemento viene creata una griglia di m punti di campionamento.

Assunto, perciò, un reticolo di punti opportunamente scelti, si calcola nel generico punto il valore della funzione da integrare, si moltiplica tale valore per un peso e per lo jacobiano della trasformazione di coor-

dinate dal dominio normalizzato a quello effettivo, si somma, infine, questo contributo a quelli precedentemente accumulati. Nel caso generale di un dominio dello spazio tridimensionale, il procedimento può essere riassunto nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
 I(\mathbf{f}) &= \int_D \mathbf{f}(x, y, z) dx dy dz = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{g}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \cong \\
 &\cong \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w_i w_j w_k \mathbf{g}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

in cui $\mathbf{f}(x, y, z)$ è la funzione da integrare, $\mathbf{g}(\xi, \eta, \zeta)$ è il prodotto della funzione per il determinante dello jacobiano della trasformazione dal dominio normalizzato al dominio effettivo e w_i, w_j, w_k sono i pesi che dipendono dalla forma interpolante associata al tipo di quadratura prescelto, m è il numero di punti di campionamento lungo l'asse dell'elemento, n definisce una griglia di punti di campionamento nel piano della sezione.

Nel caso di un problema monodimensionale, per semplicità, i punti nodali in cui andare a suddividere il dominio lineare possono essere scelti secondo due modalità ben precise e cioè attraverso l'uso di una *mesh* con punti equidistanti o equispaziati (detta anche uniforme) oppure mediante una *mesh* non equispaziata (detta anche non uniforme).

Tra le due classi menzionate viene frequentemente preferita la seconda dal momento che, con essa, il metodo di quadratura conduce a soluzioni approssimate più accurate rispetto a quelle ottenibili tramite una discretizzazione uniforme.

La discretizzazione con punti non equidistanti può essere ottenuta scegliendo la loro posizione in base alle griglie di distribuzione alla Gauss-Legendre o Gauss-Lobatto.

Nella discretizzazione secondo le radici del polinomio di Legendre i punti di griglia vengono definiti nella seguente forma (r_k è la radice del polinomio *k-esimo*):

$$\xi_k = \frac{r_k - r_1}{r_N - r_1} \tag{5.2}$$

$$r_k = \left(1 - \frac{1}{8N^2} + \frac{1}{8N^3} \right) \cos \left(\frac{4k-1}{4N+2} \pi \right); \quad k = 1, 2, \dots, N. \tag{5.3}$$

Nella distribuzione alla Gauss-Lobatto la posizione dei punti nodali è definita mediante una discretizzazione armonica di tipo cosenico. Vista l'accuratezza dei risultati ottenuti e le ottime caratteristiche di stabilità e convergenza, è una tipologia di discretizzazione frequentemente utilizzata, con la quale è possibile definire un infittimento dei punti nodali in prossimità degli estremi del dominio lineare. In particolare, le posizioni dei punti di griglia vengono individuate tramite la seguente relazione:

$$\xi_k = \frac{1 - \cos\left(\frac{k-1}{N-1}\pi\right)}{2}; \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad 5.4$$

La distribuzione alla Gauss-Lobatto, scelta nella implementazione riportata al capitolo precedente, consente di avere punti di campionamento posizionati anche sulla frontiera del dominio e, quindi, risulta più adatta per calcolare sforzi e deformazioni nelle sezioni estreme degli elementi.

La funzione interpolante necessaria per il calcolo dei pesi, invece, è stata definita in questo caso attraverso i polinomi di Legendre in forma ricorsiva:

$$L_{i+1}(x) = \frac{2i+1}{i+1}xL_i(x) - \frac{i}{i+1}L_{i-1}(x), \quad i = 1, 2, \dots \quad 5.5$$

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x.$$

Come strategia di integrazione è stata applicata la ben nota ed usata quadratura di Gauss, ricorrendo all'aggiunta di punti di integrazione addizionali agli estremi dell'intervallo (GLL - Gauss-Legendre-Lobatto),

$$I(\mathbf{f}) = \int_D \mathbf{f}(x) dx \cong \sum_{i=1}^n w_i \mathbf{f}(x_i) \quad 5.6$$

dove n è il numero di punti di integrazione, x_i sono detti nodi di quadratura ed i coefficienti w_i sono detti pesi della formula di quadratura.

5.3. Strategia di soluzione

Assumendo, come già indicato nel capitolo precedente, che \mathbf{d} sia il vettore degli spostamenti globali, \mathbf{A} l'operatore di assemblaggio e \mathbf{w} il valore corrente del salto di spostamento nella sezione in cui viene introdotta la discontinuità immersa nell'elemento in calcestruzzo, ad ogni passo di iterazione si deve trovare una soluzione delle equazioni non lineari di equilibrio seguenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \sum_{e=1}^{nelem} \sum_{i=1}^{nGP} \left[\left(A_s \mathbf{B}_s^T(x_i) \sigma_{s_i} + A_c \mathbf{B}_c^T(x_i) \sigma_{c_i} + \Phi_s \mathbf{B}_g^T(x_i) \tau_i \right) w_i \right] + \\ -\mathbf{F}_{ext} - \mathbf{F}_{eq}^{Qc} = \mathbf{r}_d \end{aligned} \quad 5.7$$

$$\mathbf{A} \sum_{e=1}^{nelem} \sum_{i=1}^{nGP} \left[\left(A_c \bar{\mathbf{B}}_c^T(x_i) \sigma_{c_i} + \Phi_s \bar{\mathbf{B}}_g^T(x_i) \tau_i \right) w_i \right] + A_c \mathbf{t}_n = \mathbf{r}_w \quad 5.8$$

avendo indicato con nGP il numero di punti di integrazione di Gauss-Lobatto posti all'ascissa x_i e con w_i i pesi corrispondenti.

L'applicazione del metodo dei residui conduce alla soluzione iterativa delle predette equazioni con il Metodo alla Newton - Raphson modificato, che in quanto basato sul loro sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine attorno alla soluzione al passo corrente, conduce alla definizione della matrice di rigidezza tangente, calcolata con la soluzione corrente in termini di spostamenti.

La convergenza viene testata attraverso la norma del residuo delle forze, che dovrà essere contenuta entro il valore della tolleranza scelta.

Considerato che le equazioni di equilibrio vengono di solito scritte in forma incrementale, per la natura stessa delle leggi costitutive tra tensioni e deformazioni, nel problema in esame, analogo a quello della non linearità del materiale, si procede nel modo seguente: la soluzione incognita al passo $(t + \Delta t)$ si ottiene dalla soluzione nota al passo t con un procedimento incrementale, attraverso la scrittura della matrice di rigidezza tangente.

Ricavato il vettore degli incrementi di spostamento nodale $\Delta \mathbf{d}$, si potrà calcolare, quindi, il vettore degli spostamenti incogniti, che può scriversi come:

$$d(t + \Delta t) = d(t) + \Delta d \quad 5.9$$

ed avendo ottenuto un valore approssimato di $d(t+\Delta t)$, si possono calcolare le tensioni e le deformazioni al passo $t+\Delta t$ e, quindi, passare al successivo incremento.

In pratica, il valore dello spostamento $d(t + \Delta t)$ è affetto da un errore che può essere molto elevato, dipendendo dal passo di carico e/o di spostamento scelto (Figura 5.1).

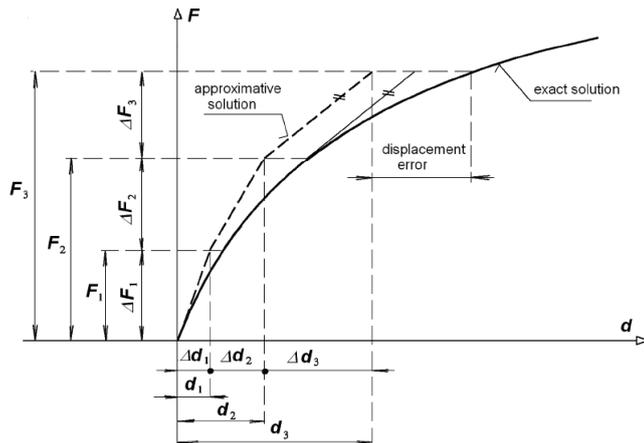


Figura 5.1: Metodo incrementale.

Ad ogni iterazione k del ciclo di equilibrio, dopo aver aggiornato gli spostamenti nodali a fine passo

$$d_{n+1}^{k+1} = d_{n+1}^k + \Delta d_{n+1}^k, \quad 5.10$$

si entra nella routine che definisce l'elemento finito, con cui viene calcolata la matrice di rigidezza elementare \mathbf{K}^{el} ed il vettore dei residui elementari \mathbf{r}^{el} ; si procede, poi, all'assemblaggio, costruendo la matrice di rigidezza globale e il vettore dei residui globale.

5.4. Soluzione del problema dell'equilibrio con un Metodo alla Newton - Raphson modificato

Nella presente trattazione si è scelto di utilizzare un procedimento iterativo, di tipo Newton-Raphson modificato, per la risoluzione di sistemi non lineari. Tale metodo consiste nel trovare una radice della $f(x)=0$ con un'approssimazione che parte dalla formula di Taylor arrestata al primo ordine:

$$f(x^i) = f(x^{i-1}) + f^I(x^{i-1})(x^i - x^{i-1}) = 0, \quad 5.11$$

da cui

$$f^I(x^{i-1})\delta x^i = -f(x^{i-1}), \quad 5.12$$

dove il simbolo δ indica una variazione arbitraria del parametro. Il primo membro di quest'ultima coincide con $\mathbf{K}_{tg} \Delta d$, avendo indicato con \mathbf{K}_{tg} la matrice di rigidezza tangente.

Infine, per l'*i-esima* iterazione si ricava:

$$\mathbf{K}_{tg}^{i-1}(t) \Delta d^i = \left(\mathbf{F}_{ext}(t + \Delta t) - \mathbf{F}_{eq}^{Qc}(t + \Delta t) - \mathbf{F}_{int}(t + \Delta t) \right)^{i-1} \quad 5.13$$

$$d^i(t + \Delta t) = d^{i-1}(t + \Delta t) + \Delta d^i \quad 5.14$$

con le condizioni iniziali

$$d^0(t + \Delta t) = d(t) \quad 5.15$$

$$\mathbf{F}_{int}^0(t + \Delta t) = \mathbf{F}_{int}(t) \quad 5.16$$

e nelle quali la variabile t ha il solo significato di passo di discretizzazione scelto.

Nella prima iterazione, le relazioni di equilibrio corrispondono a quelle del passo incrementale; nelle iterazioni successive, i valori degli spostamenti nodali alla *(i-1)-esima* iterazione servono per calcolare le tensioni e le forze interne. Il vettore dei carichi residuo

$$\mathbf{F}_{ext}(t + \Delta t) = \mathbf{F}_{ext}^{i-1}(t + \Delta t) \quad 5.17$$

corrisponde al vettore che non è bilanciato dalle tensioni e, quindi, viene richiesta una ulteriore iterazione con un incremento di spostamento.

Questo aggiornamento degli spostamenti nodali durante il procedimento iterativo continua finché il vettore dei carichi non è bilanciato e l'incremento di spostamento è sufficientemente piccolo.

Il significato delle operazioni è illustrato in Figura 5.2 per un caso monodimensionale.

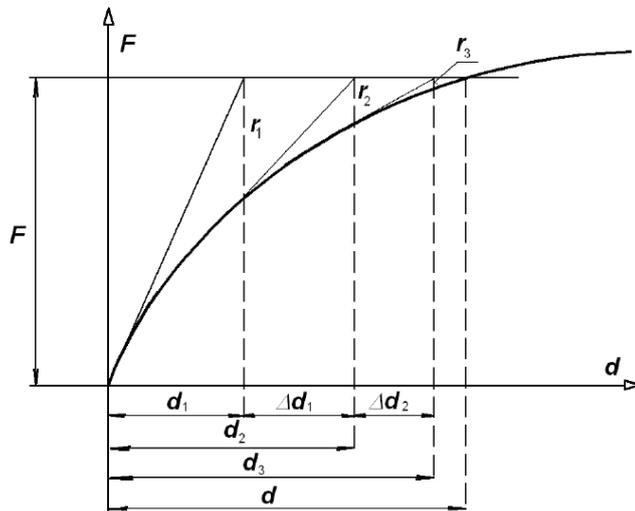


Figura 5.2: Procedura standard Newton-Raphson.

ed in Figura 5.3 per la combinazione del metodo incrementale con quello iterativo di Newton-Raphson.

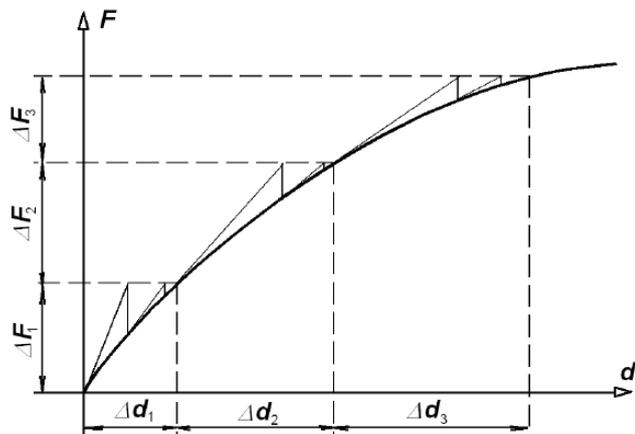


Figura 5.3: Combinazione metodo incrementale e metodo di Newton-Raphson.

In definitiva, lo squilibrio delle forze che nasce a causa della non linearità dei componenti base degli elementi (acciaio e calcestruzzo) e della loro interazione (aderenza - scorrimento), assieme a quelle che nascono a seguito della formazione e della propagazione della frattura coesiva (legge trazione - separazione tipica della concezione del metodo delle discontinuità forti), vengono riapplicate nelle successive iterazioni, fino a quando si raggiunge la convergenza.

Il metodo di Newton Raphson può essere molto dispendioso, poiché richiede per ogni iterazione di valutare l'operatore \mathbf{K}_{tg}^i .

Dal punto di vista computazionale ciò si traduce nella necessità di riassemblare ad ogni iterazione la matrice di rigidezza e di fattorizzarla. Questo inconveniente può essere superato ricorrendo ad una versione modificata del metodo, che consiste nell'assumere indipendentemente dall'iterazione corrente:

$$\mathbf{K}_{tg}^i = \mathbf{K}_{tg}^0 \quad 5.18$$

per cui la fase più onerosa del calcolo viene così eseguita una sola volta, come schematizzato nella figura seguente; è questa la scelta operativa effettuata in questa trattazione.

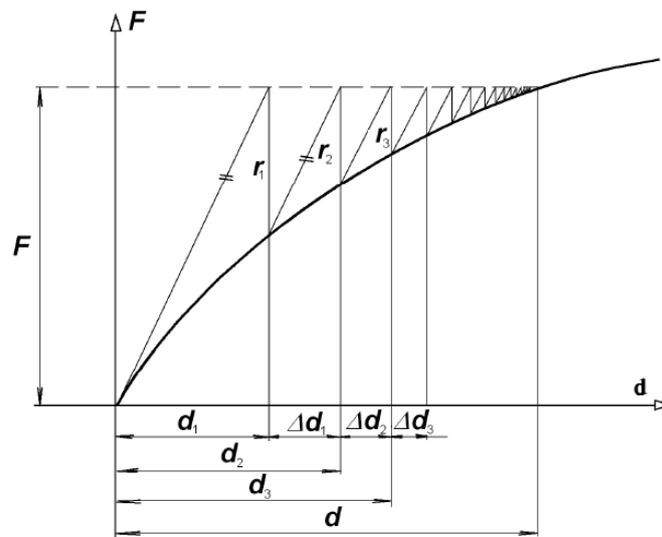


Figura 5.4: Procedura modificata di Newton-Raphson.

La scelta del numero di passi di carico è di estrema importanza per poter soddisfare due esigenze contrapposte. Un elevato numero di passi di carico fa, infatti, aumentare i tempi di calcolo, ma in questo modo si ottiene una soluzione più affidabile in termini di precisione; al tendere all'infinito di questo numero si otterrebbe, infatti, la soluzione esatta del problema non lineare.

Un numero troppo basso di passi di carico può, invece, comportare la non convergenza del procedimento di Newton-Raphson.

In una storia di carico monotona crescente, per un dato valore del carico, il procedimento iterativo viene interrotto quando si verifica una delle condizioni seguenti:

- convergenza della soluzione, cioè raggiungimento di uno stato di equilibrio;
- collasso per raggiungimento del valore di deformazione ultima di uno dei materiali che compongono l'elemento strutturale od il complesso di elementi (rottura locale);
- mancata convergenza della soluzione entro il numero massimo di iterazioni scelte in previsione (in genere circa 20).

Con il procedimento di Newton-Raphson, se correttamente applicato, si è in grado di risolvere un problema non lineare a partire da una soluzione di primo tentativo. Quest'ultima deve essere preventivamente valutata, per poi procedere iterativamente alla ricerca della soluzione.

L'algoritmo risolutivo completo si articola, pertanto, in due fasi distinte: una fase di predizione nella quale si stima una soluzione di primo tentativo ed il relativo residuo ed una fase di correzione nella quale si risolve iterativamente il problema fino ad annullare il residuo che progressivamente si produce.

La predizione viene effettuata utilizzando la rigidezza all'origine. Non è infatti possibile conoscere a priori la natura della risposta del modello strutturale, in quanto anche per un processo di carico monotono crescente alcune parti di esso possono subire uno scarico elastico, come ad esempio nell'attraversamento della fase di formazione della frattura; la soluzione di primo tentativo viene pertanto stimata utilizzando la rigidezza elastica tangente iniziale \mathbf{K}_{tg}^0 , lasciando poi al procedimento iterativo il compito di correggerla e mantenerla fissata nelle

iterazioni all'interno del passo.

Nella Figura 5.5 è riportato un diagramma di flusso che descrive sinteticamente una generica procedura iterativa.

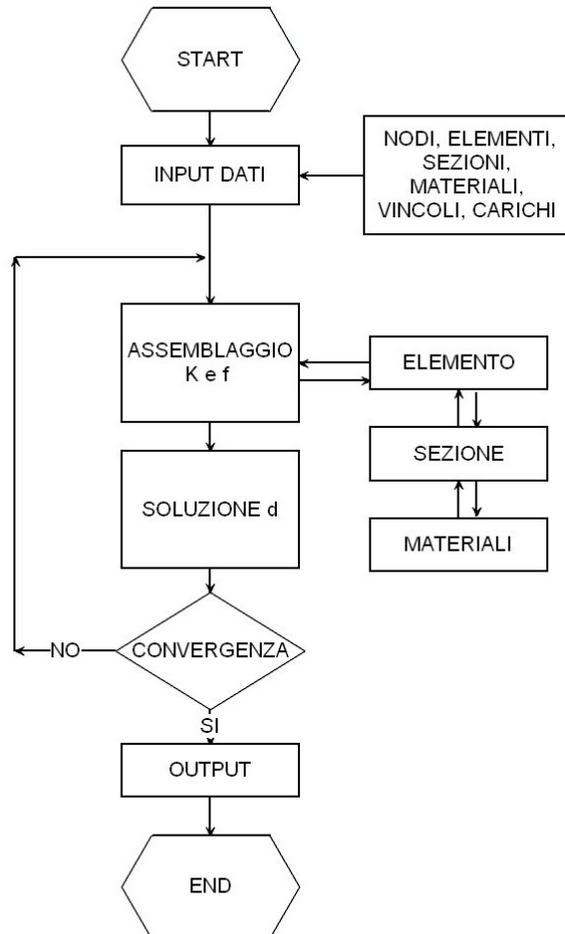


Figura 5.5: Diagramma di flusso generica procedura iterativa.

Ovviamente, il Metodo di Newton - Raphson modificato, che nel contesto della soluzione dei problemi nella meccanica dei solidi è anche conosciuto come “stress transfer” o “initial stress method”, ha una velocità di convergenza più lenta e, calcolata generalmente sulla norma dei re-

sidui delle forze, ha una convergenza asintotica lineare e non quadratica come la forma classica del Metodo, ma elimina alcune problematiche tipiche di quest'ultimo.

Riassumendo, nonostante la convergenza del Metodo non è garantita in ogni circostanza, essa si verifica normalmente se il vettore di partenza (spostamenti) non è molto discosto dalla soluzione e ciò si può conseguire suddividendo la storia di carico in intervalli di ampiezza non eccessiva, in maniera tale che la prima iterazione rappresenti già una ragionevole approssimazione del valore finale; in tal caso, la matrice di rigidezza tangente viene calcolata solitamente all'inizio del passo e mantenuta costante al suo interno.

La trattazione teorica adottata in questa tesi segue un'approccio 'non regolarizzato' in cui il campo di spostamento è discontinuo e il campo di deformazione è una distribuzione singolare. Viene, pertanto, considerata esplicitamente la legge costitutiva discreta trazione separazione all'interfaccia e il regime delle discontinuità forti viene effettivamente raggiunto. Il fenomeno della formazione di una frattura coesiva viene trattato come un fenomeno discreto, ma contenuto nel contesto di un modello continuo.

L'implementazione nel metodo degli elementi finiti è stata sviluppata a partire dalla trattazione presentata in cui viene considerata esplicitamente la legge discreta trazione separazione all'interfaccia.

CAPITOLO 6

APPLICAZIONI NUMERICHE

6.1. Introduzione

Gli elementi descritti nei capitoli precedenti sono stati implementati in un codice di calcolo agli elementi finiti in ambiente Mathematica® e in Matlab®. Il modello di comportamento dell'elemento è del tutto generale e può essere particolarizzato ad uno specifico caso di studio, scegliendo opportunamente la funzione di attivazione dell'interfaccia immersa nel componente calcestruzzo.

L'obiettivo del presente lavoro è effettuare l'analisi non lineare di elementi in calcestruzzo armato, usando il metodo degli elementi finiti, mediante un algoritmo di soluzione incrementale alla Newton-Raphson.

Sulla base delle procedure di analisi descritte nei capitoli precedenti, è stato messo a punto un algoritmo di calcolo automatico per eseguire l'analisi non lineare di un elemento monodimensionale in calcestruzzo armato, soggetto a carico monotono. La comparsa di una fessura introduce una cedibilità locale, che ne modifica la risposta; la presenza del crack viene simulata attraverso l'introduzione di molle a comportamento non lineare, opportunamente tarate. Per l'elemento finito uncracked e cracked, vengono derivate le funzioni di interpolazione dei campi di spostamento (funzioni di forma). L'impiego di tali funzioni consente, nel caso più generale, la determinazione dei carichi nodali equivalenti, nonché della matrice di rigidezza dell'elemento.

Ogni algoritmo di analisi non lineare è costituito essenzialmente da quattro fasi fondamentali:

- la formazione della matrice di rigidezza tangente corrente ed il calcolo dei residui delle forze;
- la soluzione delle equazioni di equilibrio per gli incrementi di spostamento nodale;
- la determinazione dello stato deformativo e tensionale di tutti gli elementi del modello;
- la verifica di convergenza.

Questi passaggi fondamentali per l'algoritmo proposto, sono presentati in dettaglio nel diagramma di flusso in Figura 6.1.

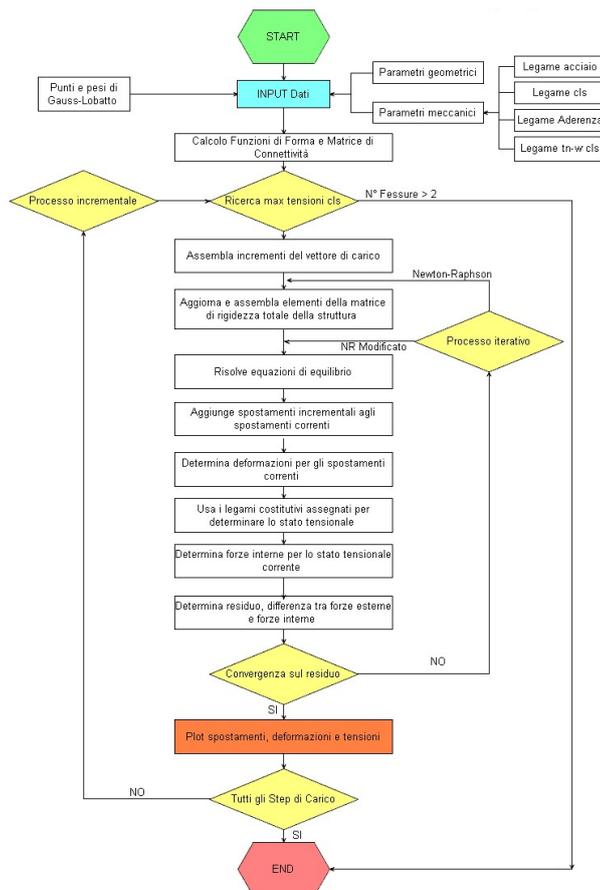


Figura 6.1: Diagramma di flusso algoritmo di calcolo non lineare.

