

		
Fondo Sociale Europeo	MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA	Università degli Studi di Catania

**Tesi di Dottorato in Ingegneria Geotecnica
XXIII Ciclo**

Giuseppe Lorenzo Maria Blanco

**Analisi delle condizioni di equilibrio limite e
valutazione degli spostamenti permanenti di opere
di sostegno rigide soggette ad azione sismica**

Coordinatore

Prof. Ing. Michele Maugeri

Tutor

Prof. Ing. Michele Maugeri

Catania, Dicembre 2010

...a mia madre...

INDICE

INTRODUZIONE

PARTE I

CAPITOLO PRIMO

LA STABILITÀ SISMICA DELLE OPERE DI SOSTEGNO: ESPERIENZE DA RECENTI EVENTI SISMICI	1-1
---	-----

CAPITOLO SECONDO

L'ANALISI PSEUDO – STATICA.....	1-2
2.1 Generalità.....	1-2
2.2 Le soluzioni per il calcolo delle spinte in condizioni statiche.....	2-2
2.3 La soluzione di Mononobe – Okabe.....	5-2
2.4 La soluzione di Motta (1993).....	9-2
2.5 La soluzione di Motta (1994).....	10-2
2.6 Le soluzioni di Caltabiano et al. (2000, 2003, 2005).....	11-2
2.7 Le soluzioni di Greco (2001, 2005).	14-2

CAPITOLO TERZO

ANALISI AGLI SPOSTAMENTI.....	1-3
3.1 Premessa	1-3
3.2 Il metodo di Newmark (1965).	3-3
3.3 L'approccio di Richard & Elms (1979).....	5-3
3.4 L'approccio di Cascone et al. (1993).....	8-3
3.5 L'approccio di Caltabiano (1999)	10-3
3.6 La soluzione di Stamatopoulos et al. (2006)	13-3

PARTE II

Premessa	1-II
Posizione del problema	1-II
Schemi di riferimento per l'analisi	4-II

CAPITOLO QUARTO

SOLUZIONI IN FORMA CHIUSA LA DETERMINAZIONE DEL COEFFICIENTE DI SPINTA ATTIVA, DEL COEFFICIENTE SISMICO CRITICO E DEL COEFFICIENTE SISMICO EQUIVALENTE PER LO SCHEMA DI MURO DI SOSTEGNO.....1-4

4.1 Generalità	1-4
4.2 Schema di riferimento	1-4
4.3 Determinazione del coefficiente di spinta attiva e del coefficiente sismico critico ..	3-4
4.4 Determinazione del coefficiente sismico equivalente	11-4
4.5 Analisi parametrica	13-4

Appendice 4A - Dimostrazione analitica delle proprietà delle funzioni Φ_3 e Ψ_315-4

4A.1 – Proprietà della funzione Φ_3	15-4
4A.2 – Proprietà della funzione Ψ_3	16-4

Appendice 4B – Determinazione analitica della relazione di Mononobe - Okabe...20-4

CAPITOLO QUINTO

SCHEMA DI MURO DI SOSTEGNO IN PRESENZA DI UN SOVRACCARICO DISTANZIATO ED ESTESO INDEFINITAMENTE.....1-5

5.1 Generalità	1-5
5.2 Schema di riferimento	1-5
5.3 Determinazione del coefficiente di spinta attiva e del coefficiente sismico critico ..	3-5
5.4 Determinazione del coefficiente sismico equivalente	12-5
5.5 Analisi parametrica	14-5

Appendice 5A - Dimostrazione analitica delle proprietà delle funzioni Φ_3 e Ψ_316-5

5A.1 – Proprietà della funzione Φ_3	16-5
5A.2 – Proprietà della funzione Ψ_3	17-5

Appendice 5B – Determinazione dell'espressione analitica della relazione per la valutazione del coefficiente di spinta attiva20-5

CAPITOLO SESTO

SCHEMA DI MURO CON TERRAPIENO DI ALTEZZA FINITA IN PRESENZA DI SOVRACCARICO

1-6	
6.1 Generalità	1-6
6.2 Schema di riferimento	1-6
6.3 Determinazione del coefficiente di spinta attiva e del coefficiente sismico critico ..	3-6
6.4 Determinazione del coefficiente sismico equivalente	10-6
6.5 Analisi parametrica	12-6
Appendice 6A - Dimostrazione analitica delle proprietà delle funzioni Φ_3 e Ψ_3	14-6
6A.1 – Proprietà della funzione Φ_3	14-6
6A.2 – Proprietà della funzione Ψ_3	15-6
Appendice 6B – Determinazione dell'espressione analitica della relazione per la valutazione del coefficiente di spinta attiva	18-6

CAPITOLO SETTIMO

SCHEMA DI MURO DI SOSTEGNO CON TERRAPIENO INCLINATO SOGGETTO AD UN CARICO LINEARE

1-7	
7.1 Generalità	1-7
7.2 Schema di riferimento	1-7
7.3 Determinazione del coefficiente di spinta attiva e del coefficiente sismico critico ..	3-7
7.4 Determinazione del coefficiente sismico equivalente	10-7
7.5 Analisi parametrica	11-7
Appendice 7A - Dimostrazione analitica delle proprietà delle funzioni Φ_3 e Ψ_3	14-7
7A.1 – Proprietà della funzione Φ_3	14-7
7A.2 – Proprietà della funzione Ψ_3	15-7
Appendice 7B – Determinazione dell'espressione analitica della relazione del coefficiente di spinta attiva	17-7

PARTE III

CAPITOLO OTTAVO

ANALISI AGLI SPOSTAMENTI NELL'IPOTESI DI PICCOLE DEFORMAZIONI.1-8

8.1	Premessa	1-8
8.2	Impostazione dell'analisi	1-8
8.3	Ipotesi sulla posizione della superficie di scorrimento presa in esame nell'analisi	5-8
8.4	Considerazioni sulla validità delle espressioni del coefficiente di spinta attiva	7-8
8.5	Analisi parametrica.....	9-8

Appendice 8.A: ...Determinazione del fattore di forma per il caso di muro di sostegno	11-8
--	------

Appendice 8.B: Determinazione del fattore di forma per il caso di muro di sostegno in presenza di un sovraccarico distanziato ed esteso indefinitamente	12-8
--	------

Appendice 8.C: Determinazione del fattore di forma per il caso di muro con terrapieno di altezza finita in presenza di sovraccarico	13-8
--	------

Appendice 8.D: Determinazione del fattore di forma per il caso di muro di sostegno con terrapieno inclinato soggetto ad un carico lineare	14-8
--	------

CAPITOLO NONO

ANALISI AGLI SPOSTAMENTI NELL'IPOTESI DI GRANDI DEFORMAZIONI1-9

9.1	Schema di riferimento per l'analisi	1-9
9.2	Determinazione del coefficiente di spinta.....	2-9
9.3	Determinazione del coefficiente sismico critico.....	5-9
9.4	Determinazione dell'equazione del moto del sistema e del fattore di forma .	8-9
9.5	ANALISI PARAMETRICA	9-9
9.5.1	Coefficiente di spinta	9-9
9.5.2	Coefficiente sismico critico	11-9
9.5.3	Fattore di forma	12-9

CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

BIBLIOGRAFIA

RINGRAZIAMENTI

INDICE