Per simulare la risposta in campo non lineare dell'elemento monodimensionale, la procedura numerica è stata implementata in un opportuno codice di calcolo che si compone di una routine principale, che raccoglie e collega varie subroutine create per descrivere il modello, ognuna delle quali implementa una determinata serie di operazioni. Una sintesi dei passi dell'algoritmo, corrispondenti alle singole operazioni e subroutine identificate nel diagramma di flusso, è presentata di seguito.

La routine di input prevede l'immissione di tutti quei valori preliminari che servono a definire il modello e l'algoritmo, quali i dati geometrici generali del modello monodimensionale in calcestruzzo armato, la definizione del numero di elementi finiti in cui discretizzare il modello e la costruzione della matrice delle connettività, le condizioni al contorno di vincolo (boundary condition), il processo di carico per il tipo di prova da eseguire, a spostamento o a carico controllato, e conseguentemente l'individuazione del numero di passi incrementali da eseguire, le condizioni di convergenza del processo iterativo, quali il valore della tolleranza accettabile sulla norma del residuo ed il numero massimo di iterazioni di convergenza.

Le routines dei legami costitutivi prevedono la scelta del tipo di legame costitutivo per i materiali base (acciaio e calcestruzzo) e per l'interfaccia tra di essi, con i relativi parametri meccanici, compreso la scelta dell'andamento del legame trazione-apertura di fessura, che permette di garantire che l'energia dissipata durante il processo di frattura coesiva fino alla formazione di una frattura libera da tensioni, sia pari all'energia di frattura G_F assegnata.

Per la determinazione numerica dei campi di spostamento, di deformazione e di tensione, la routine delle funzioni di forma ricava la matrice N che le contiene e la matrice B che ne contiene le derivate.

La subroutine per l'integrazione numerica, scelto il numero di punti di Gauss-Lobatto interni al singolo elemento finito, permette di determinare per tali punti le coordinate ed i relativi pesi.

Dopo il calcolo delle matrici di rigidezza elementari per i singoli elementi con la relativa routine, l'assemblaggio della matrice di rigidezza tangente K allo stato corrente di spostamento per l'intera struttura nel sistema globale, viene effettuato con la subroutine di assemblaggio,

grazie alla matrice di connettività; nel caso di elemento cracked, una routine di condensazione matriciale, elimina i gradi di libertà interni dei due sub-elementi formati dopo il crack, secondo quanto visto nei precedenti capitoli.

Un'ulteriore routine risolve il sistema non lineare di equilibrio con un metodo alla Newton - Raphson modificato.

Sono state condotte molteplici elaborazioni su provini di diverse caratteristiche geometriche e meccaniche e con diverse condizioni al contorno di vincolo e di carico per testare l'efficienza del modello e dell'algoritmo sviluppato; in questo capitolo vengono presentate alcune simulazioni numeriche di problemi in cui si ha la comparsa della frattura (discontinuità nel campo di spostamento nel calcestruzzo).

In particolare, si è effettuata la simulazione delle seguenti prove a controllo di spostamenti:

- Prova di estensione di una barra di acciaio immersa nel calcestruzzo su provino simmetrico in calcestruzzo armato a comportamento assiale BFE-TM;
- Prova di estrazione di una barra di acciaio immersa nel calcestruzzo (pull-out) su provino monodimensionale a comportamento assiale BFE-TM;
- Prova di estensione della barra di acciaio inferiore su provino simmetrico in calcestruzzo armato a comportamento flessionale BFE-FM, con sezione armata a doppia armatura (DR).

Nelle applicazioni, gli elementi compositi tra due fessure o tra due nodi con armatura efficacemente ancorata in essi sono formati da una matrice in calcestruzzo con immerse barre in acciaio, dei tipi seguenti:

- EFE-TM (Elementary Finite Element - Tension Member);
- EFE-FM (Elementary Finite Element - Flexural Member).

Si riportano nei paragrafi seguenti i risultati per i casi analizzati ritenuti più significativi:

- *Modello A*: provino simmetrico monodimensionale a comportamento assiale bloccato all'estremità sinistra della barra in acciaio (nodo i, grado di libertà 1), cui vengono impressi spostamenti incrementali (a controllo di spostamento) sull'estremità destra della barra in acciaio (nodo j, grado di libertà 3), con i due casi messi a confronto di

provino integro e di provino con un solo crack nelle medesime condizioni al contorno (di vincolo e di carico);

- *Modello B*: provino asimmetrico monodimensionale a comportamento assiale bloccato all'estremità sinistra del calcestruzzo (nodo i, grado di libertà 2), cui vengono impressi spostamenti incrementali (a controllo di spostamento) sull'estremità destra della barra in acciaio (nodo j, grado di libertà 3), simulando la fase iniziale di una prova di estrazione della barra (pull-out);
- *Modello C*: provino simmetrico monodimensionale a comportamento flessionale bloccato all'estremità sinistra della barra inferiore in acciaio (nodo i, grado di libertà 1), semplicemente appoggiato alle due estremità della sezione in calcestruzzo (nodo i, grado di libertà 5 e nodo j, grado di libertà 10), cui vengono impressi spostamenti incrementali (a controllo di spostamento) sull'estremità destra della barra in acciaio (nodo j, grado di libertà 6), con risultati fino alla fase di incipiente formazione della fessura discreta.

6.2. L'elemento soggetto a trazione ed il confronto con casi sperimentali presenti in letteratura

Nel caso di elemento monodimensionale soggetto a trazione, si sono studiati i due seguenti casi con le relative condizioni al contorno e di essi si riportano i risultati ritenuti più significativi.

- Caso 1°) *Modello A* - provino simmetrico monodimensionale a comportamento assiale bloccato all'estremità sinistra della barra in acciaio (nodo i, grado di libertà 1), cui vengono impressi spostamenti incrementali (a controllo di spostamento) sull'estremità destra della barra in acciaio (nodo j, grado di libertà 3), con i due casi messi a confronto di provino integro e di provino con un solo crack nelle medesime condizioni al contorno (di vincolo e di carico).

Il modello studiato è rappresentato fisicamente nella Figura 6.2, la quale mostra le condizioni di vincolo e di spostamento incrementale impresso.

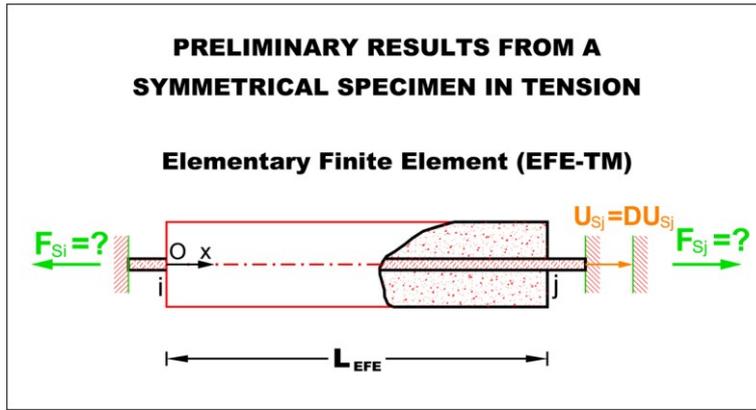


Figura 6.2: Provino relativo al Caso di Studio 1° - Modello A.

Il modello meccanico del Caso 1° è riportato nella Figura 6.3, che illustra la scelta dei gradi di libertà e le condizioni di vincolo dell'elemento di tipo uncracked.

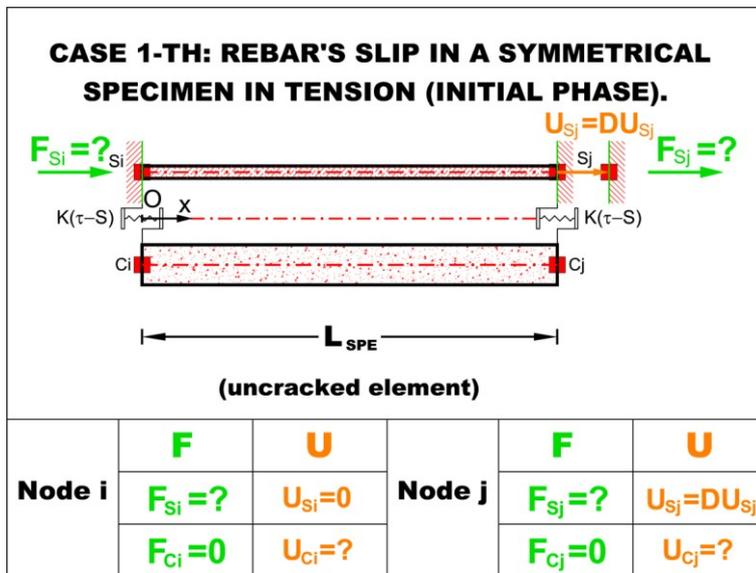


Figura 6.3: Modello meccanico del Caso di Studio 1° - Modello A.

Per le caratteristiche geometriche e meccaniche del provino si sono utilizzati i seguenti valori: $L_{SPE} = 750$ mm, $\Phi_S = 12$ mm e $\Phi_C = 90$ mm.

La geometria dell'elemento, così scelta, corrisponde ad una percentuale geometrica di armatura pari a $\rho = 1.81\%$.

Le caratteristiche meccaniche dei materiali base (acciaio e calcestruzzo) scelti per il provino sono riportate nella Tabella 6.1

Tabella 6.1: Parametri meccanici materiali base.

ACCIAIO		
f_y	420	MPa
E_s	210000	MPa
E_{SH}	10000	MPa
CALCESTRUZZO		
f_{CK}	22.95	MPa
E_c	29000	MPa

I parametri che descrivono il legame costitutivo dell'interfaccia tra i materiali base sono riportati nella Tabella 6.2.

Tabella 6.2: Parametri meccanici interfaccia.

INTERFACCIA ACCIAIO - CALCESTRUZZO		
τ_{MAX}	11.98	MPa
S_1	1.0	mm
S_2	3.0	mm
S_3	5.0	mm

L'analisi è stata spinta fino alla formazione e l'apertura della prima fessura, per poi continuare gli incrementi di spostamento impresso.

Essendo il modello di tipo simmetrico, la prima fessura si forma nella sezione di mezzeria dell'elemento.

Il modello meccanico del Caso 1° nelle condizioni di attivazione dell'interfaccia immersa nel calcestruzzo è riportato nella Figura 6.4, che illustra la scelta dei gradi di libertà e le condizioni di vincolo dell'elemento di tipo cracked.

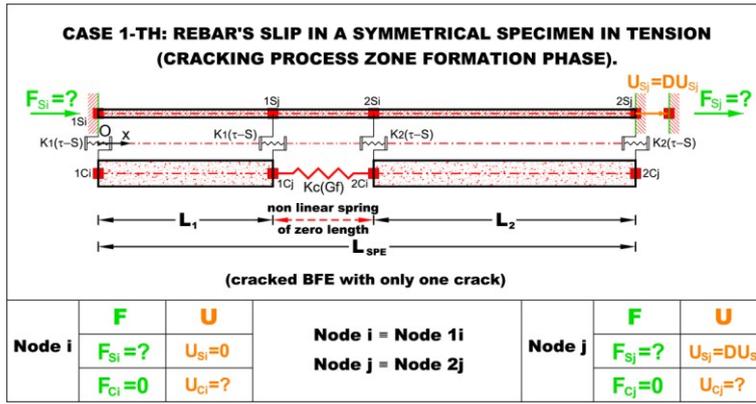


Figura 6.4: Modello meccanico del Caso di Studio 1° - Modello A cracked.

Alla fine del processo incrementale, in cui è stato previsto un incremento monotono degli spostamenti del nodo j della fibra di acciaio, con ΔU_{Sj} pari a 0,01 mm, si sono ottenuti tramite l'algoritmo proposto i campi di spostamento della fibra di acciaio U_S e del calcestruzzo U_C , determinando, inoltre, i relativi scorrimenti. Nelle Figure 6.5, 6.6 e 6.7 è, quindi, possibile osservare tali campi di spostamento per la barra di acciaio, il calcestruzzo e gli scorrimenti che hanno portato alla formazione del primo crack. Si può notare come il comportamento ottenuto era quello previsto, con spostamenti nulli per quanto riguarda la barra di acciaio al nodo i vincolato e scorrimenti nulli nella sezione di simmetria dell'elemento.

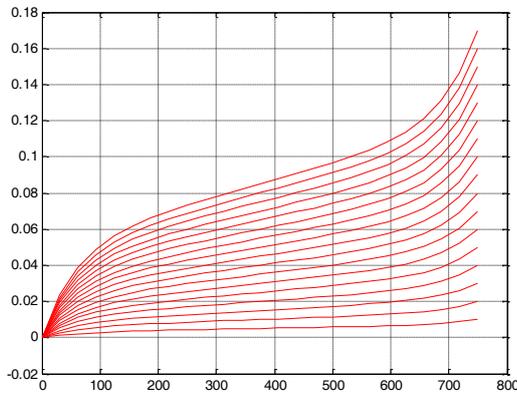
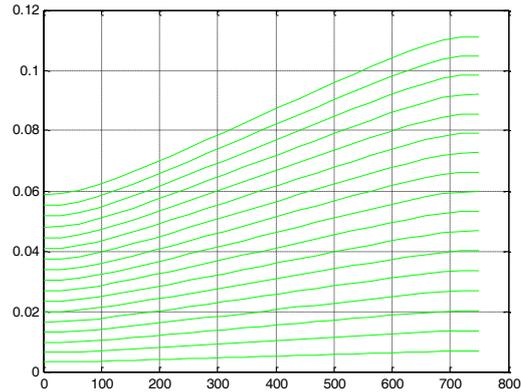
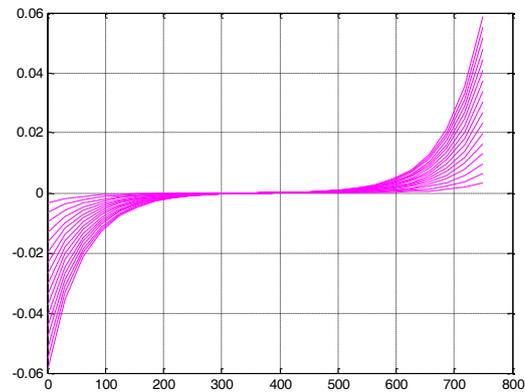


Figura 6.5: Spostamenti barra acciaio $U_S(x)$ (mm).

Figura 6.6: Spostamenti del calcestruzzo $U_C(x)$ (mm).Figura 6.7: Scorrimenti tra acciaio e calcestruzzo $S(x)$ (mm).

Per alcuni step di carico, è stato effettuato il confronto tra i campi di spostamento ottenuti utilizzando le funzioni di forma esponenziali e quelli ottenuti richiamando le funzioni di forma lineari (curve in blu). Si può facilmente notare come i risultati in termini di spostamento ottenuti con le funzioni di forma esponenziali riescano ad approssimare meglio il campo di spostamenti sia per l'elemento in acciaio, sia per quello in calcestruzzo e di conseguenza anche gli scorrimenti (Figure 6.8, 6.9 e 6.10).

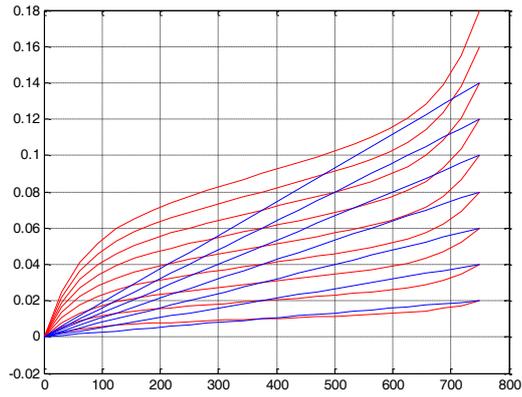


Figura 6.8: Confronto spostamenti barra acciaio $U_s(x)$ (mm) con funzioni di forma esponenziali (rosso) e lineari (blu).

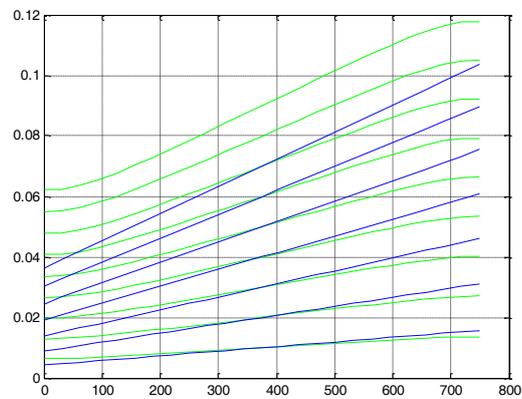


Figura 6.9: Confronto spostamenti del calcestruzzo $U_c(x)$ (mm) con funzioni di forma esponenziali (verde) e lineari (blu).

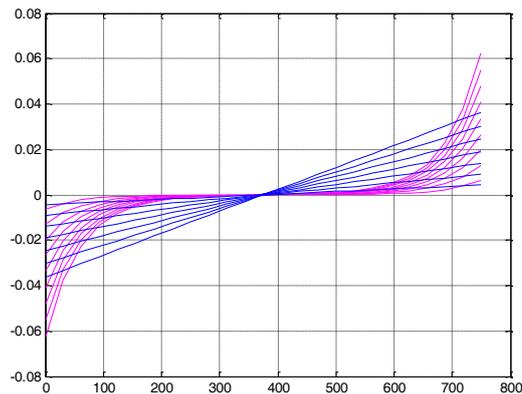


Figura 6.10: Confronto scorrimenti tra acciaio e calcestruzzo $S(x)$ (mm) con funzioni di forma esponenziali (magenta) e lineari (blu).

Ottenuto il campo di spostamenti per ogni step di carico, utilizzando i legami costitutivi adottati per il modello, è stato possibile ricavare prima il campo deformativo e poi quello tensionale per l'acciaio e per il calcestruzzo. Nelle Figure 6.11, 6.12 e 6.13 è possibile osservare come variano per la fibra di acciaio e per il calcestruzzo le tensioni nel modello proposto, ovvero la configurazione degli sforzi che si presentano lungo lo sviluppo totale dell'elemento al crescere della sollecitazione di trazione. Si osserva, quindi, il comportamento atteso, cioè che, a partire degli estremi dell'elemento teso, si ha un andamento nel quale la tensione nel calcestruzzo cresce da zero nella sezione di estremità verso l'interno e, per l'equilibrio, un andamento decrescente si presenta per le tensioni della barra in acciaio; in ogni sezione si manifestano anche le tensioni di aderenza, che si annullano nella sezione in cui calcestruzzo ed acciaio presentano gli stessi spostamenti (scorrimento nullo).

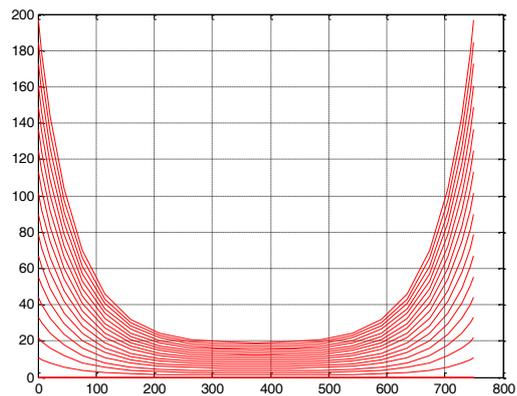


Figura 6.11: Tensioni barra acciaio $\sigma_s(x)$ (MPa).

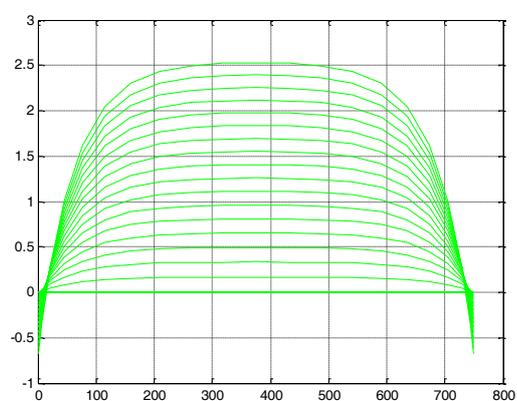


Figura 6.12: Tensioni nel calcestruzzo $\sigma_c(x)$ (MPa).

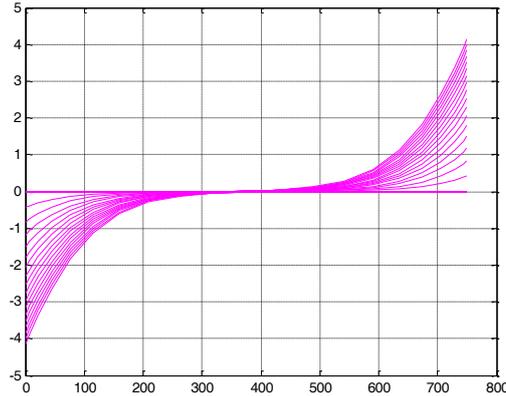


Figura 6.13: Tensioni di aderenza $\tau(x)$ (MPa).

Raggiunto il carico P_s corrispondente al valore di $u_s(L)$ pari a 0.17 mm, la σ_c raggiunge il valore limite che determina l'attivazione del primo crack ($\sigma_c = f_{ct}$) nella sezione di mezzeria del provino. La nuova configurazione, con le medesime condizioni di vincolo e carico, è possibile osservarla nella Figura 6.4, nella quale si nota come si siano aggiunti nuovi gradi di libertà all'interno dell'elemento, che verranno trattati grazie alla procedura di condensazione statica della matrice di rigidità descritta nei capitoli precedenti. L'elemento in oggetto avrà perciò quattro gradi di libertà globali esterni, con le medesime condizioni di vincolo e di carico, cioè provino bloccato all'estremità sinistra della fibra in acciaio (nodo i) corrispondente al grado di libertà 1 e con spostamenti incrementali impressi sulla sua estremità destra (nodo j), corrispondente al grado di libertà 3. I gradi di libertà interni, invece, saranno introdotti in corrispondenza della discontinuità forte immersa e prevista dal meccanismo di frattura del calcestruzzo.

RIORDINO GRADI DI LIBERTÀ

$$dofs\ elem_{uncracked} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow dofs\ elem_{cracked} e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \cup \begin{bmatrix} 7 \\ \circ \\ \cdot \\ 4 \end{bmatrix}$$

In particolare, viene imposta la coincidenza tra il grado di libertà del nodo j relativo alla fibra di acciaio per il sub-elemento 1 ed il nodo i relativo alla fibra di acciaio per il sub-elemento 2 (dof $5 \equiv 7$). A causa della discontinuità forte introdotta nel calcestruzzo, saranno individuati i due nuovi nodi interni corrispondenti al grado di libertà 6 per il sub-elemento 1 ed al grado di libertà 8 per il sub-elemento 2; tra di essi verrà inserita una molla non lineare con rigidezza legata all'energia di frattura del calcestruzzo; la corrispondente rigidezza andrà a collocarsi opportunamente all'interno della matrice rigidezza dell'elemento cracked; gli spostamenti relativi tra i nodi interni della fibra di calcestruzzo, individueranno l'ampiezza della fessura ad ogni incremento di carico successivo.

Procedendo con il processo incrementale, continuando ad incrementare gli spostamenti del nodo j della fibra di acciaio del sub-elemento 2, corrispondente al grado di libertà globale esterno 3, sempre con ΔU_{sj} pari a 0,01 mm, si sono ottenuti tramite l'algoritmo proposto i nuovi campi di spostamento per l'acciaio U_s e per il calcestruzzo U_c dei due sub-elementi. Nella Figura 6.14 è, quindi, possibile osservare tali campi di spostamento per la barra di acciaio, il calcestruzzo e gli scorrimenti. Si può notare come l'andamento degli spostamenti del calcestruzzo e dell'acciaio siano influenzati e caratterizzati dalla discontinuità forte individuata dalla frattura in mezzeria.

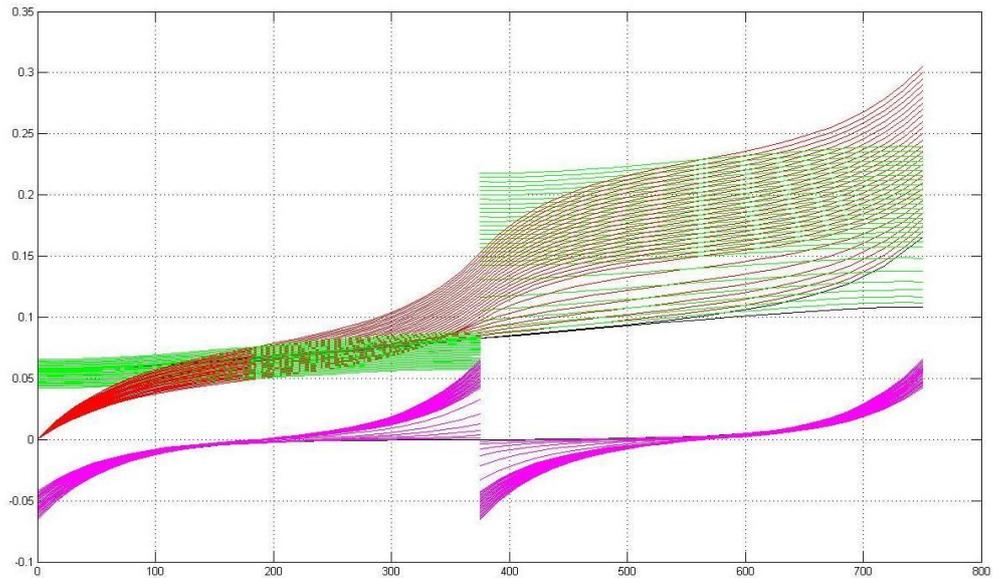


Figura 6.14: Confronto spostamenti barra acciaio $U_s(x)$ (mm) (rosso), spostamenti del calcestruzzo $U_c(x)$ (mm) (verde) e scorrimenti tra acciaio e calcestruzzo $S(x)$ (mm) (magenta).

A partire dai campi di spostamento per i due sub-elementi, si sono determinati gli stati deformativi e quelli tensionali. Nelle Figure 6.15, 6.16 e 6.17 è possibile osservare come variano per l'acciaio e per il calcestruzzo le tensioni nel modello proposto, ovvero la configurazione degli sforzi che si presentano lungo lo sviluppo totale dell'elemento al crescere dello spostamento impresso.

Al raggiungimento del livello $\sigma_c = f_{ct}$ è iniziato lo sviluppo del quadro fessurativo primario, comportando l'abbattimento repentino della tensione nel calcestruzzo in corrispondenza della sezione in cui si è formata la fessura, tensione che, diventata nulla, si è trasferita interamente sull'acciaio; inoltre, all'aprirsi della fessura nascono nuovi scorrimenti nei due sub-elementi. Il procedimento incrementale si è arrestato al sopraggiungere di due nuove fessure all'interno dei sub-elementi, quando si è raggiunto in quest'ultimi nuovamente il criterio di attivazione della fessura discreta ($\sigma_c = f_{ct}$).

Di seguito si riportano i grafici delle tensioni di trazione lunga la

barra d'acciaio in tre diversi passi di carico: la Figura 6.15 rappresenta le predette tensioni al passo n.50 in cui si ha l'attivazione della frattura.

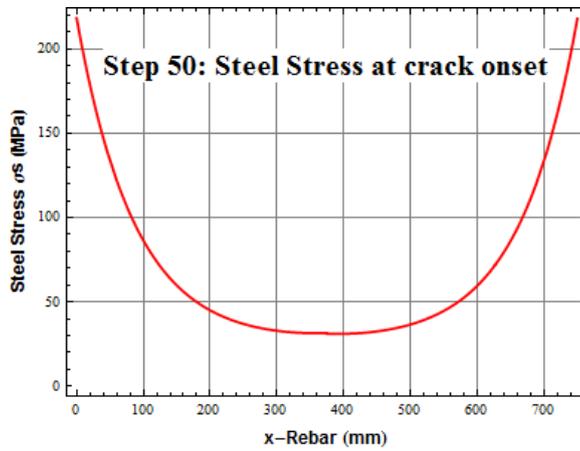


Figura 6.15: Tensioni barra acciaio $\sigma_s(x)$ (MPa) - Elemento integro.

La Figura 6.16 riporta, invece, le tensioni di trazione nella barra d'acciaio al passo n.53 relativo al processo di formazione della fessura, mentre la Figura 6.17 descrive le medesime tensioni al termine del processo incrementale (passo n.90).

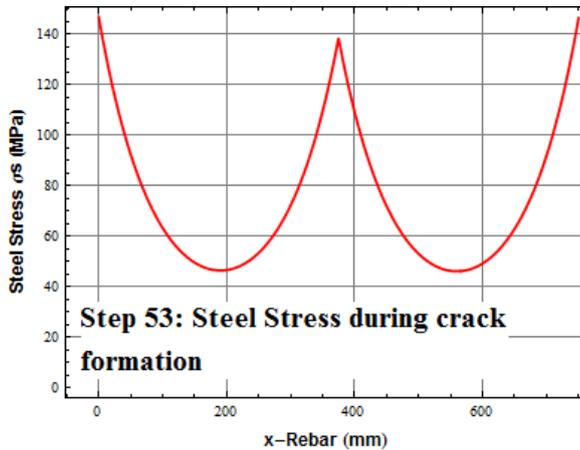


Figura 6.16: Tensioni barra acciaio $\sigma_s(x)$ (MPa) - Elemento fessurato.

Nel grafico in Figura 6.16 si può osservare il trasferimento delle tensioni dal calcestruzzo alla barra in acciaio in corrispondenza del crack; in tal senso, nel grafico in Figura 6.17, si può vedere come la tensione di trazione nell'acciaio in mezzeria abbia eguagliato quella agli estremi, evidenziando come la fessura sia in questo caso libera da tensioni.

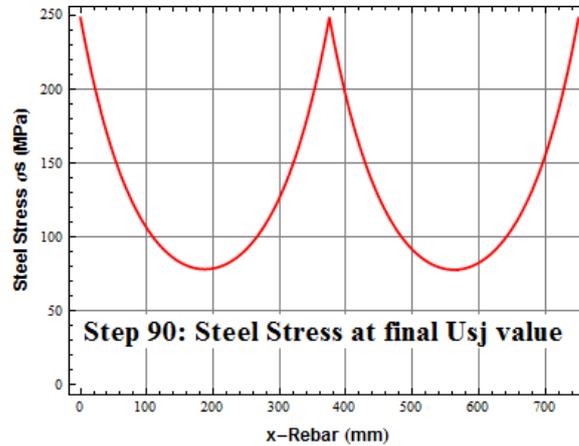


Figura 6.17: Tensioni barra acciaio $\sigma_s(x)$ (MPa) - Elemento fessurato.

Raggiunto il nuovo livello di carico P_s , corrispondente al valore di $U_S(L_1+L_2)$ pari a 0.30 mm, la tensione nel calcestruzzo raggiunge il valore limite che determina la formazione degli ulteriori due cracks ($\sigma_c = f_{ct}$) nelle sezioni di mezzeria dei due sub-elementi.

La discontinuità forte caratterizzata dalla presenza della frattura ci permette di calcolare l'ampiezza di quest'ultima coerentemente con le regole della frattura coesiva.

Si riporta in Figura 6.18 il grafico relativo all'evoluzione dell'ampiezza della fessura, intesa come spostamenti relativi tra i due nodi interni nel calcestruzzo, in relazione allo spostamento incrementale impresso alla barra di acciaio al grado di libertà esterno 3. Si nota come prima della formazione della frattura l'ampiezza abbia dimensione nulla per poi aumentare repentinamente in maniera non lineare in corrispondenza del raggiungimento della tensione limite per il calcestruzzo nella sezione di mezzeria, dissipando energia nel processo di formazione;

il tratto finale ad andamento pressoché lineare è regolato dall'allungamento della barra in acciaio nella fessura ormai libera da tensioni (v. Figura 6.18).

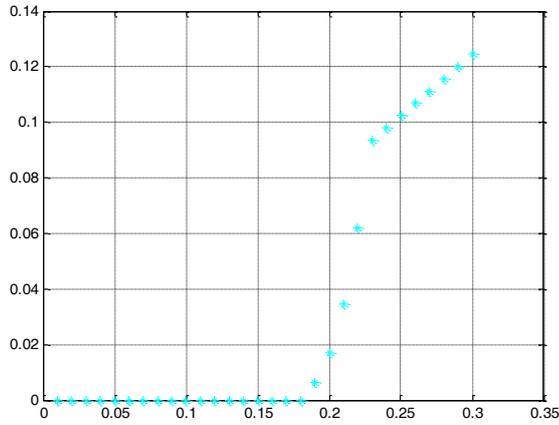


Figura 6.18: Ampiezza fessura w (mm) in funzione di U_{sj} (mm).

In Figura 6.19 viene tracciato il grafico F_{sj} (N) - U_{sj} (mm) riportante in ordinate la variazione del carico sulla barra in acciaio ed in ascissa l'allungamento impresso alla stessa.

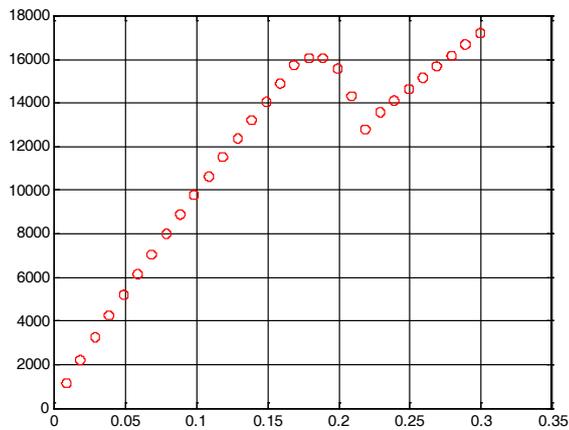


Figura 6.19: Grafico F_{sj} (N) - U_{sj} (mm).

Inoltre, al fine di osservare come l'energia di frattura sia un parametro importante per descrivere il comportamento del provino in fase di crack, si riportano nei grafici seguenti le curve forza - spostamento relative ad uno stesso provino, con uguale percentuale di armatura, ma assumendo diversi valori di energia di frattura G_F (v. Figure 6.20, 6.21, 6.22 e 6.23); al crescere di quest'ultima diventa più grande l'area sottesa dalla porzione di curva relativa alla fase di formazione del crack, riducendosi la sub-verticalità del suddetto tratto.

L'andamento qualitativo appare significativamente diverso da quello riportato in [106], che presenta nella fase di formazione della fessura un tratto orizzontale; si può osservare, dunque, che dopo il primo crack è importante studiare il comportamento non lineare del "cracked concrete" a trazione, dopo che questo raggiunge il valore f_{ct} ; questa fase di softening viene individuata dalla molla non lineare di rigidezza K_C inserita all'interno della discontinuità. Per ogni passo di carico/spostamento, tale rigidezza è correlata, attraverso una relazione non lineare, all'energia di frattura G_F fino al punto in cui l'apertura fittizia della fessura w raggiunge un valore tale che la frattura diventa di tipo discreto e libera da tensioni.

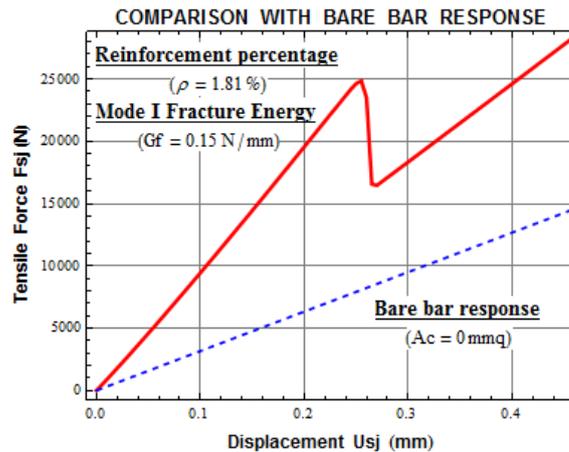


Figura 6.20: Grafico F_{sj} (N) - U_{sj} (mm).

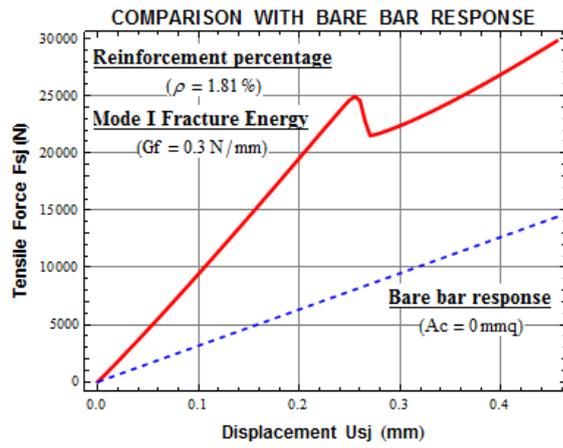


Figura 6.21: Grafico F_{sj} (N) - U_{sj} (mm).

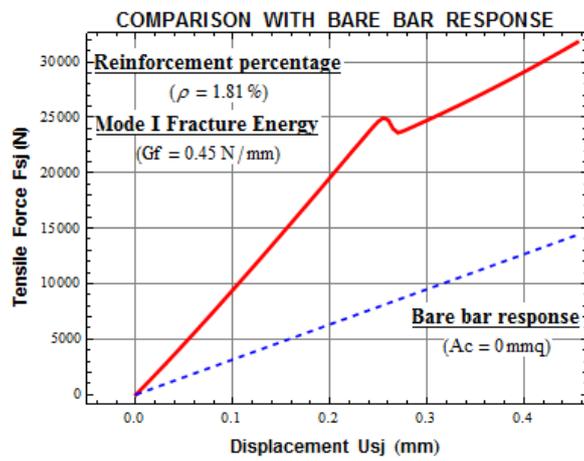


Figura 6.22: Grafico F_{sj} (N) - U_{sj} (mm).

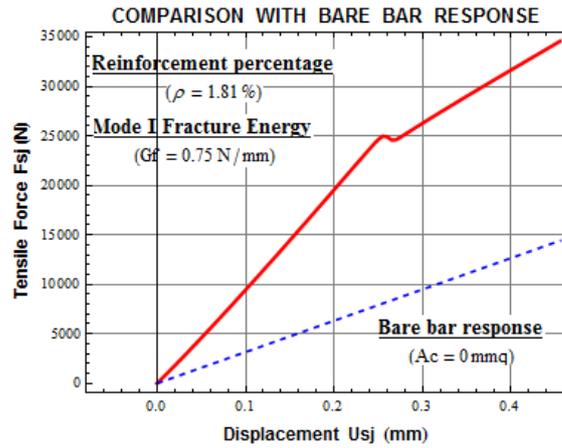


Figura 6.23: Grafico F_{Sj} (N) - U_{Sj} (mm).

Altri parametri rilevanti nello sviluppo del modello numerico sono le caratteristiche geometriche del provino ed, in particolar modo, la percentuale meccanica di armatura, che regola la rigidità del sistema prima e dopo la frattura. Si riporta nella Figura 6.24 la variazione della risposta globale dell'elemento composito, in funzione della percentuale di armatura prevista, potendosi notare in essa un aumento della rigidità del sistema all'aumento della predetta percentuale.

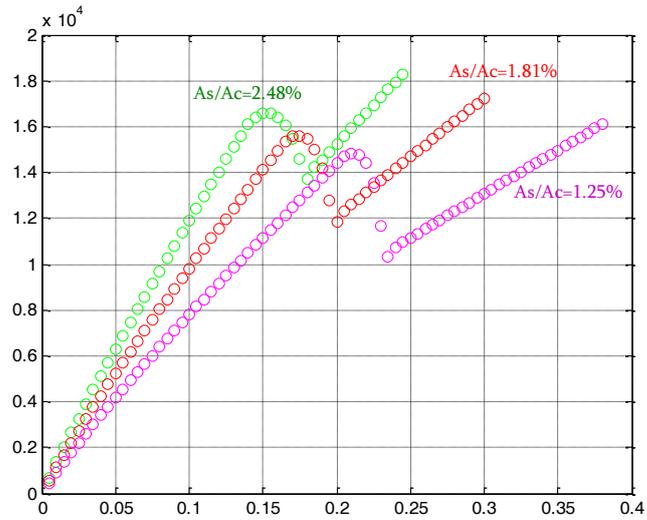


Figura 6.24: Grafico F_{Sj} (N) - U_{Sj} (mm) al variare di ρ.

Tra le applicazioni numeriche è stato effettuato anche il confronto con casi sperimentali presenti in letteratura.

In particolare, si riporta il confronto con i *risultati numerici* di Prasad et al. (2002) in [76] ed i *risultati sperimentali* di Doerr (1980) riportati anche in [49].

Per le caratteristiche geometriche e meccaniche del provino considerato si sono utilizzati i seguenti valori: $L_{SPE} = 500$ mm, $\Phi_S = 16$ mm e $\Phi_C = 150$ mm. La geometria dell'elemento, così scelta, corrisponde ad una percentuale geometrica di armatura pari a $\rho = 1.15\%$.

Le caratteristiche meccaniche dei materiali base (acciaio e calcestruzzo) scelti per il provino sono riportate nella Tabella 6.3

Tabella 6.3: Parametri meccanici materiali base.

ACCIAIO		
f_y	420	MPa
f_{se}	353	MPa
E_s	205000	MPa
E_{SH}	2050	MPa
CALCESTRUZZO		
f_{CK}	46.50	MPa
f_c	37.20	MPa
E_c	35000	MPa
f_{CT}	2.70	MPa
G_F	0.086	Nmm/mmq

I parametri che descrivono il legame costitutivo dell'interfaccia tra i materiali base sono riportati nella Tabella 6.4.

Tabella 6.4: Parametri meccanici interfaccia.

INTERFACCIA ACCIAIO - CALCESTRUZZO		
τ_{MAX}	11.93	MPa
S_1	0.3	mm
S_2	0.3	mm

S_3	7.5	mm
-------	-----	----

L'analisi è stata spinta fino alla formazione e all'apertura della prima fessura, per poi continuare con gli incrementi di spostamento impresso.

Relativamente al predetto confronto con i risultati reperiti in letteratura [49,76], le curve presentate nella Figura 6.25 mostrano la distribuzione dello sforzo di trazione nella barra di armatura per un livello di carico basso (20 kN), per quello che porta alla formazione della fessura nella sezione di mezzeria del provino (40 kN) e per quello (pari a 71 kN) che porta la tensione nella barra, alle estremità e nella sezione che attraversa la fessura, prossima al limite elastico; in quest'ultimo viene raggiunta la simmetria nel diagramma di distribuzione delle tensioni.

I risultati nelle tre fasi indicate sopra sono riportati con riferimento a metà della barra in acciaio.

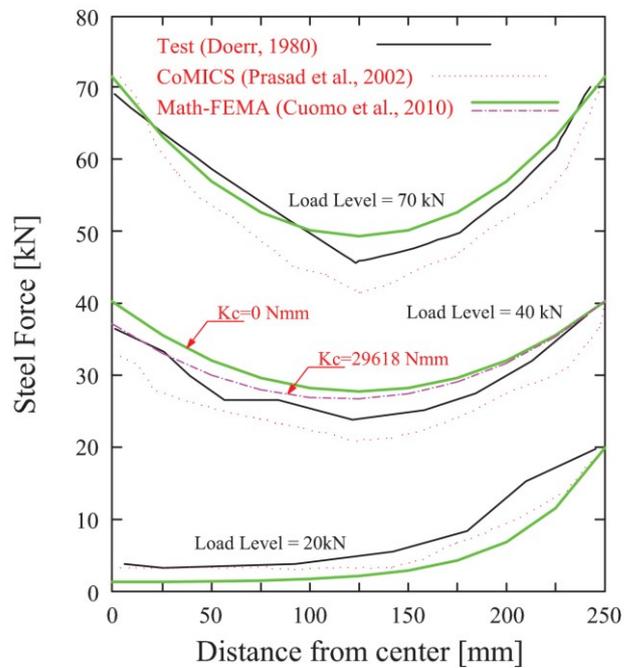


Figura 6.25: Confronto con risultati numerici in [76] (Prasad M.V.K.V. et al., 2002).

Per tale caso si riporta, infine, anche la curva F_{Sj} (N) - U_{Sj} (mm).

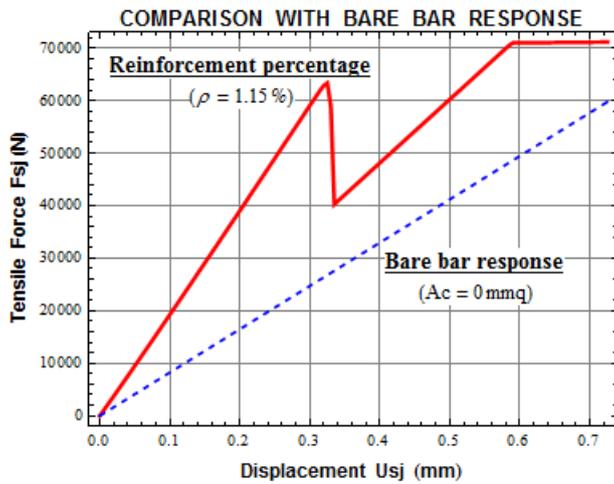


Figura 6.26: Grafico F_{Sj} (N) - U_{Sj} (mm).

Con il provino di lunghezza $L_{SPE} = 750$ mm ($\Phi_s = 12$ mm - $\Phi_c = 90$ mm), ma con un energia di frattura del calcestruzzo di modo I pari a 0.0662 Nmm/mm², è stata effettuata l'applicazione numerica riportata in [18], i cui risultati sono riportati nelle Figure 6.27, 6.28 e 6.29.

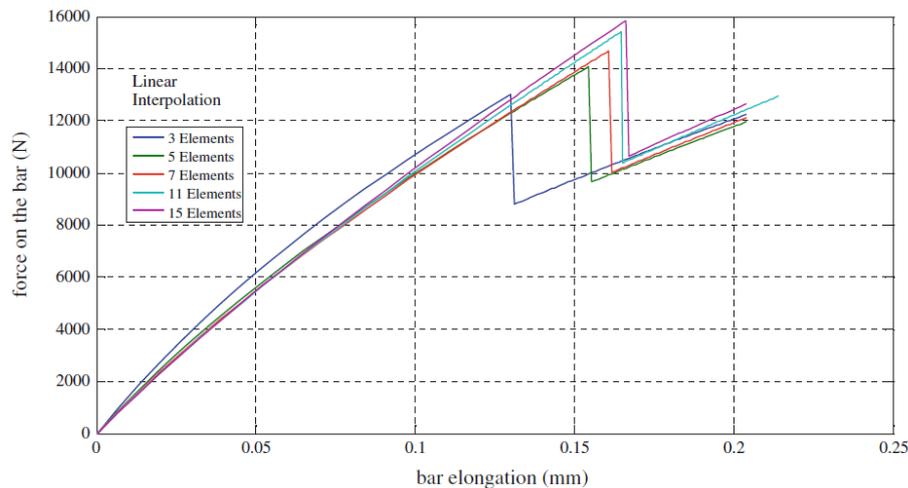


Figura 6.27: Grafico F_{Sj} (N) - U_{Sj} (mm) con funzioni interpolanti lineari.

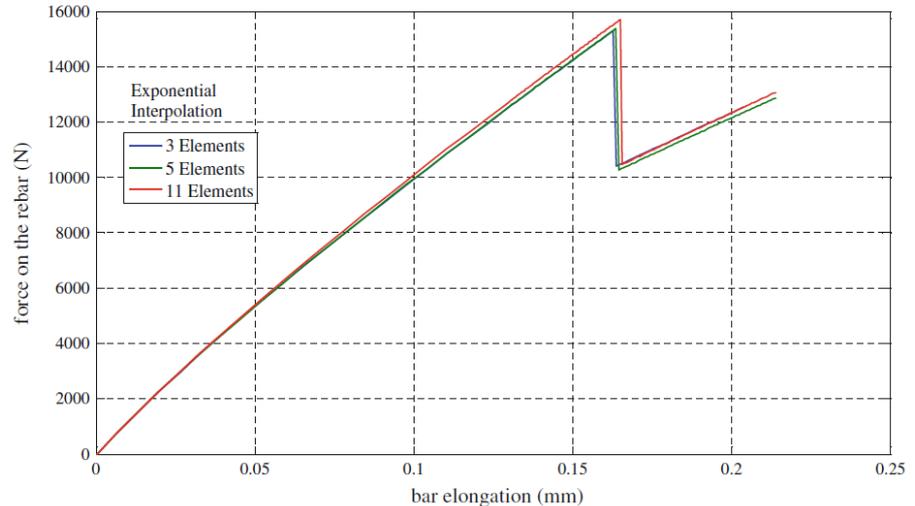


Figura 6.28: Grafico F_{Sj} (N) - U_{Sj} (mm) con funzioni interpolanti esponenziali.

Nella Figura 6.27 è possibile notare come nel caso dell'utilizzo di funzioni interpolanti di tipo lineare, già a partire da una discretizzazione a cinque elementi, la risposta del sistema varia lievemente all'aumentare della discretizzazione.

Al contrario, se si utilizzano funzioni interpolanti di tipo esponenziale, la risposta non varia con l'infittimento della discretizzazione, ponendosi in risalto in questo caso l'indipendenza dalla mesh, come è possibile rilevare nelle Figure 6.28 e 6.29.

Nei tratti che precedono la formazione della frattura, è evidente il comportamento non lineare dovuto alle relazioni costitutive non lineari per il legame di aderenza - scorrimento tra l'acciaio ed il calcestruzzo.

L'utilizzo di funzioni interpolanti legate alla specifica tipologia del problema, nate ad esempio da soluzioni esatte del problema dell'equilibrio ancorchè in forma approssimata mediante linearizzazione, producono come risultato fondamentale un aumento della velocità di convergenza.

La Figura 6.29 mostra il grafico dell'apertura w della fessura in funzione dell'allungamento della barra, nel caso di funzioni interpolanti di tipo esponenziale.

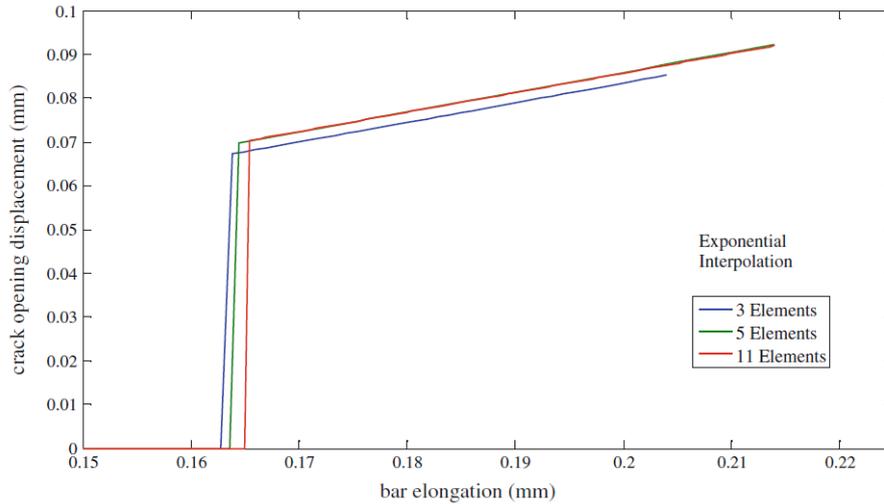


Figura 6.29: Ampiezza fessura w (mm) in funzione di U_{Sj} (mm).

- Caso 2°) *Modello B* - provino asimmetrico monodimensionale a comportamento assiale bloccato all'estremità sinistra del calcestruzzo (nodo i , grado di libertà 2), cui vengono impressi spostamenti incrementali (a controllo di spostamento) sull'estremità destra della barra in acciaio (nodo j , grado di libertà 3), simulando la fase iniziale di una prova di estrazione della barra (pull-out).

Il modello studiato è rappresentato fisicamente nella seguente Figura 6.30, la quale mostra le condizioni di vincolo e di spostamento incrementale impresso.

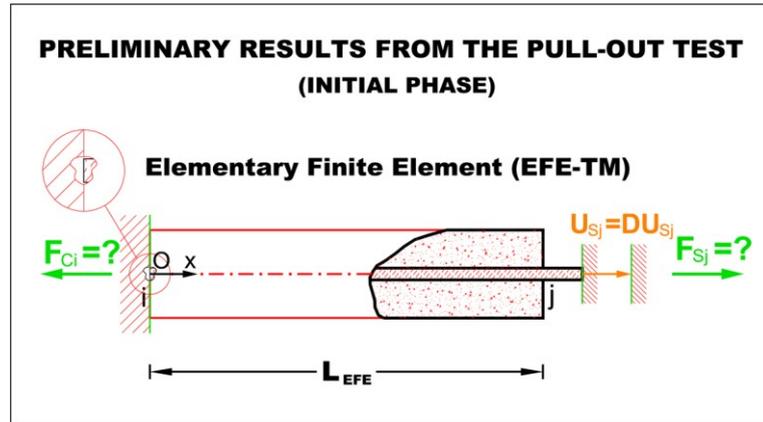


Figura 6.30: Provino relativo al Caso di Studio 2° - Modello B.

Il modello meccanico del Caso 2° è riportato nella Figura 6.31, che illustra la scelta dei gradi di libertà e le condizioni di vincolo dell'elemento di tipo uncracked.

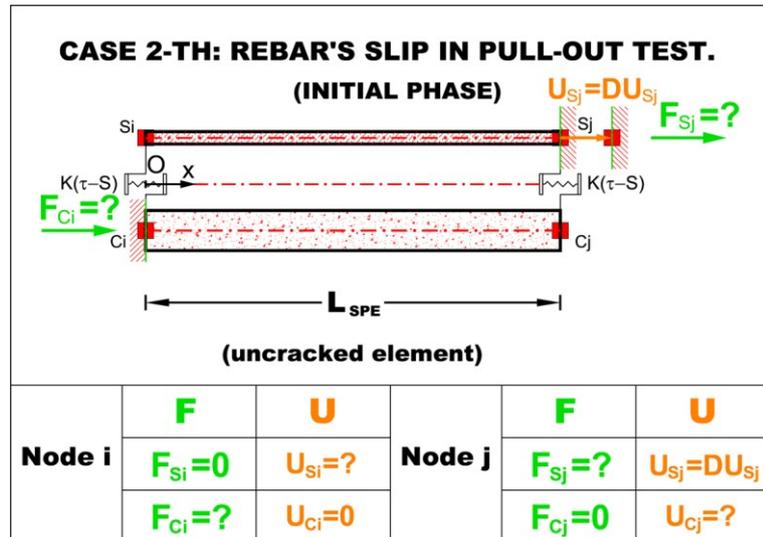


Figura 6.31: Modello meccanico del Caso di Studio 2° - Modello B.

Per le caratteristiche geometriche e meccaniche del provino si sono utilizzati i seguenti valori: $L_{SPE} = 500$ mm, $\Phi_S = 12 - 20$ mm e $\Phi_C = 160$ mm.

La geometria dell'elemento, così scelta, corrisponde ad una percentuale geometrica di armatura pari a $\rho = 0.56 - 1.59\%$.

Le caratteristiche meccaniche dei materiali base (acciaio e calcestruzzo) scelti per il provino sono riportate nella Tabella 6.5.

Tabella 6.5: Parametri meccanici materiali base.

ACCIAIO		
f_y	420	MPa
E_s	210000	MPa
E_{SH}	10000	MPa
CALCESTRUZZO		
f_{CK}	22.95	MPa
E_c	29000	MPa

I parametri che descrivono il legame costitutivo dell'interfaccia tra i materiali base sono riportati nella Tabella 6.6.

Tabella 6.6: Parametri meccanici interfaccia.

INTERFACCIA ACCIAIO - CALCESTRUZZO		
τ_{MAX}	12.65	MPa
S_1	0.6	mm
S_2	0.6	mm
S_3	1.0	mm

L'analisi è stata spinta fino alla formazione e l'apertura della prima fessura. Di seguito si riportano nelle Figure 6.32 e 6.33 i diagrammi forza - spostamento ottenuti rispettivamente per il provino con barra in acciaio di diametro $\Phi_s = 12$ mm e con diametro $\Phi_s = 20$ mm.

La Figura 6.32 mostra come nel caso di piccolo diametro della predetta barra, la crisi avvenga per plasticizzazione dell'acciaio e per degrado delle caratteristiche di aderenza all'interfaccia tra la stessa barra ed il calcestruzzo.

Di contro, nel caso di grande diametro, la Figura 6.33 mostra come

la crisi avvenga nella sezione di calcestruzzo dove viene raggiunta la tensione massima di trazione (nodo iniziale i), con un valore di carico ultimo sulla barra in acciaio più elevato, ma raggiunto in corrispondenza di uno spostamento inferiore.

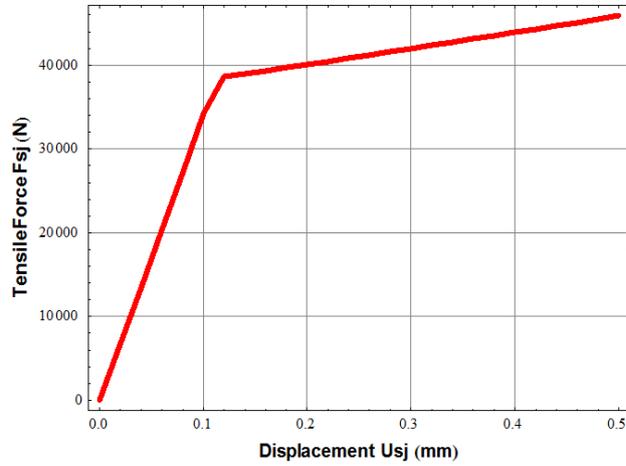


Figura 6.32: Grafico F_{sj} (N) - U_{sj} (mm).
 ($F_{sjU} = 46.3$ kN - $U_{sjU} = 0.52$ mm)

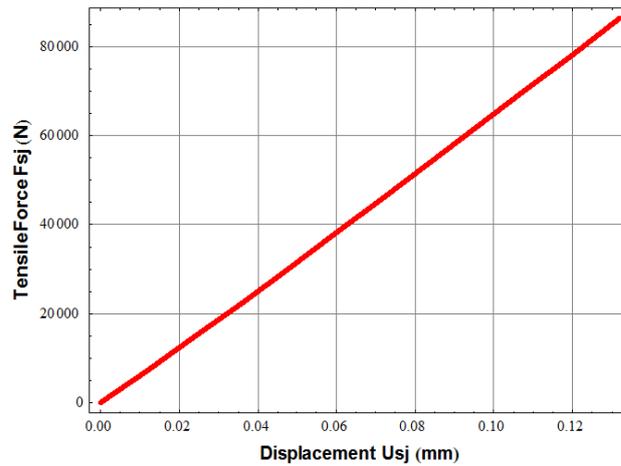


Figura 6.33: Grafico F_{sj} (N) - U_{sj} (mm).
 ($F_{sjU} = 96.3$ kN - $U_{sjU} = 0.14$ mm)

È stata condotta un'applicazione numerica in queste condizioni di vincolo e di carico/spostamento impresso (Modello B), ma con le caratteristiche geometriche e meccaniche del provino seguenti: $L_{SPE} = 750$ mm, $\Phi_S = 12$ mm e $\Phi_C = 90$ mm.

La geometria dell'elemento, così scelta, corrisponde ad una percentuale geometrica di armatura pari a $\rho = 1.81\%$.

Le caratteristiche meccaniche dei materiali base (acciaio e calcestruzzo) scelti per il provino sono riportate nella Tabella 6.7.

Tabella 6.7: Parametri meccanici materiali base.

ACCIAIO		
f_y	420	MPa
E_s	210000	MPa
E_{SH}	10000	MPa
CALCESTRUZZO		
f_{CK}	22.95	MPa
E_c	29000	MPa

I parametri che descrivono il legame costitutivo dell'interfaccia tra i materiali base sono riportati nella Tabella 6.8.

Tabella 6.8: Parametri meccanici interfaccia.

INTERFACCIA ACCIAIO - CALCESTRUZZO		
τ_{MAX}	11.98	MPa
S_1	1.0	mm
S_2	3.0	mm
S_3	5.0	mm

Alla fine del processo incrementale, in cui è stato previsto un incremento monotono degli spostamenti del nodo j della fibra di acciaio, con ΔU_{Sj} pari a 0.01 mm, che ha portato alla formazione della prima frattura corrispondente ad un $U_s(L)$ pari a 0.10 mm, si sono ottenuti tramite l'algoritmo proposto i campi di spostamento della fibra di accia-

io U_s e del calcestruzzo U_c , determinando, inoltre, i relativi scorrimenti. Nelle Figure 6.34, 6.35 e 6.36 è, quindi, possibile osservare tali campi di spostamento per la barra di acciaio, il calcestruzzo e gli scorrimenti che hanno portato alla formazione del primo crack. Si può notare come il comportamento ottenuto era quello previsto, con spostamento nullo per quanto riguarda il calcestruzzo al nodo i vincolato e spostamento imposto al nodo j della barra di acciaio.

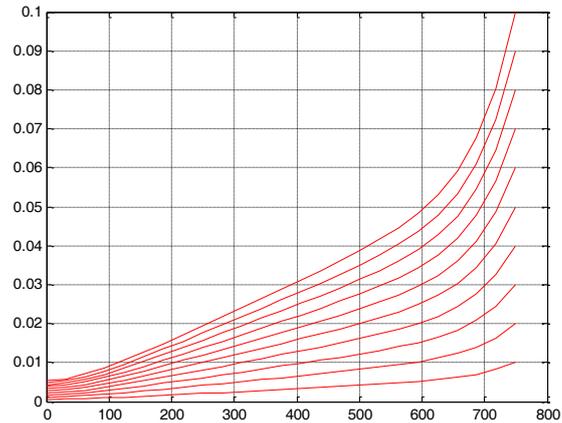


Figura 6.34: Spostamenti barra acciaio $U_s(x)$ (mm).

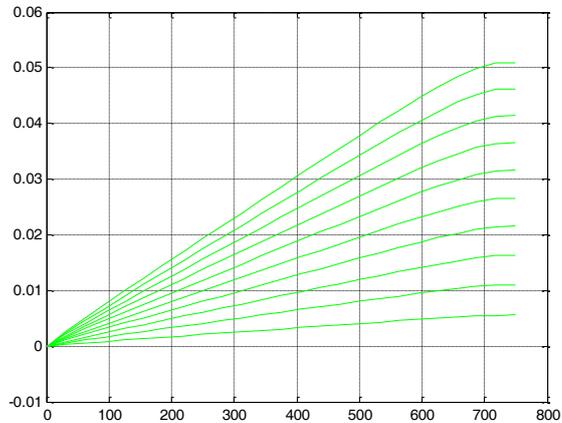


Figura 6.35: Spostamenti del calcestruzzo $U_c(x)$ (mm).

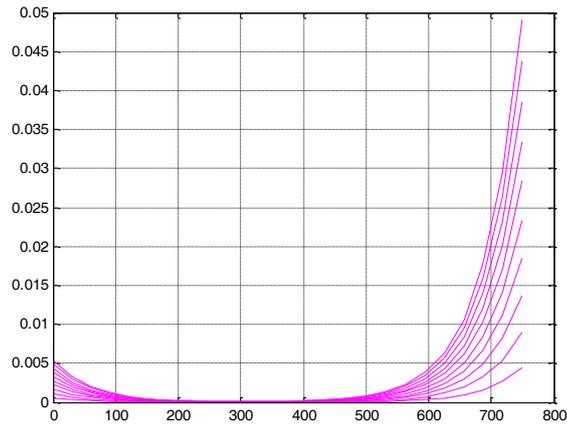


Figura 6.36: Scorrimenti tra acciaio e calcestruzzo $S(x)$ (mm).

Ottenuto il campo di spostamenti per ogni step di carico, utilizzando i legami costitutivi adottati per il modello, è stato possibile ricavare prima il campo deformativo e poi quello tensionale per l'acciaio e per il calcestruzzo. Nelle Figure 6.37, 6.38 e 6.39 è possibile osservare come variano per la fibra di acciaio e per il calcestruzzo le tensioni nel modello proposto, ovvero la configurazione degli sforzi che si presentano lungo lo sviluppo totale dell'elemento al crescere della sollecitazione di trazione. Si osserva, quindi, il comportamento atteso, cioè che la sezione interessata dalla fessurazione, con σ che raggiunge il valore limite, è quella vincolata del calcestruzzo. Si ha, perciò, un andamento crescente delle tensioni nel calcestruzzo a partire dal nodo non vincolato. Allo stesso modo si ha un andamento decrescente per le tensioni della barra a partire dall'estremo soggetto agli incrementi di spostamento controllati.

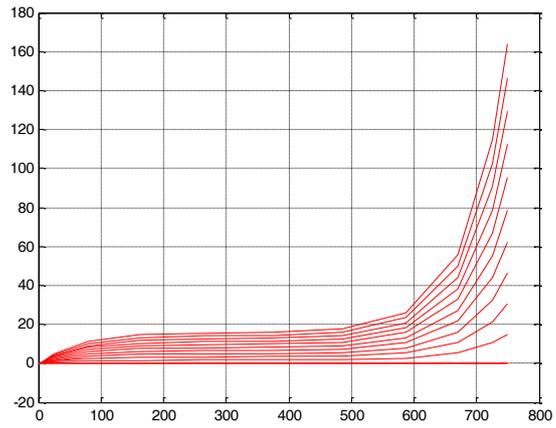


Figura 6.37: Tensioni barra acciaio $\sigma_s(x)$ (MPa).

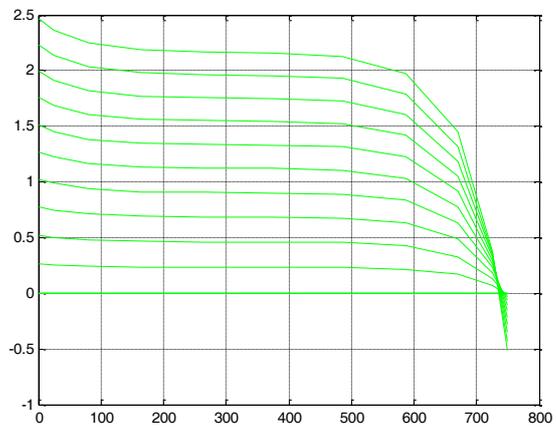


Figura 6.38: Tensioni nel calcestruzzo $\sigma_c(x)$ (MPa).

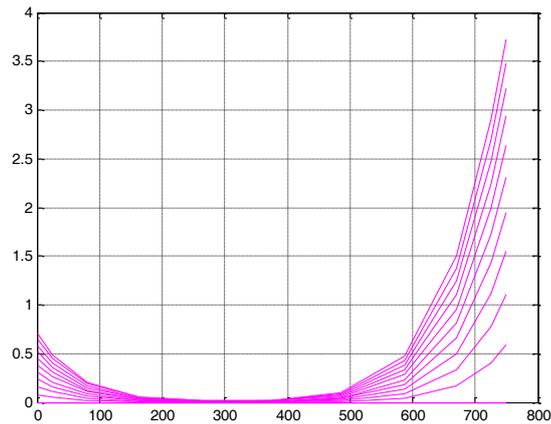


Figura 6.39: Tensioni di aderenza $\tau(x)$ (MPa).

In quest'ultimo caso, non viene spinta ulteriormente l'analisi in quanto si è registrata la formazione della frattura in uno dei nodi del modello, determinando una lunghezza nulla per la dimensione di uno dei due sub-elementi che si sarebbero creati.

6.3. L'elemento soggetto a flessione ed i relativi risultati preliminari

Nel caso di elemento monodimensionale soggetto a flessione, si è analizzato il seguente caso con le relative condizioni al contorno e di esso si riportano i risultati ritenuti più significativi.

- **Caso 3°) Modello C** - provino simmetrico monodimensionale a comportamento flessionale bloccato all'estremità sinistra della barra inferiore in acciaio (nodo i, grado di libertà 1), semplicemente appoggiato alle due estremità della trave in calcestruzzo (nodo i, grado di libertà 5 e nodo j, grado di libertà 10), cui vengono impressi spostamenti incrementali (a controllo di spostamento) sull'estremità destra della barra in acciaio (nodo j, grado di libertà 6), con risultati fino alla fase di incipiente formazione della fessura discreta.

Il modello studiato è rappresentato fisicamente nella Figura 6.40, la quale mostra le condizioni di vincolo e di spostamento incrementale impresso.

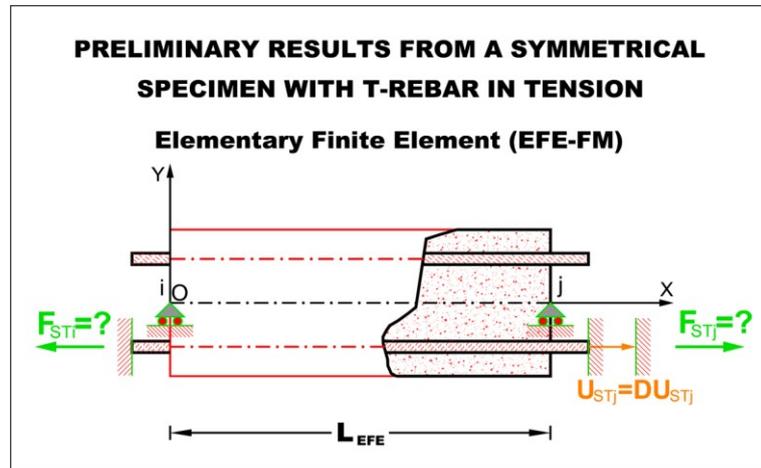


Figura 6.40: Provino relativo al Caso di Studio 3° - Modello C.

Il modello meccanico del Caso 3° è riportato nella Figura 6.41, che illustra la scelta dei gradi di libertà e le condizioni di vincolo dell'elemento di tipo uncracked.

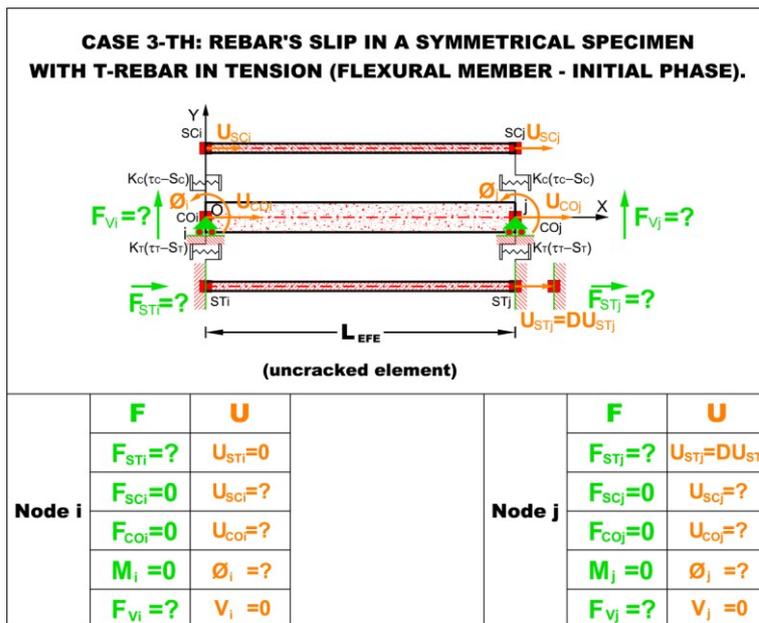


Figura 6.41: Modello meccanico del Caso di Studio 3° - Modello C.

Per le caratteristiche geometriche e meccaniche del provino si sono utilizzati i seguenti valori: $L_{SPE} = 1000$ mm, $b = 300$ mm, $h = 400$ mm, $c = 50$ mm, $\Phi_{ST} = \Phi_{SC} = 14$ mm ed $n_{fst} = n_{fsc} = 3$.

La geometria dell'elemento, così scelta, corrisponde ad una percentuale geometrica di armatura pari a $\rho_{ST} = \rho_{SC} = 2.81\%$.

Le caratteristiche meccaniche dei materiali base (acciaio e calcestruzzo) scelti per il provino sono riportate nella Tabella 6.9

Tabella 6.9: Parametri meccanici materiali base.

ACCIAIO		
f_y	460	MPa
E_s	210000	MPa
E_{SH}	10000	MPa
CALCESTRUZZO		
f_{CK}	22.95	MPa
E_c	29000	MPa
f_{CT}	3.10	MPa

G_F	0.086	Nmm/mmq
-------	-------	---------

I parametri che descrivono il legame costitutivo dell'interfaccia tra i materiali base sono riportati nella Tabella 6.10.

Tabella 6.10: Parametri meccanici interfaccia.

INTERFACCIA ACCIAIO - CALCESTRUZZO		
τ_{MAX}	12.65	MPa
S_1	1.0	mm
S_2	3.0	mm
S_3	50.0	mm

L'analisi è stata spinta fino alla fase di incipiente formazione della prima fessura; essendo il modello di tipo simmetrico, la prima fessura si forma nella sezione di mezzeria dell'elemento.

Il modello meccanico del Caso 3° nelle condizioni di attivazione dell'interfaccia immersa nel calcestruzzo è riportato nella Figura 6.42, che illustra la scelta dei gradi di libertà e le condizioni di vincolo dell'elemento di tipo cracked.

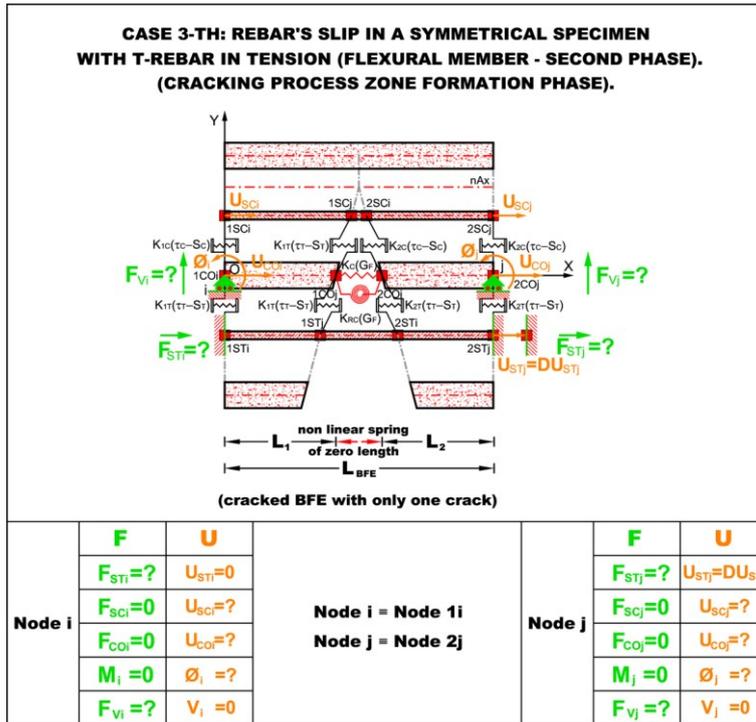


Figura 6.42: Modello meccanico del Caso di Studio 3° - Modello C cracked.

Nel processo incrementale, in cui è stato previsto un incremento monotono degli spostamenti del nodo j della fibra di acciaio inferiore, con ΔU_{STj} pari a 0,003 mm, si sono ottenuti tramite l’algoritmo proposto i campi di spostamento delle fibre di acciaio U_{ST} e U_{SC} e del calcestruzzo U_C , determinando, inoltre, i relativi scorrimenti.

Nelle Figure 6.43 e 6.44 è, quindi, possibile osservare alcuni risultati preliminari circa il comportamento dell’elemento monodimensionale soggetto a flessione, con particolare riferimento alle curvature ed alle tensioni nel calcestruzzo che portano alla incipiente formazione della prima frattura.

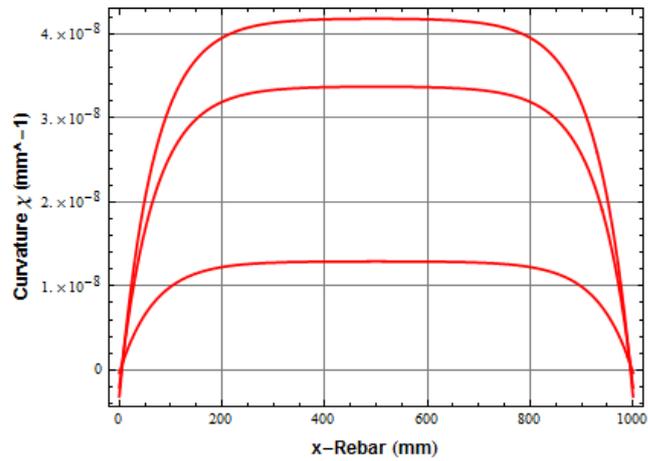


Figura 6.43: Curvatura $\chi(x)$ (mm^{-1}).

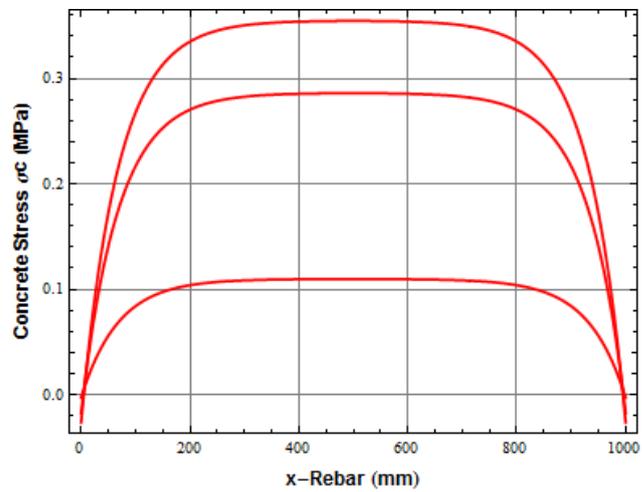


Figura 6.44: Tensione nella fibra inferiore del calcestruzzo $\sigma_c(x, -h/2)$ (MPa).

Dall'equilibrio nella sezione, è stata ricavata la legge del momento flettente lungo l'ascissa x del sistema di riferimento scelto per l'elemento e la stessa può scriversi come segue:

$$M(x) = E_c I_c \chi(x) + A_{ST} \sigma_{ST}(x) \bar{y}_{sf} - A_{SC} \sigma_{SC}(x) \bar{y}_{sf}. \quad 6.1$$

Nella Figura 6.45 viene riportato il grafico del momento flettente

ad uno dei passi incrementali; in esso si può notare come, nonostante la curvatura e la tensione di trazione nella fibra inferiore del calcestruzzo presentino un valore massimo nella sezione di mezzeria dell'elemento, il momento flettente, calcolato con la (6.1) in accordo con l'equilibrio delle forze in gioco, si presenta costante lungo in tutte le sezioni.

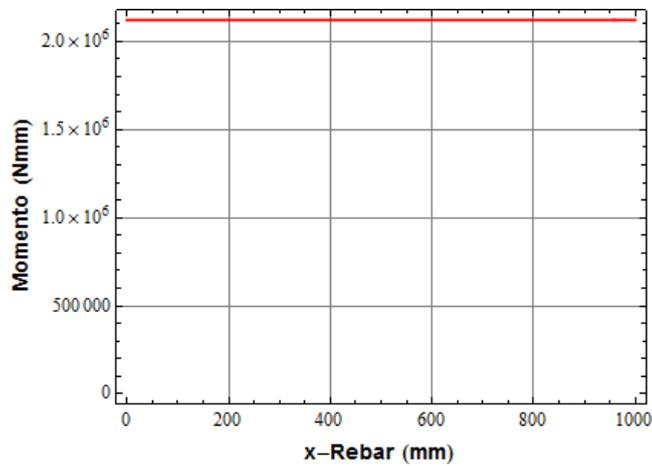


Figura 6.45: Momento flettente $M(x)$ (Nmm).

Le Figure 6.46 e 6.47 mostrano rispettivamente i diagrammi della rotazione e dello spostamento verticale al passo di carico/spostamento scelto.

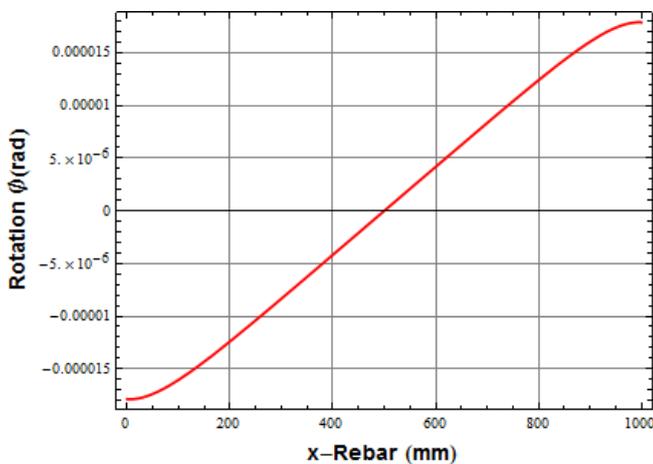


Figura 6.46: Rotazione $\Phi(x)$ (mm).

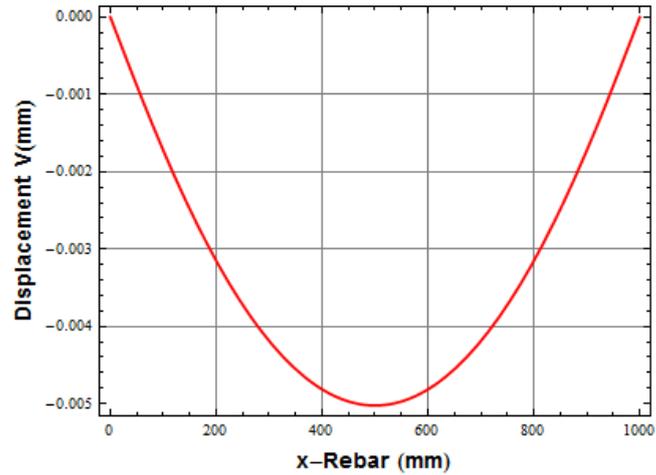


Figura 6.47: Spostamento verticale $V(x)$ (mm).

Inoltre, le Figure 6.48, 6.49 e 6.50 mostrano, in via esemplificativa, rispettivamente i diagrammi della tensione di trazione nella barra in acciaio inferiore, di quella di compressione nella barra superiore e la tensione normale del calcestruzzo nella fibra baricentrica della sezione ad uno dei passi di carico/spostamento.

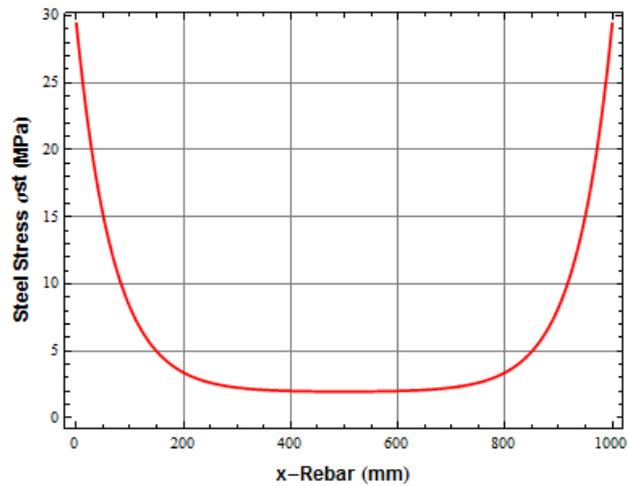


Figura 6.48: Tensioni nell'acciaio $\sigma_{ST}(x)$ (MPa).

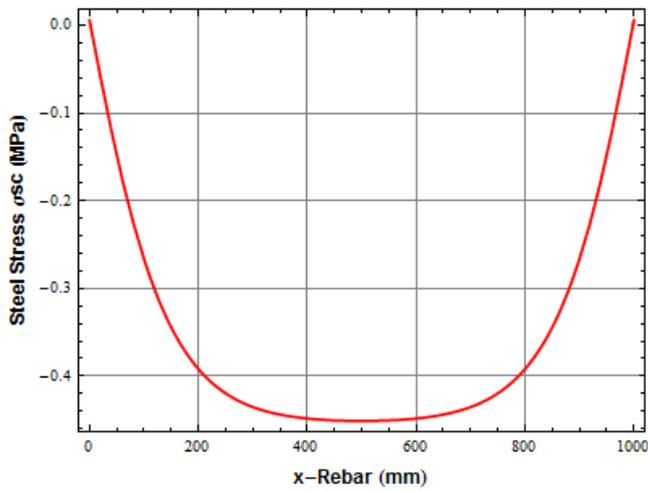


Figura 6.49: Tensioni nell'acciaio $\sigma_{sc}(x)$ (MPa).

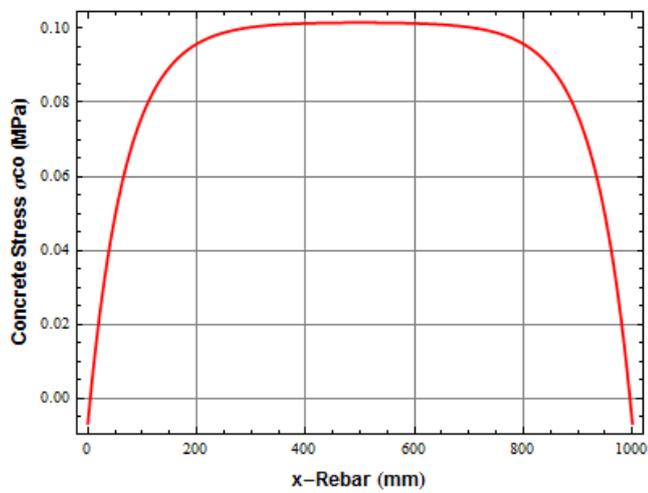
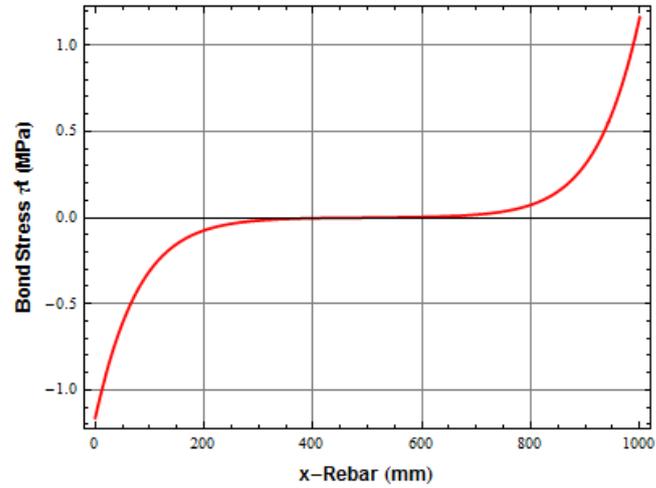
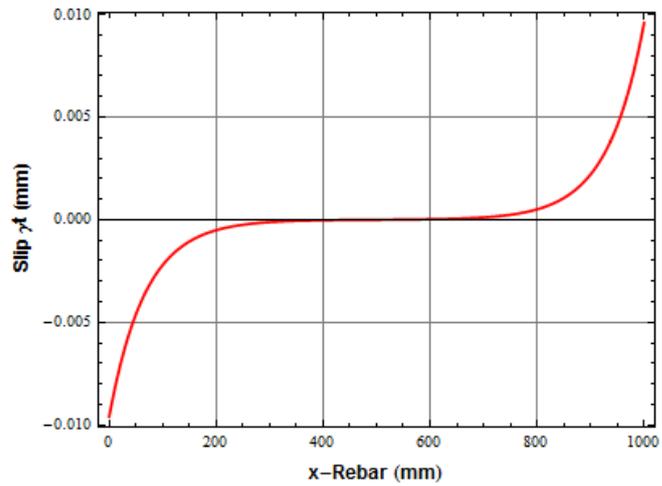


Figura 6.50: Tensioni nel calcestruzzo $\sigma_{co}(x)$ (MPa).

Infine, le Figure 6.51 e 6.52 mostrano, sempre in via esemplificativa, rispettivamente i diagrammi della tensione di aderenza nella barra in acciaio inferiore e del corrispondente scorrimento con il calcestruzzo, ad uno dei passi di carico/spostamento.

Figura 6.51: Tensioni di aderenza $\tau_t(x)$ (MPa).Figura 6.52: Scorrimento $S_\tau(x)$ (mm).

6.4. Considerazioni sulla convergenza

Negli esempi svolti in questa tesi, l'orientazione della fessura, una volta che si è attivata all'interno del singolo elemento, è stata considerata di

tipo fisso. Come è noto tale formulazione a frattura fissa (*fixed crack*), può comportare problemi di convergenza.

Nei casi analizzati il predetto problema non si è verificato, ma tale aspetto computazionale deve essere indagato in modo più approfondito al fine di migliorare eventualmente gli algoritmi di calcolo realizzati.

Come indicato nel paragrafo precedente, nel caso di provino mono-assiale soggetto a trazione, la dipendenza dalla discretizzazione è apparsa solo con l'utilizzo di funzioni interpolanti di tipo lineare, per esempio già a partire da una discretizzazione con meno di cinque elementi.

Se si utilizzano, invece, funzioni interpolanti di tipo esponenziale, la risposta non varia con l'infittimento della discretizzazione, ponendosi in risalto in questo caso l'indipendenza dalla mesh.

È possibile dedurre, in tal caso, che l'utilizzo di funzioni interpolanti legate alla specifica tipologia del problema, nate ad esempio da soluzioni esatte del problema dell'equilibrio ancorchè in forma approssimata mediante linearizzazione, producono come risultato fondamentale un aumento della velocità di convergenza.

Avendo comunque scelto di utilizzare, nella soluzione del problema non lineare, il Metodo di Newton - Raphson modificato, è stata in effetti osservata una velocità di convergenza, calcolata generalmente sulla norma dei residui delle forze, più lenta e di tipo asintotica lineare e non quadratica come la forma classica del Metodo; con tale scelta sono state, però, eliminate alcune problematiche tipiche del predetto metodo classico.

Riassumendo, nonostante in linea generale la convergenza del Metodo non è garantita in ogni circostanza, essa si verifica normalmente se il vettore di partenza (spostamenti) non è molto discosto dalla soluzione e ciò si può conseguire suddividendo la storia di carico in intervalli di ampiezza non eccessiva, in maniera tale che la prima iterazione rappresenti già una ragionevole approssimazione del valore finale; in tal caso, può essere sufficiente calcolare la matrice di rigidezza tangente all'inizio del passo e mantenerla costante al suo interno.

Attraverso l'esame dei risultati ottenuti nei paragrafi precedenti ed il confronto con quelli tratti dall'uso di funzioni interpolanti lineari, è

stato possibile notare come le tensioni nella barra di acciaio ottenute con le funzioni esponenziali siano continue solo in C^1 all'interfaccia, proprio per le scelte effettuate nel modello trattato. È possibile osservare, inoltre, che l'equilibrio al contorno dell'elemento non risulta soddisfatto, proprio per le peculiarità tipiche degli approcci ad elementi finiti e le approssimazioni che nascono con il loro uso.

6.5. Considerazioni preliminari sulla stabilità della frattura

Nel caso del provino simmetrico di cui al Modello A di lunghezza L_{elem} pari a 750 mm (v. Figura 6.53), fissati i seguenti dati (caratteristiche geometriche e meccaniche del modello):

$$n = \frac{E_S}{E_C} \quad - \quad \rho = \frac{A_S}{A_C} \quad - \quad \Phi_S \quad - \quad G_F \quad - \quad f_{CT}$$

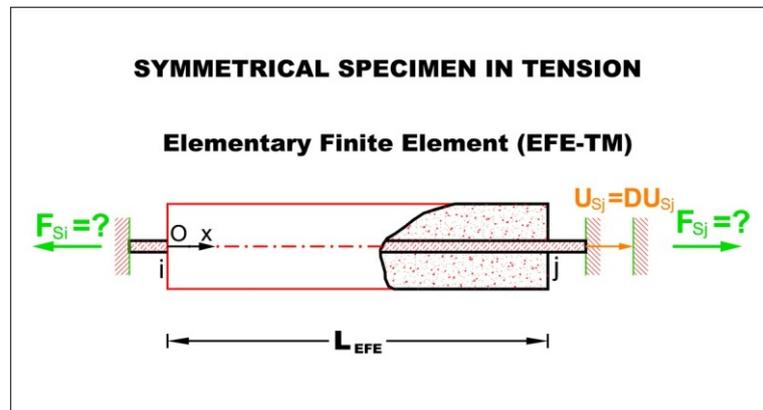


Figura 6.53: Schema di provino simmetrico.

in un'analisi non lineare a controllo di spostamento, dalla fase non fessurata in Figura 6.3 a quella fessurata in Figura 6.4, si è notata la formazione di tre cracks a distanza di $L_{elem} / 4 = 187.5$ mm; ne segue che l'elemento che permette la formazione di un crack in mezzeria ha le seguenti caratteristiche:

$$L_{1elem} = L_{elem} / 2 = 375 \text{ mm.}$$

In un provino con le suddette caratteristiche, in ambito di analisi lineare od incrementale linearizzata nel passo, il parametro α nel legame proposto nel presente lavoro e riportato nel paragrafo 3.5.1., caso del ramo ascendente nel legame τ -S, può scriversi come:

$$\alpha^2 = \frac{G_o \Phi_s}{E_s A_s} (1 + n\rho) > 0 \quad \text{essendo} \quad G_o = G_{\text{init}} = \left. \frac{\partial}{\partial S(x)} \tau[S(x)] \right|_{S(x)=0}$$

Sempre in tale caso lineare, consideriamo il grado di libertà 7 (spostamento del calcestruzzo al primo estremo del secondo tratto del provino con zona di processo attivata) del sistema assemblato a sette gradi di libertà, nella sequenza utilizzata (separazione fra gradi di libertà esterni ed interni per la successiva condensazione statica).

In tale caso il contributo di rigidezza del secondo tratto di provino con zona di processo attivata presenta un valore massimo e può scriversi nella forma seguente:

$$K_{22}^{\text{ITR}} = \beta \left[\frac{1}{n\rho(\alpha L_1)} + \frac{1}{\tanh(\alpha L_1)} \right] \quad \text{essendo} \quad \beta = \frac{E_s A_s \alpha}{1 + n\rho},$$

mentre, il contributo di rigidezza contributo di rigidezza della molla non lineare assume un valore minimo (con segno segno negativo) e può scriversi nella forma seguente:

$$K_{\text{CT}}^{\text{NLS}} = -\frac{A_c f_{\text{CT}}^2}{G_f}.$$

Il termine K_{77} della matrice di rigidezza globale non condensata, quale somma dei due predetti contributi e che per il suo significato fisico deve essere positivo, assume la forma seguente:

$$K_{77}^{\text{GT}} = K_{22}^{\text{ITR}} + K_{\text{CT}}^{\text{NLS}} = \beta \left[\frac{1}{n\rho(\alpha L_1)} + \frac{1}{\tanh(\alpha L_1)} \right] - \frac{A_c f_{\text{CT}}^2}{G_f} > 0.$$

Tale condizione di positività ha il significato di una *Condizione di Stabilità della Frattura* secondo la teoria di Griffith (1921).

La condizione di annullamento del termine K_{77} della matrice di rigidezza globale tangente permette la determinazione del massimo valore della *lunghezza del provino* per la quale è possibile la formazione di una zona di processo ed un successivo crack nella sezione di mezzzeria.

$$\mathbf{K}_{77}^{\text{GT}} = \mathbf{K}_{22}^{\text{ITR}} + \mathbf{K}_{\text{CT}}^{\text{NLS}} = \beta \left[\frac{1}{n \rho (\alpha L_1)} + \frac{1}{\tanh(\alpha L_1)} \right] - \frac{A_c f_{\text{CT}}^2}{G_F} = 0.$$

Dopo alcuni passaggi, si ottiene la seguente equazione:

$$1 - \frac{1+n\rho}{\alpha L_{\text{CH}}} (\alpha L_1) + n\rho \frac{(\alpha L_1)}{\tanh(\alpha L_1)} = 0 \quad 6.2$$

nella quale è stata indicata con

$$L_{\text{CH}} = \frac{E_c G_F}{f_{\text{CT}}^2}.$$

la cosiddetta *Lunghezza Caratteristica*.

Introducendo i valori numerici nei dati del modello (caratteristiche geometriche e meccaniche), la soluzione in forma numerica dell'equazione (6.2) conduce al seguente risultato:

$$L_1 = 376.86 \text{ mm},$$

che rappresenta un valore in linea con quello determinato attraverso l'analisi non lineare condotta nell'applicazione al provino simmetrico di cui al modello A.

Nella Figura 6.54 viene presentata una analogia con un modello semplificato di solo calcestruzzo, che rappresenta una condizione di equilibrio appena dopo l'attivazione del processo di frattura coesiva.

Una perturbazione dalla condizione di equilibrio permette la caratterizzazione delle condizioni che definiscono lo stato di stabilità della frattura, in analogia con la teoria di Griffith (1921), ma tale aspetto deve essere indagato in modo più approfondito al fine di migliorarne l'adattabilità al concetto di lunghezza interna caratteristica nella fessurazione.

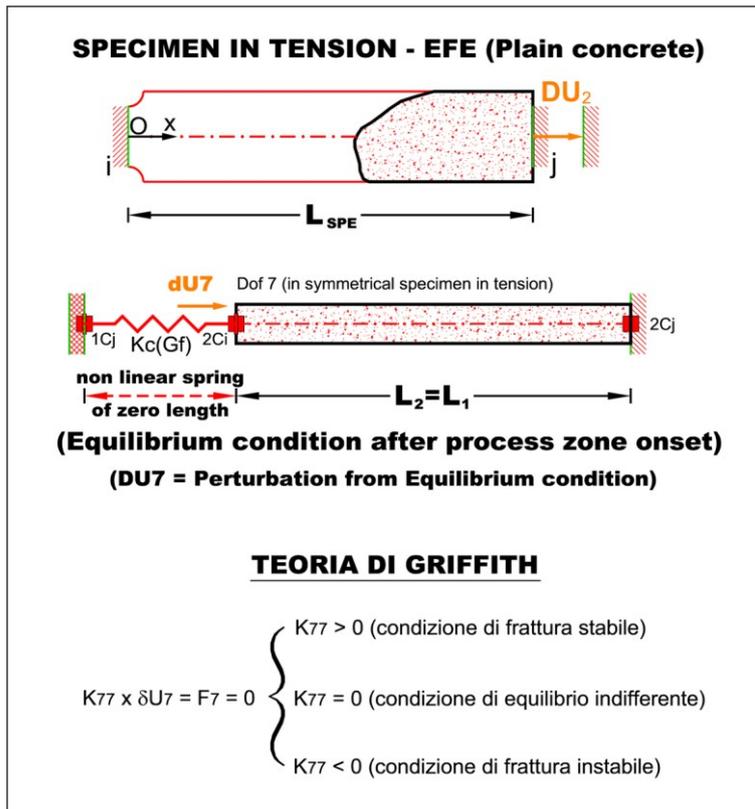


Figura 6.54: Modello semplificato.

Conclusioni

Il modello a fratture discrete proposto per l'analisi non lineare di strutture in conglomerato cementizio armato, includenti il fenomeno dell'aderenza - scorrimento tra l'acciaio ed il calcestruzzo, si è mostrato idoneo ad essere sviluppato ed implementato nel contesto teorico dell'approccio alle discontinuità forti (SDA) dal punto di vista cinematico, del metodo degli elementi con discontinuità immerse (EED) dal punto di vista numerico e del modello di attivazione dell'interfaccia di tipo coesiva (CCM) dal punto di vista costitutivo.

Gli elementi finiti monodimensionali con discontinuità nel campo di spostamento del calcestruzzo, basati sulle ipotesi di trave di Eulero-Bernoulli, di assenza di flessione deviata, di piccoli spostamenti e di piccoli gradienti di spostamento ed, infine, di interazione parziale acciaio - calcestruzzo secondo il modello di Newmark et al. (1951) ai fini della soluzione delle equazioni di equilibrio del problema, sono stati in grado di simulare il comportamento di tiranti e travi in conglomerato armato, interessati dal fenomeno della formazione di fessure discrete nel calcestruzzo.

La legge che lega le tensioni all'interfaccia di discontinuità al salto di spostamento è stata introdotta in maniera esplicita e gli elementi finiti sono stati implementati secondo una strategia numerica facente uso della tecnica di condensazione statica.

Tra i vantaggi della strategia numerica impiegata è possibile evidenziare che non è richiesta una conoscenza a priori della posizione della fessura o l'uso di tecniche di remeshing, può essere escluso l'impiego di una elasticità fittizia iniziale nella legge trazione - separazione che governa l'interfaccia di discontinuità e non è richiesta la necessità di introdurre regole di integrazione ad hoc.

L'approccio adottato ha permesso di ricreare in modo preciso il quadro fessurativo atteso degli elementi indagati, riuscendo a generare il modello discreto in maniera semplice. L'algoritmo numerico sviluppato si è rivelato efficiente, consentendo di raggiungere la soluzione in poche iterazioni.

Sono state condotte numerose analisi non lineari su diversi modelli di provini in differenti condizioni di vincolo, di carico e di fragilità del materiale calcestruzzo e si sono confrontati i risultati con i dati sperimentali tratti dalla letteratura, constatando la bontà della soluzione ottenuta.

Nel caso delle trave soggetta a flessione, con sezione armata a doppia armatura, il modello di interazione parziale acciaio - calcestruzzo è stato sviluppato in forma analitica secondo un approccio alla Newmark; sono state svolte alcune applicazioni numeriche con lo scopo di validare il modello.

Sono state, inoltre, presentate alcune osservazioni e considerazioni preliminari sulla stabilità della frattura secondo la teoria di Griffith, basata sulle note considerazioni energetiche, che possono essere considerate le basi storiche della meccanica della frattura.

Il modello presentato appare, dunque, accurato nel cogliere in maniera corretta il campo di spostamento e lo schema computazionale è apparso abbastanza robusto, nella sperimentazione numerica condotta in campo non lineare.

La procedura e gli elementi finiti implementati sono stati validati mediante confronti con risultati noti in letteratura e con quelli di prove sperimentali standard tratte dalla stessa letteratura ed impiegate classicamente nell'ambito dello studio del fenomeno della fessurazione e della meccanica della frattura.

Si è osservato un buon accordo fra i risultati numerici del modello e quelli riportati in letteratura, con un modesto onere computazionale e tale accordo con i risultati sperimentali lascia prevedere interessanti sviluppi anche per la modellazione delle strutture inflesse.

È stata intrapresa l'estensione del modello agli elementi soggetti a flessione, che possono essere modellati anche con un solo elemento e la fessura può nascere in una sezione non definita a priori.

Gli obiettivi futuri della ricerca possono essere volti alla modellazione del contributo degli inerti in corrispondenza delle fessure, del trasferimento delle tensioni da calcestruzzo fessurato ad acciaio snervato e dell'effetto di fenomeni dipendenti dal tempo, quali ritiro, viscosità e variazioni di temperatura, oltre all'estensione del modello ad elementi bi e tri dimensionali, includendo anche gli effetti del taglio.

APPENDICE A

PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI E SISTEMA DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI

A.1 Il Principio dei Lavori Virtuali per la scrittura delle equazioni di equilibrio

Gli elementi monodimensionali composti tra due fessure o tra due nodi in cui lo scorrimento sia nullo (armatura efficacemente ancorata), descritti nel capitolo 3., risultano formati da una matrice in calcestruzzo con immerse barre in acciaio e sono stati denominati EFE-TM (Elementary Finite Element - Tension Member) ed EFE-FM (Elementary Finite Element - Flexural Member).

Per tali elementi di lunghezza L , come genericamente per ogni continuo elastico, con le notazioni contenute ai paragrafi 3.1., 3.5.1. e 3.5.2., a partire dagli schemi definiti per il DE-TM (Differential Element - Tensional Member) ed il DE-FM (Differential Element - Flexural Member), adottando, ove possibile, la notazione classica della meccanica strutturale, può applicarsi il Principio dei Lavori Virtuali per la

scrittura delle equazioni di equilibrio che governano il problema.

Per i sistemi elastici considerati, il Lavoro Virtuale interno può calcolarsi come

$$\mathbf{L}_{\text{Vint}} = \int_0^L \left[\int_{A_c} \sigma_c \tilde{\epsilon} \right] + \sum_{i=1}^{\text{nfs}} \int_{A_s} \sigma_s \tilde{\epsilon} + \sum_{i=1}^{\text{nfs}} \int_{A_s} \tau_s \tilde{\gamma}$$

essendo nfs il numero delle barre di armatura in acciaio; nella predetta espressione del Lavoro Virtuale interno, il primo termine rappresenta il contributo del calcestruzzo, il secondo quello dell'acciaio ed il terzo il contributo dell'interfaccia tra acciaio e calcestruzzo.

Il Lavoro Virtuale esterno, da eguagliare al precedente Lavoro Virtuale interno per ogni variazione di configurazione ammissibile (spostamento virtuale), andrà calcolato come somma dei contributi del lavoro delle forze di volume, di quelle di superficie e delle distorsioni di varia natura, per ottenere dalla predetta uguaglianza le condizioni di equilibrio ed i relativi operatori che le descrivono.

A.1.1. L'elemento monodimensionale soggetto a trazione

Nel caso di tirante soggetto a trazione di lunghezza L , l'elemento monodimensionale descritto nel capitolo 3., risulta formato da una matrice in calcestruzzo con immerse barre in acciaio ed è stato denominato EFE-TM (Elementary Finite Element - Tensional Member).

Come già indicato al paragrafo 3.5.1 ed utilizzando le stesse notazioni in esso contenute e che qui parzialmente si riportano, il sistema di riferimento viene scelto con asse x congiungente i due nodi i e j e con origine nel baricentro della sezione di calcestruzzo interamente reagente.

Il calcestruzzo viene considerato interamente reagente ed elastico lineare a trazione e compressione, con segno delle tensioni di trazione positivo.

L'acciaio posto in posizione baricentrica della sezione in calcestruzzo (immerso cioè nel cilindro cavo della sezione di calcestruzzo), che risulta teso nel caso di sforzo normale di trazione, presenta una sezione di area A_s delimitata da una curva di lunghezza Φ_s e con il baricentro di A_s coincidente, dunque, con l'origine del sistema di riferimento.

A partire dallo schema definito per il DE-TM (Differential Element - Tension Member) riportato nella Figura 3.4, adottando, ove possibile, la notazione classica della meccanica strutturale ed applicando il Principio dei Lavori Virtuali, l'espressione del Lavoro Virtuale interno che governa il problema può essere scritta nella forma seguente.

Posto

$u_c(x)$	(spostamento orizzontale del generico punto della sezione in calcestruzzo)
$u_s(x)$	(spostamento orizzontale della barra in acciaio)
$s(x) = u_s(x) - u_c(x)$	(scorrimento interfaccia calcestruzzo - acciaio)
$\varepsilon_c(x) = \frac{\partial}{\partial x} u_c(x)$	(deformazione nel generico punto della sezione in calcestruzzo)
$\varepsilon_s(x) = \frac{\partial}{\partial x} u_s(x)$	(deformazione nell'acciaio)
$\sigma_c(x) = E_c \left[\frac{\partial}{\partial x} u_c(x) \right]$	(tensione nel generico punto della sezione in calcestruzzo)
$\sigma_s(x) = E_s \left[\frac{\partial}{\partial x} u_s(x) \right]$	(tensione nell'acciaio)
$\tau[s(x)] = G_o s(x)$	(tensione di aderenza all'interfaccia calcestruzzo - acciaio)

essendo E_c il modulo di elasticità normale del calcestruzzo, E_s il modulo di elasticità normale dell'acciaio e G_o il modulo di elasticità tangenziale iniziale dell'interfaccia, può calcolarsi il Lavoro Virtuale interno

$$\mathbf{L}_{\text{Vint}} = \int_0^L \left[\int_{A_c} \sigma_c \tilde{\varepsilon}_c + \sum_{i=1}^{nfs} \sigma_s \tilde{\varepsilon}_s + \tau \tilde{s} \right] dx$$

essendo nfs il numero delle barre di armatura in acciaio; sostituendo le relazioni cinematiche e costitutive precedenti, tale lavoro può scriversi nella forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\text{vint}} = & \int_0^L \left[\int_{A_c} E_c \left[\frac{\partial}{\partial x} u_c(x) \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \tilde{v} \right] dx + \right. \\ & + \sum_{i=1}^{\text{nfs}} \left[\int_0^L A_{s_i} E_s \left[\frac{\partial}{\partial x} u_{s_i}(x) \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \tilde{v} \right] dx + \right. \\ & \left. \left. + \sum_{i=1}^{\text{nfs}} \left[\int_0^L \Phi_{s_i} G_o \left[u_{s_i}(x) - u_c(x) \right] \cdot \left[\tilde{v} \right] dx \right] \right] \right. \end{aligned}$$

e nel caso di $\text{nfs} = 1$ (concentrazione delle barre di armatura) e di sezione in calcestruzzo di area A_c costante lungo l'ascissa x , si ottiene

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{\text{vint}} = & \int_0^L E_c A_c \left[\frac{\partial}{\partial x} u_c(x) \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \tilde{v} \right] dx + \\ & + \int_0^L E_s A_s \left[\frac{\partial}{\partial x} u_s(x) \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \tilde{v} \right] dx + \\ & + \int_0^L \Phi_s G_o \left[u_s(x) - u_c(x) \right] \cdot \left[\tilde{v} \right] dx \end{aligned}$$

A.1.2. L'elemento monodimensionale soggetto a flessione

Nel caso di trave a doppia armatura soggetta a flessione di lunghezza L , l'elemento monodimensionale descritto nel capitolo 3., risulta formato da una matrice in calcestruzzo con immerse barre in acciaio ed è stato denominato EFE-FM (Elementary Finite Element - Flexural Member).

Come già indicato al paragrafo 3.5.2. ed utilizzando le stesse notazioni in esso contenute e che qui parzialmente si riportano, il sistema di riferimento viene scelto con asse x congiungente i due nodi i e j e con origine nel baricentro della sezione di calcestruzzo interamente reagente, l'asse y appartenente al piano di simmetria della sezione e rivolto verso l'alto e l'asse z uscente dal piano che contiene gli altri due.

Il calcestruzzo viene considerato interamente reagente ed elastico lineare a trazione e compressione, con segno delle tensioni di trazione positivo.

Con riferimento alla Figura 3.9, l'acciaio prossimo al bordo inferiore (T), che risulta teso nel caso di momento flettente positivo, presenta una sezione di area A_{ST} delimitata da una curva di lunghezza Φ_{ST} e con

il baricentro di A_{ST} distante c dal bordo inferiore e \bar{y}_{sf} dall'origine del sistema di riferimento; quello prossimo al bordo superiore (C), che risulta compresso nel caso di momento flettente positivo, per analogia dei simboli utilizzati prima, presenta una sezione di area A_{SC} delimitata da una curva di lunghezza Φ_{SC} e con il baricentro di A_{SC} distante c dal bordo superiore e \bar{y}_{sf} dall'origine del sistema di riferimento.

A partire dallo schema definito per il DE-FM (Differential Element - Flexural Member), adottando, ove possibile, la notazione classica della meccanica strutturale ed applicando il Principio dei Lavori Virtuali, l'espressione del Lavoro Virtuale interno che governa il problema può essere scritta nella forma seguente.

Posto

$u_{co}(x)$	(spostamento orizzontale del baricentro della sezione in calcestruzzo)
$v(x, y) = v(x)$	(spostamento verticale della sezione in calcestruzzo armato - composito)
$\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial x} v(x)$	(rotazione della sezione in calcestruzzo armato - composito)
$u_c(x, y) = u_{co}(x) - \varphi(x) y$	(spostamento orizzontale del generico punto della sezione in calcestruzzo)
$u_{st}(x, y) = u_{st}(x)$	(spostamento orizzontale della barra in acciaio inferiore)
$u_{sc}(x, y) = u_{sc}(x)$	(spostamento orizzontale della barra in acciaio superiore)
$s_T(x) = u_{st}(x) - u_c(x, -\bar{y}_{sf})$	(scorrimento interfaccia calcestruzzo - acciaio inferiore)
per cui	
$s_T(x) = u_{st}(x) - u_{co}(x) - \varphi(x) \bar{y}_{sf}$	
$s_c(x) = u_{sc}(x) - u_{co}(x, \bar{y}_{sf})$	(scorrimento interfaccia calcestruzzo - acciaio superiore)
per cui	
$s_c(x) = u_{sc}(x) - u_{co}(x) + \varphi(x) \bar{y}_{sf}$	
$\varepsilon_{co}(x) = \frac{\partial}{\partial x} u_{co}(x)$	(deformazione calcestruzzo nel baricentro sezione)
$\chi(x) = \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x)$	(curvatura nella sezione in calcestruzzo armato - composito)
$\varepsilon_c(x, y) = \varepsilon_{co}(x) - \chi(x) y$	(deformazione nel generico punto della sezione in calcestruzzo)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{st}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} u_{st}(x) && \text{(deformazione nell'acciaio inferiore)} \\ \varepsilon_{sc}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} u_{sc}(x) && \text{(deformazione nell'acciaio superiore)} \\ \sigma_c(x, y) &= E_c \left[\frac{\partial}{\partial x} u_{co}(x) - \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x) y \right] && \text{(tensione nel generico punto della sezione in calcestruzzo)} \\ \sigma_{st}(x) &= E_s \left[\frac{\partial}{\partial x} u_{st}(x) \right] && \text{(tensione nell'acciaio inferiore)} \\ \sigma_{sc}(x) &= E_s \left[\frac{\partial}{\partial x} u_{sc}(x) \right] && \text{(tensione nell'acciaio superiore)} \\ \tau_T [s_T(x)] &= G_o s_T(x) && \text{(tensione di aderenza all'interfaccia calcestruzzo - acciaio inferiore)} \\ \tau_C [s_C(x)] &= G_o s_C(x) && \text{(tensione di aderenza all'interfaccia calcestruzzo - acciaio superiore)} \end{aligned}$$

essendo E_c il modulo di elasticità normale del calcestruzzo, E_s il modulo di elasticità normale dell'acciaio e G_o il modulo di elasticità tangenziale iniziale dell'interfaccia, può calcolarsi il Lavoro Virtuale interno

$$\begin{aligned} L_{Vint} &= \int_0^L \left[\int_{A_c} \sigma_c \tilde{\varepsilon} \right] dx + \sum_{i=1}^{nft} \int_0^L \Phi_{st_i} \tau_{T_i} [s_{T_i}] \tilde{\varepsilon} dx \\ &\quad + \sum_{i=1}^{nfc} \int_0^L \Phi_{sc_i} \tau_{C_i} [s_{C_i}] \tilde{\varepsilon} dx \end{aligned}$$

essendo nft il numero delle barre di armatura in acciaio inferiore e nfc il numero delle barre di armatura in acciaio superiore; sostituendo le relazioni cinematiche e costitutive precedenti, tale lavoro può scriversi nella forma:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L}_{\text{vint}} = & \int_0^L \left[\int_{A_c} E_c \left[\frac{\partial}{\partial x} u_{co}(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x) y \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \tilde{t} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{t} \right]^T \right] dx + \\
 & + \sum_{i=1}^{\text{nft}} \left[\int_0^L A_{st_i} E_s \left[\frac{\partial}{\partial x} u_{st_i}(x) \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \tilde{t} \right]^T \right] dx + \\
 & + \sum_{i=1}^{\text{nfc}} \left[\int_0^L A_{sc_i} E_s \left[\frac{\partial}{\partial x} u_{sc_i}(x) \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \tilde{t} \right]^T \right] dx + \\
 & + \sum_{i=1}^{\text{nft}} \left[\int_0^L \Phi_{st_i} G_o \left[u_{st_i}(x) - u_{co}(x) - \bar{y}_{sf} \frac{\partial}{\partial x} v(x) \right] \cdot \right. \\
 & \quad \left. \left[\tilde{t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \tilde{t} \right]^T \right] dx + \\
 & + \sum_{i=1}^{\text{nfc}} \left[\int_0^L \Phi_{sc_i} G_o \left[u_{sc_i}(x) - u_{co}(x) + \bar{y}_{sf} \frac{\partial}{\partial x} v(x) \right] \cdot \right. \\
 & \quad \left. \left[\tilde{t} \quad \frac{\partial}{\partial x} \tilde{t} \right]^T \right] dx
 \end{aligned}$$

e nel caso di $\text{nft} = \text{nfc} = 1$ (concentrazione delle barre di armatura superiori ed inferiori) e di sezione in calcestruzzo di area A_c costante lungo l'ascissa x , si ottiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{L}_{\text{vint}} = & \int_0^L E_c \left[A_c \frac{\partial}{\partial x} u_{\text{co}}(x) \frac{\partial}{\partial x} \tilde{\Gamma} \right] \cdot \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{\Gamma} \right] + \\
& + \int_0^L E_s A_{\text{ST}} \left[\frac{\partial}{\partial x} u_{\text{ST}}(x) \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\Gamma} \right] + \\
& + \int_0^L E_s A_{\text{SC}} \left[\frac{\partial}{\partial x} u_{\text{SC}}(x) \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\Gamma} \right] + \\
& + \int_0^L \Phi_{\text{ST}} G_o \left[u_{\text{ST}}(x) - u_{\text{co}}(x) - \bar{y}_{\text{sf}} \frac{\partial}{\partial x} v(x) \right] \cdot \\
& \cdot \left[\tilde{\Gamma} \right] - \tilde{\Gamma} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\Gamma} \right] + \\
& + \int_0^L \Phi_{\text{SC}} G_o \left[u_{\text{SC}}(x) - u_{\text{co}}(x) + \bar{y}_{\text{sf}} \frac{\partial}{\partial x} v(x) \right] \cdot \\
& \cdot \left[\tilde{\Gamma} \right] - \tilde{\Gamma} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \tilde{\Gamma} \right]
\end{aligned}$$

A.2 Sistema di equazioni differenziali nel problema dell'equilibrio

Attraverso la scrittura delle equazioni dei Lavori Virtuali, esplicitate per l'elemento monodimensionale soggetto a trazione nel precedente paragrafo A.1.1. e per l'elemento monodimensionale soggetto a flessione nel precedente paragrafo A.1.2., applicando il metodo di integrazione per parti e raccogliendo i termini rispetto ai fattori comuni rappresentati dalle funzioni di spostamento generalizzato virtuali, si ottengono i sistemi di equazioni differenziali del secondo e del quarto ordine in termini di scorrimenti e spostamenti, che rappresentano le equazioni di equilibrio alla traslazione delle barre in acciaio e del concio in calcestruzzo e nel caso della flessione quella alla rotazione rispetto all'asse z .

A.2.1. L'elemento monodimensionale soggetto a trazione

Nel caso dell'elemento monodimensionale soggetto a trazione, procedendo come indicato al paragrafo precedente, si ottiene il sistema di equazioni differenziali del secondo ordine in termini di scorrimenti e spostamenti, che rappresentano le equazioni di equilibrio alla traslazione delle barre in acciaio e del concio in calcestruzzo:

$$\begin{cases} E_s A_s \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_s(x) - \Phi_s G_o s(x) = 0 & (1) \\ E_c A_c \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_c(x) + \Phi_s G_o s(x) = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{A.1}$$

con le condizioni al contorno cinematiche o le duali in termini di energia, che di seguito si scrivono:

$$\begin{cases} E_s A_s \left. \frac{\partial}{\partial x} u_s(x) \right|_0^L \text{ oppure } \tilde{i} & (1) \\ E_c A_c \left. \frac{\partial}{\partial x} u_c(x) \right|_0^L \text{ oppure } \tilde{i} & (2) \end{cases} \quad \text{A.2}$$

L'integrazione del precedente sistema di equazioni differenziali conduce alle soluzioni in termini di spostamenti a partire dalla funzione di scorrimento.

Ponendo

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (\text{rapporto moduli di elasticità normale acciaio e calcestruzzo})$$

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} \quad (\text{rapporto aree di acciaio e calcestruzzo})$$

$$q_c(x) = q_{c_i} + \nabla q_c x \quad (\text{carico variabile linearmente applicato sulla superficie laterale del calcestruzzo})$$

e, tenuto conto che, per le definizioni contenute nel modello cinematico, valgono le relazioni

$$u_c(x, y) = u_c(x) \quad (\text{spostamento orizzontale del generico punto della sezione in calcestruzzo})$$

$u_s(x, y) = u_s(x)$ (spostamento orizzontale della barra in acciaio)

$s(x) = u_s(x) - u_c(x)$ (scorrimento interfaccia calcestruzzo - acciaio)

e del legame costitutivo lineare a tratti dell'interfaccia tra acciaio e calcestruzzo:

$$\tau[s(x)] = G_o s(x)$$

si ottiene l'equazione differenziale risolvente del secondo ordine in termini di scorrimento:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} s(x) - \alpha^2 s(x) - \frac{\pi D_c q_c(x)}{\alpha^2 E_c A_c} = 0$$

che può essere riscritta come

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} s(x) - \alpha^2 s(x) - \lambda x - \gamma = 0$$

in cui

$$\alpha^2 = \frac{G_o \Phi_s}{E_s A_s} (1 + n\rho) > 0 \text{ (caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\lambda = \frac{\pi D_c \nabla q_c}{E_c A_c} \text{ (} D_c = \text{diametro cilindro di calcestruzzo - matrice)}$$

$$\gamma = \frac{q_{ci} D_c}{E_c A_c D_s} \text{ (} D_s = \text{diametro barra in acciaio - fibra).}$$

Per quest'ultima, la soluzione, che risulta composta dalla somma dell'integrale generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare della non omogenea originaria, può scriversi nella forma:

$$s(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} - \frac{\lambda}{\alpha^2} x - \frac{\gamma}{\alpha^2} \quad \text{A.3}$$

L'integrazione del precedente originario sistema di equazioni differenziali conduce alle seguenti soluzioni in termini di spostamenti a partire dalla funzione di scorrimento.

$$u_s(x) = \frac{1}{1+n\rho} \left[c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} - \frac{\lambda}{6} x^3 - \frac{\gamma}{2} x^2 \right] + c_3 x + c_4 \quad \text{A.4}$$

$$\begin{aligned}
 u_c(x) = & -\frac{n\rho}{1+n\rho} \left[c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} + \frac{1}{6} \left[\frac{D_c \nabla q_c \alpha^2}{D_s G_o} - \lambda \right] x^3 + \right. \\
 & \left. - \frac{1}{2} \left[\gamma + \frac{D_c q_{c_i} \alpha^2}{D_s G_o} \right] x^2 \right] + c_5 x + c_6
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

A.2.2. L'elemento monodimensionale soggetto a flessione

Attraverso la scrittura dell'equazione dei Lavori Virtuali, esplicitata per l'elemento monodimensionale soggetto a flessione nel precedente paragrafo A.1.2., applicando il metodo di integrazione per parti e raccogliendo i termini rispetto ai fattori comuni rappresentati dalle funzioni di spostamento generalizzato virtuali, si ottiene il sistema di equazioni differenziali del secondo e del quarto ordine in termini di scorrimenti e spostamenti, che rappresentano le equazioni di equilibrio alla traslazione delle barre in acciaio e del concio in calcestruzzo ed alla rotazione rispetto all'asse z:

$$\left\{ \begin{aligned}
 E_s A_{st} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{st}(x) - \Phi_{st} G_o s_T(x) &= 0 & (1) \\
 E_s A_{sc} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{sc}(x) - \Phi_{sc} G_o s_C(x) &= 0 & (2) \\
 E_c A_c \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{co}(x) + \Phi_{st} G_o s_T(x) + \Phi_{sc} G_o s_C(x) &= 0 & (3) \\
 E_c I_c \frac{\partial^4}{\partial x^4} v(x) + \Phi_{st} G_o \bar{y}_{sf} \frac{\partial}{\partial x} s_T(x) - \Phi_{sc} G_o \bar{y}_{sf} \frac{\partial}{\partial x} s_C(x) &= 0 & (4)
 \end{aligned} \right. \tag{A.6}$$

con le condizioni al contorno cinematiche o le duali in termini di energia, che di seguito si scrivono:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 E_s A_{st} \frac{\partial}{\partial x} u_{st}(x) \Big|_0^L \quad \text{oppure} \quad \tilde{i} \quad (1) \\
 E_s A_{sc} \frac{\partial}{\partial x} u_{sc}(x) \Big|_0^L \quad \text{oppure} \quad \tilde{i} \quad (2) \\
 E_c A_c \frac{\partial}{\partial x} u_{co}(x) \Big|_0^L \quad \text{oppure} \quad \tilde{i} \quad (3) \\
 E_c I_c \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x) \Big|_0^L \quad \text{oppure} \quad \frac{\partial}{\partial x} \tilde{i} \Big|_0^L \quad (4) \\
 -E_c I_c \frac{\partial^3}{\partial x^3} v(x) - \Phi_{st} G_o \bar{y}_{sf} s_T(x) + \Phi_{sc} G_o \bar{y}_{sf} s_C(x) \Big|_0^L \quad \text{oppure} \quad \tilde{i}
 \end{array} \right. \quad \text{A.7}$$

L'integrazione del precedente sistema di equazioni differenziali conduce alle soluzioni in termini di spostamenti e rotazioni a partire dalle funzioni di scorrimento.

Ponendo

$$\begin{aligned}
 n &= \frac{E_s}{E_c} && \text{(rapporto moduli di elasticità normale acciaio e calcestruzzo)} \\
 \rho_T &= \frac{A_{st}}{A_c} && \text{(rapporto aree di acciaio inferiore e calcestruzzo)} \\
 \rho_c &= \frac{A_{sc}}{A_c} && \text{(rapporto aree di acciaio superiore e calcestruzzo)} \\
 \bar{\rho}_T &= n \rho_T && \text{(rapporto meccanico aree di acciaio inferiore e calcestruzzo)} \\
 \bar{\rho}_c &= n \rho_c && \text{(rapporto meccanico aree di acciaio superiore e calcestruzzo)} \\
 \zeta_T &= \frac{n A_{st} \bar{y}_{sf}^2}{I_c} && \text{(rapporto momenti di inerzia acciaio inferiore omogeneizzato e calcestruzzo)}
 \end{aligned}$$

$$\zeta_c = \frac{n A_{sc} \bar{y}_{sf}^2}{I_c} \quad (\text{rapporto momenti di inerzia acciaio superiore omogeneizzato e calcestruzzo})$$

$$\alpha_T^2 = \frac{G_o \Phi_{ST}}{E_s A_{ST}} (1 + 2 \bar{\rho}_T) > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\alpha_C^2 = \frac{G_o \Phi_{SC}}{E_s A_{SC}} (1 + 2 \bar{\rho}_C) > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\alpha_{ST} = \frac{G_o \Phi_{ST}}{E_s A_{ST}} (1 + 2 \zeta_T) > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\alpha_{SC} = \frac{G_o \Phi_{SC}}{E_s A_{SC}} (1 + 2 \zeta_C) > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\beta_{ST} = \frac{G_o \Phi_{ST}}{E_s A_{ST}} > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\beta_{SC} = \frac{G_o \Phi_{SC}}{E_s A_{SC}} > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\beta_{CT} = \frac{G_o \Phi_{ST}}{E_c A_c} > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\beta_{CC} = \frac{G_o \Phi_{SC}}{E_c A_c} > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\gamma_{CT} = \frac{G_o \Phi_{ST} \bar{y}_{sf}}{E_c I_c} > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\gamma_{CC} = \frac{G_o \Phi_{SC} \bar{y}_{sf}}{E_c I_c} > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

o che è lo stesso

$$\alpha_T^2 = \beta_{ST} (1 + 2 \bar{\rho}_T) > 0$$

$$\alpha_C^2 = \beta_{SC} (1 + 2 \bar{\rho}_C) > 0$$

$$\alpha_{ST} = \beta_{ST} (1 + 2 \zeta_T) > 0$$

$$\alpha_{SC} = \beta_{SC} (1 + 2 \zeta_C) > 0$$

il sistema di equazioni differenziali di equilibrio può scriversi nella forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{st}(x) - \beta_{st} s_T(x) = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{sc}(x) - \beta_{sc} s_C(x) = 0 \quad (2) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{co}(x) + \beta_{ct} s_T(x) + \beta_{cc} s_C(x) = 0 \quad (3) \\ \frac{\partial^4}{\partial x^4} v(x) + \gamma_{ct} \frac{\partial}{\partial x} s_T(x) - \gamma_{cc} \frac{\partial}{\partial x} s_C(x) = 0 \quad (4) \end{array} \right. \quad \text{A.8}$$

e, tenuto conto che, per le definizioni contenute nel modello cinematico, valgono le relazioni

$$u_{co}(x) = \frac{1}{2} \left\{ u_{st}(x) + u_{sc}(x) - [s_T(x) + s_C(x)] \right\} \quad \text{A.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} v(x) = \varphi(x) = \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \left\{ u_{st}(x) - u_{sc}(x) - [s_T(x) - s_C(x)] \right\} \quad \text{A.10}$$

il sistema di equazioni differenziali di equilibrio può scriversi nella forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{st}(x) - \beta_{st} s_T(x) = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{sc}(x) - \beta_{sc} s_C(x) = 0 \quad (2) \\ \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u_{st}(x) + u_{sc}(x)] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [s_T(x) + s_C(x)] \right\} + \\ \quad + \beta_{ct} s_T(x) + \beta_{cc} s_C(x) = 0 \quad (3) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [u_{st}(x) - u_{sc}(x)] - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [s_T(x) - s_C(x)] \right\} + \right. \\ \quad \left. + \gamma_{ct} s_T(x) - \gamma_{cc} s_C(x) \right] = 0 \quad (4) \end{array} \right. \quad \text{A.11}$$

il cui sistema risolvete in $s_T(x)$ e $s_C(x)$, ottenuto per sostituzione delle prime due equazioni nelle ultime due, si scrive come

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} s_T(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} s_C(x) - [\beta_{ST} + 2\beta_{CT}] s_T(x) - [\beta_{SC} + 2\beta_{CC}] s_C(x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} s_T(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} s_C(x) - [\beta_{ST} + 2\bar{y}_{sf}\gamma_{CT}] s_T(x) + [\beta_{SC} + 2\bar{y}_{sf}\gamma_{CC}] s_C(x) \right] = 0 \end{cases}$$

ed, in definitiva

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} s_T(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} s_C(x) - \alpha_T^2 s_T(x) - \alpha_C^2 s_C(x) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} s_T(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} s_C(x) - \alpha_{ST} s_T(x) + \alpha_{SC} s_C(x) \right] = 0 \end{cases} \quad \text{A.12}$$

essendo, come è possibile verificare,

$$\begin{cases} \alpha_T^2 = \beta_{ST} + 2\beta_{CT} \\ \alpha_C^2 = \beta_{SC} + 2\beta_{CC} \\ \alpha_{ST} = \beta_{ST} + 2\bar{y}_{sf}\gamma_{CT} \\ \alpha_{SC} = \beta_{SC} + 2\bar{y}_{sf}\gamma_{CC} \end{cases} \quad \text{A.13}$$

Integrando la seconda equazione del sistema precedente, questo assumerà la forma seguente

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} s_T(x) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} s_C(x) - \alpha_T^2 s_T(x) - \alpha_C^2 s_C(x) = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} s_T(x) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} s_C(x) - \alpha_{ST} s_T(x) + \alpha_{SC} s_C(x) = c_1 \end{cases}$$

in cui c_1 rappresenta la prima costante di integrazione.

Quest'ultimo sistema può essere risolto mediante somma e sottrazione membro a membro delle due equazioni che lo costituiscono e successive sostituzioni, fino ad ottenere un'equazione risolvente del quarto ordine non omogenea del tipo seguente:

$$2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} s_T(x) - \left[\alpha_T^2 + \alpha_{ST} + \alpha_{SC} + \alpha_C^2 \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} s_T(x) + \left[\alpha_T^2 \alpha_{SC} + \alpha_C^2 \alpha_{ST} \right] s_T(x) + \alpha_C^2 c_1 = 0$$

Per quest'ultima, la soluzione, che risulta composta dalla somma dell'integrale generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare della non omogenea originaria, può scriversi nella forma seguente

$$s_T(x) = -\frac{\alpha_C^2 c_1}{\alpha_T^2 \alpha_{SC} + \alpha_C^2 \alpha_{ST}} + c_2 e^{-\beta_1 x} + c_3 e^{\beta_1 x} + c_4 e^{-\beta_2 x} + c_5 e^{\beta_2 x} \quad \text{A.14}$$

essendo, come è possibile verificare,

$$\beta_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_T^2 + \alpha_{ST} + \alpha_{SC} + \alpha_C^2 - \sqrt{\left[\alpha_T^2 + \alpha_{ST} + \alpha_{SC} + \alpha_C^2 \right]^2 - 8 \left[\alpha_T^2 \alpha_{SC} + \alpha_C^2 \alpha_{ST} \right]}} \quad \text{A.15}$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\alpha_T^2 + \alpha_{ST} + \alpha_{SC} + \alpha_C^2 + \sqrt{\left[\alpha_T^2 + \alpha_{ST} + \alpha_{SC} + \alpha_C^2 \right]^2 - 8 \left[\alpha_T^2 \alpha_{SC} + \alpha_C^2 \alpha_{ST} \right]}}$$

Per sostituzione della funzione $s_T(x)$ nella rimanente equazione differenziale del sistema risolvente, è possibile integrare quest'ultima ottenendo la soluzione:

$$s_C(x) = c_1 \frac{\alpha_T^2}{\alpha_T^2 \alpha_{SC} + \alpha_C^2 \alpha_{ST}} + c_2 \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{ST})}{\alpha_C^2 - \alpha_{SC}} e^{-\beta_1 x} +$$

$$+ c_3 \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{ST})}{\alpha_C^2 - \alpha_{SC}} e^{\beta_1 x} + c_4 \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{ST})}{\alpha_C^2 - \alpha_{SC}} e^{-\beta_2 x} +$$

$$+ c_5 \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{ST})}{\alpha_C^2 - \alpha_{SC}} e^{\beta_2 x} \quad \text{A.16}$$

ed integrando il sistema di equazioni differenziali originario completo è possibile ricavare le funzioni di spostamento generalizzato:

$$u_{ST}(x) = -\frac{1}{2} \frac{\beta_{ST} \alpha_C^2 x^2}{\alpha_T^2 \alpha_{SC} + \alpha_C^2 \alpha_{ST}} c_1 + c_2 \frac{\beta_{ST}}{\beta_1^2} e^{-\beta_1 x} + c_3 \frac{\beta_{ST}}{\beta_1^2} e^{\beta_1 x} +$$

$$+ c_4 \frac{\beta_{ST}}{\beta_2^2} e^{-\beta_2 x} + c_5 \frac{\beta_{ST}}{\beta_2^2} e^{\beta_2 x} + c_6 x + c_7 \quad \text{A.17}$$

$$\begin{aligned}
 u_{sc}(x) = & \frac{1}{2} \frac{\beta_{sc} \alpha_T^2 x^2}{\alpha_T^2 \alpha_{sc} + \alpha_C^2 \alpha_{st}} c_1 + c_2 \frac{\beta_{sc}}{\beta_1^2} \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_C^2 - \alpha_{sc}} e^{-\beta_1 x} + \\
 & + c_3 \frac{\beta_{sc}}{\beta_1^2} \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_C^2 - \alpha_{sc}} e^{\beta_1 x} + c_4 \frac{\beta_{sc}}{\beta_2^2} \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_C^2 - \alpha_{sc}} e^{-\beta_2 x} + \\
 & + c_5 \frac{\beta_{sc}}{\beta_2^2} \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_C^2 - \alpha_{sc}} e^{\beta_2 x} + c_8 x + c_9
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

$$\begin{aligned}
 u_{co}(x) = & c_1 \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{sc} \alpha_T^2 - \beta_{st} \alpha_C^2}{\alpha_T^2 \alpha_{sc} + \alpha_C^2 \alpha_{st}} \frac{x^2}{2} - \frac{\alpha_T^2 - \alpha_C^2}{\alpha_T^2 \alpha_{sc} + \alpha_C^2 \alpha_{st}} \right) + \\
 & + c_2 \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{st} - \beta_1^2}{\beta_1^2} + \frac{\beta_{sc} - \beta_1^2}{\beta_1^2} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_C^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{-\beta_1 x} + \\
 & + c_3 \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{st} - \beta_1^2}{\beta_1^2} + \frac{\beta_{sc} - \beta_1^2}{\beta_1^2} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_C^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{\beta_1 x} + \\
 & + c_4 \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{st} - \beta_2^2}{\beta_2^2} + \frac{\beta_{sc} - \beta_2^2}{\beta_2^2} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_C^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{-\beta_2 x} + \\
 & + c_5 \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_{st} - \beta_2^2}{\beta_2^2} + \frac{\beta_{sc} - \beta_2^2}{\beta_2^2} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_C^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{\beta_2 x} + \\
 & + c_6 \frac{1}{2} x + c_7 \frac{1}{2} + c_8 \frac{1}{2} x + c_9 \frac{1}{2}
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = & c_1 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \left(-\frac{\beta_{sc}\alpha_T^2 + \beta_{st}\alpha_c^2}{\alpha_T^2\alpha_{sc} + \alpha_c^2\alpha_{st}} \frac{x^2}{2} + \frac{\alpha_T^2 + \alpha_c^2}{\alpha_T^2\alpha_{sc} + \alpha_c^2\alpha_{st}} \right) + \\
& + c_2 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \left(\frac{\beta_{st} - \beta_1^2}{\beta_1^2} - \frac{\beta_{sc} - \beta_1^2}{\beta_1^2} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{-\beta_1 x} + \\
& + c_3 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \left(\frac{\beta_{st} - \beta_1^2}{\beta_1^2} - \frac{\beta_{sc} - \beta_1^2}{\beta_1^2} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{\beta_1 x} + \\
& + c_4 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \left(\frac{\beta_{st} - \beta_2^2}{\beta_2^2} - \frac{\beta_{sc} - \beta_2^2}{\beta_2^2} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{-\beta_2 x} + \\
& + c_5 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \left(\frac{\beta_{st} - \beta_2^2}{\beta_2^2} - \frac{\beta_{sc} - \beta_2^2}{\beta_2^2} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{\beta_2 x} + \\
& + c_6 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} x + c_7 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} - c_8 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} x - c_9 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}}
\end{aligned} \tag{A.20}$$

$$\begin{aligned}
v(x) = & c_1 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \left(-\frac{\beta_{sc}\alpha_T^2 + \beta_{st}\alpha_c^2}{\alpha_T^2\alpha_{sc} + \alpha_c^2\alpha_{st}} \frac{x^3}{6} + \frac{\alpha_T^2 + \alpha_c^2}{\alpha_T^2\alpha_{sc} + \alpha_c^2\alpha_{st}} x \right) + \\
& + c_2 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \left(-\frac{\beta_{st} - \beta_1^2}{\beta_1^3} + \frac{\beta_{sc} - \beta_1^2}{\beta_1^3} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{-\beta_1 x} + \\
& + c_3 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \left(\frac{\beta_{st} - \beta_1^2}{\beta_1^3} - \frac{\beta_{sc} - \beta_1^2}{\beta_1^3} \cdot \frac{2\beta_1^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{\beta_1 x} + \\
& + c_4 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \left(-\frac{\beta_{st} - \beta_2^2}{\beta_2^3} + \frac{\beta_{sc} - \beta_2^2}{\beta_2^3} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{-\beta_2 x} + \\
& + c_5 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \left(\frac{\beta_{st} - \beta_2^2}{\beta_2^3} - \frac{\beta_{sc} - \beta_2^2}{\beta_2^3} \cdot \frac{2\beta_2^2 - (\alpha_T^2 + \alpha_{st})}{\alpha_c^2 - \alpha_{sc}} \right) e^{\beta_2 x} + \\
& + c_6 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \frac{x^2}{2} + c_7 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} x - c_8 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} \frac{x^2}{2} - c_9 \frac{1}{2\bar{y}_{sf}} x + c_{10}
\end{aligned} \tag{A.21}$$

Con riferimento alle Figura 3.11 e 3.12, nel caso limite di area di armatura superiore pari a zero (caso di sezione armata a semplice armatura), le precedenti equazioni possono scriversi nella forma:

$$\left\{ \begin{aligned} E_s A_{ST} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{ST}(x) - \Phi_{ST} G_o s_T(x) &= 0 & (1) \\ E_c A_c \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{co}(x) + \Phi_{ST} G_o s_T(x) &= 0 & (2) \\ E_c I_c \frac{\partial^4}{\partial x^4} v(x) + \Phi_{ST} G_o \bar{y}_{sf} \frac{\partial}{\partial x} s_T(x) &= 0 & (3) \end{aligned} \right. \quad A.22$$

con le condizioni al contorno cinematiche o le duali in termini di energia, che di seguito si scrivono:

$$\left\{ \begin{aligned} E_s A_{ST} \frac{\partial}{\partial x} u_{ST}(x) \Big|_0^L &\text{ oppure } \tilde{i} & (1) \\ E_c A_c \frac{\partial}{\partial x} u_{co}(x) \Big|_0^L &\text{ oppure } \tilde{i} & (2) \\ E_c I_c \frac{\partial^2}{\partial x^2} v(x) \Big|_0^L &\text{ oppure } \frac{\partial}{\partial x} \tilde{i} & (3) \\ -E_c I_c \frac{\partial^3}{\partial x^3} v(x) - \Phi_{ST} G_o \bar{y}_{sf} s_T(x) \Big|_0^L &\text{ oppure } \tilde{i} \end{aligned} \right. \quad A.23$$

L'integrazione del precedente sistema di equazioni differenziali conduce alle soluzioni in termini di spostamenti e rotazioni a partire dalla funzione di scorrimento.

Ponendo

$$n = \frac{E_s}{E_c} \quad (\text{rapporto moduli di elasticità normale acciaio e calcestruzzo})$$

$$\rho_T = \frac{A_{ST}}{A_c} \quad (\text{rapporto aree di acciaio inferiore e calcestruzzo})$$

$$\bar{\rho}_T = n \rho_T \quad (\text{rapporto meccanico aree di acciaio inferiore e calcestruzzo})$$

$$\zeta_T = \frac{n A_{ST} \bar{y}_{sf}^2}{I_c} \quad (\text{rapporto momenti di inerzia acciaio inferiore omogeneizzato e calcestruzzo})$$

$$\alpha_T^2 = \frac{G_o \Phi_{ST}}{E_s A_{ST}} (1 + 2 \bar{\rho}_T) > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\alpha_{ST} = \frac{G_o \Phi_{ST}}{E_s A_{ST}} (1 + 2 \zeta_T) > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\beta_{ST} = \frac{G_o \Phi_{ST}}{E_s A_{ST}} > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\beta_{CT} = \frac{G_o \Phi_{ST}}{E_c A_c} > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

$$\gamma_{CT} = \frac{G_o \Phi_{ST} \bar{y}_{sf}}{E_c I_c} > 0 \quad (\text{caso ramo ascendente nel legame } \tau - s)$$

o che è lo stesso

$$\alpha_T^2 = \beta_{ST} (1 + 2 \bar{\rho}_T) > 0$$

$$\alpha_{ST} = \beta_{ST} (1 + 2 \zeta_T) > 0$$

il sistema di equazioni differenziali di equilibrio può scriversi nella forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{ST}(x) - \beta_{ST} s_T(x) = 0 & (1) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{CO}(x) + \beta_{CT} s_T(x) = 0 & (2) \\ \frac{\partial^4}{\partial x^4} v(x) + \gamma_{CT} \frac{\partial}{\partial x} s_T(x) = 0 & (3) \end{cases} \quad A.24$$

e, tenuto conto che, per le definizioni contenute nel modello cinematico, valgono le relazioni

$$u_c(x, y) = u_{CO}(x) - \varphi(x) y \quad (\text{spostamento orizzontale del generico punto della sezione in calcestruzzo})$$

$$u_{ST}(x, y) = u_{ST}(x) \quad (\text{spostamento orizzontale della barra in acciaio inferiore})$$

$$s_T(x) = u_{ST}(x) - u_c(x, -\bar{y}_{sf}) \quad (\text{scorrimento interfaccia calcestruzzo - acciaio inferiore})$$

per cui

$$s_T(x) = u_{ST}(x) - u_{CO}(x) - \varphi(x) \bar{y}_{sf}$$

il sistema di equazioni differenziali di equilibrio può scriversi nella forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{st}(x) - \beta_{st} s_T(x) = 0 \quad (1) \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_{co}(x) + \beta_{ct} s_T(x) = 0 \quad (2) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) + \gamma_{ct} s_T(x) \right] = 0 \quad (3) \end{array} \right. \quad \text{A.25}$$

la cui equazione risolvente in $s_T(x)$, ottenuta per derivazione e sostituzione, si scrive come

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} s_T(x) - [\beta_{st} + \beta_{ct} + \bar{y}_{sf} \gamma_{ct}] s_T(x) \right] = 0$$

ed, in definitiva

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} s_T(x) - \frac{\alpha_T^2 + \alpha_{st}}{2} s_T(x) \right] = 0 \quad \text{A.26}$$

essendo, come è possibile verificare,

$$\frac{\alpha_T^2 + \alpha_{st}}{2} = \beta_{st} + \beta_{ct} + \bar{y}_{sf} \gamma_{ct}. \quad \text{A.27}$$

Integrando la precedente equazione, questa assumerà la forma seguente

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} s_T(x) - \frac{\alpha_T^2 + \alpha_{st}}{2} s_T(x) = c_1$$

in cui c_1 rappresenta la prima costante di integrazione.

Per quest'ultima, la soluzione, che risulta composta dalla somma dell'integrale generale dell'omogenea associata e di una soluzione particolare della non omogenea originaria, può scriversi nella forma:

$$s_T(x) = -\frac{c_1}{\beta_2^2} + c_4 e^{-\beta_2 x} + c_5 e^{\beta_2 x} \quad \text{A.28}$$

essendo, come è possibile verificare,

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{\alpha_T^2 + \alpha_{ST}}{2}} \quad \text{A.29}$$

L'integrazione del precedente sistema di equazioni differenziali conduce alle seguenti soluzioni in termini di spostamenti e rotazioni a partire dalla funzione di scorrimento.

Posto

$$\alpha = \beta_2$$

$$\rho = \rho_T$$

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_T$$

$$\zeta = \zeta_T$$

$$s(x) = s_T(x)$$

$$u_s(x) = u_{sT}(x)$$

e rinumerando le costanti di integrazione, si ottengono le seguenti:

$$s(x) = -\frac{c_0}{\alpha^2} + c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} \quad \text{A.30}$$

$$u_s(x) = \frac{1}{1 + \bar{\rho} + \zeta} \left[c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} - c_0 \frac{x^2}{2} \right] + c_3 x + c_4 \quad \text{A.31}$$

$$u_{co}(x) = -\frac{\bar{\rho}}{1 + \bar{\rho} + \zeta} \left[c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} - c_0 \frac{x^2}{2} \right] + c_5 x + c_6 \quad \text{A.32}$$

$$\varphi(x) = -\frac{\zeta}{\bar{y}_{sf}(1 + \bar{\rho} + \zeta)} \left[c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} + \frac{1 + \bar{\rho}}{\zeta} c_0 \frac{x^2}{2} \right] - \frac{1}{\bar{y}_{sf}} (c_5 - c_3) x - \frac{1}{\bar{y}_{sf}} \left(c_6 - c_4 - \frac{c_0}{\alpha^2} \right) \quad \text{A.33}$$

$$v(x) = -\frac{\zeta}{\alpha \bar{y}_{sf}(1 + \bar{\rho} + \zeta)} \left[c_1 e^{\alpha x} - c_2 e^{-\alpha x} + \frac{(1 + \bar{\rho})\alpha}{2\zeta} c_0 \frac{x^3}{3} \right] - \frac{1}{\bar{y}_{sf}} (c_5 - c_3) \frac{x^2}{2} - \frac{1}{\bar{y}_{sf}} \left(c_6 - c_4 - \frac{c_0}{\alpha^2} \right) x + c_{10} \quad \text{A.34}$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] ARREA M., INGRAFFEA A., (1982) “*Mixed-mode crack propagation in mortar and concrete*”, Technical report. Report 81-13, Dept. Structural Engineering, Cornell University, New York.
- [2] BARENBLATT G.I., (1962) “*The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture*”, *Advances in Applied Mechanics*, 7: 55-129.
- [3] BATHE K.J., (1995) “*Finite element procedures*”, Springer.
- [4] BAŽANT Z.P., (1983) “*Crack band theory for fracture of concrete*”, *Materiaux et Constructions*, 93: 155-177.
- [5] BAŽANT Z.P., (2002) “*Concrete fracture models: testing and practise*”, *Engineering Fracture Mechanics*, 69: 165-205.
- [6] BECKER G., NOELS L., (2011) “*A fracture framework for euler-bernoulli beams based on a full discontinuous Galerkin formulation/extrinsic cohesive law combination*”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 85: 1227-1251.
- [7] BELLETTI B., CERIONI R., IORI I., (2001) “*Physical approach for reinforced - concrete (PARC) membrane elements*”, *Journal of Structural Engineering - ASCE*, 127(12): 1412-1426.
- [8] BELYTSCHKO T., BLACK T., (1999) “*Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing*”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45: 601-620.
- [9] BELYTSCHKO T., FISH I., ENGELMANN B.E., (1988) “*A finite element with embedded localization zones*”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 70: 59-89.

- [10] BELYTSCHKO T., LIU W.K., MORAN B., (2000) “*Non-linear Finite Elements for Continua and Structures*”, John Wiley & Sons, LTD.
- [11] BERNARDI P., CERIONI R., IORI I., MICHELINI E., (2006) “*Un metodo per l’analisi non lineare di travi in conglomerato armato*”, Atti 16° Congresso C.T.E., Parma, 9÷11/11/2006.
- [12] BOUAZAOUI L., LI A., (2008) “*Analysis of steel/concrete interfacial shear stress by means of pull out test*”, International Journal of Adhesion & Adhesives, 28: 101-108.
- [13] BRESLER B., BERTERO V.V., (1968) “*Behaviour of reinforced concrete under repeated load*”, Journal of the Structural Division - ASCE, 94(6): 1567-1590.
- [14] CARPINTERI A., (1992) “*Meccanica dei materiali e della frattura*”, Pitagora Editrice Bologna.
- [15] CASANOVA A., JASON L., DAVENNE L., (2012) “*Bond slip model for the simulation of reinforced concrete structures*”, Engineering Structures, 39: 66-78.
- [16] CEB-FIP: Model Code 90. Thomas Telford Ltd, 1993.
- [17] CHEN G., BAKER G., (2003) “*Influence of bond slip on crack spacing in numerical modeling of reinforced concrete*”, Journal of Structural Engineering - ASCE, 129(11): 1514-1521.
- [18] CONTRAFATTO L., CUOMO M., FAZIO F., (2012) “*An enriched finite element for crack opening and rebar slip in reinforced concrete members*”, International Journal of Fracture, 178(1-2): 33-50.
- [19] DAVENNE L., RAGUENEAU F., MAZARS J., IBRAHIMBEGOVIC A., (2003) “*Efficient approaches to finite element analysis in earthquake engineering*”, Computers & Structures, 81: 1223-1239.
- [20] DEDE T., AYVAZ Y., (2009) “*Nonlinear analysis of reinforced concrete beam with/without tension stiffening effect*”, Materials and Design, 30: 3846-3851.

- [21] DOMINGUEZ N., BRANCHERIE D., DAVENNE L., IBRAHIMBEGOVIC A., (2005) “*Prediction of crack pattern distribution in reinforced concrete by coupling a strong discontinuity model of concrete cracking and a bond-slip of reinforcement model*”, International Journal for Computer-Aided Engineering and Software, (22): 558-582.
- [22] DONG Y., WU S., XU S.S., ZHANG Y., FANG S., (2010) “*Analysis of concrete fracture using a novel cohesive crack method*”, Applied Mathematical Modelling, 34: 4219-4231.
- [23] DUJC J., BRANK B., IBRAHIMBEGOVIC A., (2008) “*Modeling of discontinuous failures in beams and plates*”, Atti del 8° WCCM8, Venezia, 30 Giu. - 5 Lug. 2008.
- [24] DUMSTORFF P., MOSLER J., MESCHKE G., (2003) “*Advanced discretization methods for cracked structures: The strong discontinuity approach vs. the extended finite element method*”, In Oñate E., Owen D.R.J. e Suárez B., Editors, Computational Plasticity VII, pag. 89. CIMNE, COMPLAS 2003: 07.-10.04.2003 in Barcelona. CD-ROM.
- [25] DVORKIN E.N., CUITIÑO A.M., GIOIA G., (1990) “*Finite elements with displacement interpolated embedded localization lines insensitive to mesh size and distortions*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 30: 541-564.
- [26] EINSFELD R.A., VELASCO M.S.L., (2006) “*Measurement of the ratio G_F/G_f for numerical analysis of concrete structures*”, Latin American Journal of Solids and Structures, 3: 361-376.
- [27] ELICES M., GUINEA G., GOMEZ J., PLANAS J., (2002) “*The cohesive zone model: advantages, limitations and challenges*”, Engineering Fracture Mechanics, 69: 137-163.
- [28] ELIGEHAUSEN R., POPOV E.P., BERTERO V.V., (1983) “*Local bond stress-slip relationships of deformed bars under generalized excitations: experimental results and analytical model*” - report n.UCB/EERC-83/23, University of California, Berkeley.

- [29] ELIGEHAUSEN R., MAYER U., (1998) “*Bond behaviour of ribbed bars at inelastic steel strains*”, 2nd Int. PhD Symposium in Civil Engineering, Budapest.
- [30] FAELLA C., MARTINELLI E., NIGRO E., (2010) “*Steel-concrete composite beams in partial interaction: Closed-form “exact” expression of the stiffness matrix and the vector of equivalent nodal forces*”, *Engineering Structures*, 32: 2744-2754.
- [31] FELIPPA C., (Fall, 2001) “*Nonlinear Finite Element Methods. Lecture Notes*”, University of Colorado at Boulder, URL: <http://caswww.colorado.edu/courses.d/NFEM.d/Home.html>.
- [32] FOSTER S.J., BUDIONO B., GILBERT R.I., (1996) “*Rotating crack finite element model for reinforced concrete structures*”, *Computers & Structures*, 58(1): 43-50.
- [33] GIUDICE G., (2007) “*Un modello agli elementi finiti per l'analisi della fessurazione di travi in cemento armato basato sulla meccanica delle fratture coesive*”, Tesi di Laurea - Università degli Studi di Catania.
- [34] GIURIANI E., PLIZZARI G.A., (1998) “*Interrelation of splitting and flexural cracks in RC beams*”, *Journal of Structural Engineering - ASCE*, 124(9), 1032-1040.
- [35] GRIBNIAK V., KAKLAUSKAS G., KWAN A.K.H., BACINSKAS D., ULBINAS D., (2012) “*Deriving stress-strain relationships for steel fibre concrete in tension from tests*”, *Engineering Structures*, 42: 387-395.
- [36] GUPTA A.K., MAESTRINI S.R., (1990) “*Tension stiffness model for reinforced concrete bars*”, *Journal of Structural Engineering - ASCE*, 116(3): 769-790.
- [37] HILLERBORG A., MODEER M., PETERSSON P.E., (1976) “*Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements*”, *Cement and Concrete Research*, 6: 773-782.
- [38] HILLERBORG A., (1985) “*Numerical methods to simulate softening*”

- ing and fracture of concrete*”, Fracture mechanics of concrete: Structural application and numerical calculation, Sih GC, Di Tomaso A., Editors: 141-170.
- [39] HOFSTETTER G., MANG H.A., (1995) “*Computational Mechanics of Reinforced and Prestressed Concrete Structures*”, Vieweg, Braunschweig.
- [40] HUGHES T.J.R., (1987) “*The Finite Element Method. Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [41] IBRAHIMBEGOVIC A., BOULKERTOUS A., DAVENNE L., BRANCHERIE D., (2010) “*Modelling of reinforced-concrete structures providing crack-spacing based on X-FEM, ED-FEM and novel operator split solution procedure*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 83: 452-481.
- [42] JIRÁSEK M., (2000) “*Comparative study on finite elements with embedded discontinuities*”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 188: 307-330.
- [43] JIRÁSEK M., ZIMMERMANN T., (2001) “*Embedded crack model: I. Basic formulation*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50: 1269-1290.
- [44] JIRÁSEK M., BAZANT Z.P., (2002) “*Inelastic analysis of structures*”, John Wiley & Sons, LTD.
- [45] KACHANOV L.M., (1971) “*Foundation of the theory of plasticity*”. North-Holland Pub. Co., Neetherlands, 111.
- [46] KAKLAUSKAS G., GHABOUSSI J., (2001) “*Stress-strain relations for cracked tensile concrete from RC beam tests*”, Journal of Structural Engineering, 127(1): 64-73.
- [47] KARA I.F., DUNDAR C., (2007) “*Three dimensional analysis of reinforced concrete frames with cracked beam and column elements*”, Engineering Structures, 29: 2262-2273.
- [48] KARA I.F., DUNDAR C., (2009) “*Effect of loading types and rein-*

- forcement ratio on an effective moment of inertia and deflection of a reinforced concrete beam*", Advances in Engineering Software, 40: 836-846.
- [49] KEUSER M., MEHLHORN G. (1987) "*Finite element models for bond problems*", Journal of Structural Engineering, 113(10): 2160-2173.
- [50] KHALFALLAH S., (2008) "*Tension stiffening bond modelling of cracked flexural reinforced concrete beams*", Journal of Civil Engineering and Management, 14(2): 131-137.
- [51] KWAK H.G., KIM S.P., (2002) "*Bond Slip Behavior under monotonic uniaxial loading*", Engineering Structures, 23: 298-309.
- [52] KWAK H.G., SONG J.Y., (2002) "*Cracking analysis of RC members using polynomial strain distribution function*", Engineering Structures, 24: 455-468.
- [53] KWAK H.G., FILIPPOU F.C., (1997) "*Nonlinear FE analysis of R/C structures under monotonic loads*", Computers & Structures, 65(1): 1-16.
- [54] LACKNER R., MANG H.A., (2003) "*Scale transition in steel-concrete interaction. I: Model*", Journal of Engineering Mechanics - ASCE, 129(4): 393-402.
- [55] LEE S.C., CHO J.Y., VECCHIO F.J., (2011) "*Model for post-yield tension stiffening and rebar rupture in concrete members*", Engineering Structures, 33: 1723-1733.
- [56] LEMAITRE J., (1983) "*A continuous damage mechanics model for ductile fracture*", Journal of Engineering Materials and Technology, 107: 83-89.
- [57] LEMAITRE J., (1996) "*A course on Damage Mechanics, Second Edition*", Springer-Verlag.
- [58] LIAO K., REIFSNIDER L., (2000) "*A tensile strength model for unidirectional fiber-reinforced brittle matrix composite*", International Journal of Fracture, 106: 95-115.

- [59] LOFTI H.R., SHING P.B., (1995) “*Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 38(8): 1307-1325.
- [60] LOWES L.N., MOEHLE J.P., GOVINDJEE S., (2004) “*Concrete-steel bond model for use in finite element modeling of reinforced concrete structures*”, ACI Structural Journal, 101: 501-511.
- [61] MANFREDI G., PECCE M., (1998) “*A refined R.C. beam element including bond-slip relationship for the analysis of continuous beams*”, Computers & Structures, 69(1): 53-62.
- [62] MARTIN-PEREZ B., PANTAZOPOULOU S.J., (2001) “*Effect of bond, aggregate interlock and dowel action on the shear strength degradation of reinforced concrete*”, Engineering Structures, 23(1): 214-227.
- [63] MIHAI P., HIRHUI I., ROSCA B., (2010) “*Numerical analysis of bonding between concrete and reinforcement using the Finite Element Method*” – Journal of Applied Sciences, 10(9): 738-744.
- [64] MOËS N., DOLBOW I., BELYTSCHKO T., (1999) “*A finite element method for crack growth without remeshing*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46: 131-150.
- [65] MOSLER J., BRUHNS O.T., (2004) “*An efficient numerical implementation for locally embedded strong discontinuities*”, In European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Jyväskylä, Finland.
- [66] MUHAMAD R., MOHAMED ALI M.S., OEHLERS D., SHEIKH A.H., (2011) “*Load-slip relationship of tension reinforcement in reinforced concrete members*”, Engineering Structures, 33: 1098-1106.
- [67] NGO D., SCORDELIS A.C., (1967) “*Finite element analysis of reinforced concrete beams*”, ACI Journal, 64(14): 152-163.
- [68] OLIVEIRA R.S., RAMALHO M.A., CORRÊA M.R.S., (2008) “*A layered finite element for reinforced concrete beams with bond-slip effects*”, Cement & Concrete Composites, 30: 245-252.

- [69] OLIVER J., (1989) “*A consistent characteristic length for smeared cracking models*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28: 461-474.
- [70] OLIVER J., SIMO J.C., (1994) “*Modelling strong discontinuities in solid mechanics by means of strain softening constitutive equations*”, In Mang H., Biani N., De Borst R., Editors, Computational Modelling of Concrete Structures, pp.: 363-372, Pineridge press.
- [71] OLIVER J., HUESPE A., PULIDO M., CHAVES E., (2002) “*From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach*”, Engineering Fracture Mechanics, 69(2): 113-136.
- [72] OLIVER J., HUESPE A., SAMANIEGO E., (2006) “*A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-FEM vs. X-FEM*”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 195: 4732-4752.
- [73] OLIVER J., LINERO D.L., HUESPE A.E., MANZOLI O.L., (2008) “*Two-dimensional modeling of material failure in reinforced concrete by means of a continuum strong discontinuity approach*”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 197: 332-348.
- [74] PAMIN J., DE BORST R., (1998) “*Simulation of crack spacing using a reinforced concrete model with an internal length parameter*”, Archives of Applied Mechanics, 68: 613-625.
- [75] PARK K., PAULINO G.H., ROESLER J.R., (2008) “*Determination of the kink point in the bilinear softening model for concrete*”, Engineering Fracture Mechanics, 75: 3806-3818.
- [76] PRASAD M.V.K.V., KRISHNAMOORTHY C.S., (2002) “*Computational model for discrete crack growth in plain and reinforced concrete*”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191: 2699-2725.
- [77] PRECHTEL M., LEIVA RONDA P., JANISH R., HARTMAIER A., LEUGERING G., STEINMANN P., STINGL M., (2011) “*Simulation of fracture in heterogeneous elastic materials with cohesive*

- zone models*”, International Journal of Fracture, 168: 15-29.
- [78] RABCZUK T., AKKERMANN J., EIBL J., (2005) “A numerical model for reinforced concrete structures”, International Journal of Solids and Structures, 42: 1327-1354.
- [79] RADTKE F., SIMONE A., SLUYS L., (2011) “A partition of unity finite element method for simulating non-linear debonding and matrix failure in thin fibre composites”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 86: 453-476.
- [80] REDDY J.N., (1985) “An introduction to the finite element method”, McGraw-Hill International Editions.
- [81] REINHARDT H.W., BALÁZS A.G.L., (1995) “Steel-Concrete Interfaces: Experimental Aspects”, Mechanics of Geomaterial Interfaces - A.P.S. Selvadurai and M.J. Boulon (Editors).
- [82] RICE J.R., (1976) “The localization of plastic deformation”, Theoretical and Applied Mechanics, pp.: 207-220, North-Holland.
- [83] RICHARD B., RAGUENEAU F., CREMONA C., ADÉLAIDE L., TAILHAN J.L., (2010) “A three-dimensional steel/concrete interface model including corrosion effects”, Engineering Fracture Mechanics, 77: 951-973.
- [84] RIZKALLA S.H., HWANG L.S., EL SHAHAWI M., (1983) “Transverse reinforcement effect on cracking behaviour of R.C. members”, Canadian Journal of Civil Engineering, 10(4): 566-581.
- [85] RIZZI E., CAROI I., WILLAM K., (1995) “Localization analysis of elastic degradation with application to scalar damage”, Journal of Engineering Mechanics - ASCE, 121: 541-554.
- [86] ROTS J.G., (1988) “Computational Modeling of Concrete Fractures”, Ph.D. Thesis. Delft University of Technology.
- [87] RUDNICKI J.W., RICE J.R., (1975) “Conditions for localization of deformation in pressure sensitive dilatant materials”, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 23: 371-394.
- [88] RUSSO G., ZINGONE G., ROMANO F., (1990) “Analytical solu-

- tion for bond-slip of reinforcing bars in R.C. joints*", Journal of Structural Engineering - ASCE, 116(2): 336-355.
- [89] RUSSO G., ROMANO F., (1992) "Cracking response of RC members subjected to uniaxial tension", Journal of Structural Engineering - ASCE, 118(5): 1172-1190.
- [90] SATO Y., NAGANUMA K., (2007) "Discrete-like crack simulation by smeared crack-based FEM for reinforced concrete", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 36: 2137-2152.
- [91] SIMO J.C., OLIVER J., ARMERO F., (1993) "An analysis of strong discontinuities induced by strain softening in rate-independent inelastic solids", Computational Mechanics, 12: 277-296.
- [92] SLUYS L.J., DE BORST R., (1996) "Failure in plain and reinforced concrete - An analysis of crack width and crack spacing", International Journal of Solids and Structures, 33(20-22): 3257-3276.
- [93] SPACONE E., LIMKATANYU S., (2000) "Responses of reinforced concrete members including bond-slip effects", ACI Structural Journal, 97(6): 831-839.
- [94] STRAMANDINOLI R.S.B., LA ROVERE H.L., (2008) "An efficient tension-stiffening model for nonlinear analysis of reinforced concrete members", Engineering Structures, 30: 2069-2080.
- [95] TAYLOR R.L., (2000) "The Finite Element Method", Volume 2: Solid Mechanics, Butterworth Heinemann.
- [96] THEINER Y., HOFSTETTER G., (2009) "Numerical prediction of crack propagation and crack widths in concrete structures", Engineering Structures, 31: 1832-1840.
- [97] VALIPOUR H.R., FOSTER S.J., (2009) "Nonlocal Damage Formulation for a Flexibility-Based Frame Element", Journal of Structural Engineering, 135(10): 1213-1221.
- [98] VECCHIO F.J., (1989) "Nonlinear finite element analysis of reinforced concrete membranes", ACI Structural Journal, 86: 26-35.

- [99] WELLS G.N., SLUYS L.J., (2001) “*A new method for modelling cohesive cracks using finite elements*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 50: 2667-2682.
- [100] WU H.Q., GILBERT R.I., (2009) “*Modeling short-term tension stiffening in reinforced concrete prisms using a continuum-based finite element model*”, Engineering Structures, 31: 2380-2391.
- [101] XU S., ZHANG X., (2008) “*Determination of fracture parameters for crack propagation in concrete using an energy approach*”, Engineering Fracture Mechanics, 75: 4292-4308.
- [102] YANG Z.J., CHEN J., (2005) “*Finite element modelling of multiple cohesive discrete crack propagation in reinforced concrete beams*”, Engineering Fracture Mechanics, 72: 2280-2297.
- [103] YANG X., LEES J.M., MORLEY C.T., (2008) “*Modelling crack propagation in structures: Comparison of numerical methods*”, Communications in Numerical Methods in Engineering, (24): 1373-1392.
- [104] YANKELEVSKY D.Z., (1984) “*A new finite element for bond slip analysis*”, Journal of the Structural Engineering Division - ASCE, 11(7): 1533-1542.
- [105] YANKELEVSKY D.Z., (1997) “*A two-phase one dimensional model for steel-concrete interaction*”, Computers & Structures, 65(6): 781-794.
- [106] YANKELEVSKY D.Z., JABAREEN M., ABUTBUL A.D., (2008) “*One-dimensional analysis of tension stiffening in reinforced concrete with discrete cracks*”, Engineering Structures, 30: 206-217.
- [107] ZANUY C., ALBAJAR L., DE LA FUENTE P., (2010) “*On the cracking behaviour of the reinforced concrete tensor chord under repeated loading*”, Materials & Structures, 43: 611-632.
- [108] ZANUY C., DE LA FUENTE P., ALBAJAR L., (2010) “*Estimation of parameters defining negative tension stiffening*”, Engineering Structures, 32: 3355-3362.

- [109] ZHANG H., (2010) "*Simulation of crack growth using cohesive crack method*", Applied Mathematical Modelling, 34: 2508-2519.
- [110] ZIENKIEWICZ C., TAYLOR R. L., (2000) "*The finite element method - Volume 1 - The basis*", Fifth Edition, Butterworth-Heinemann.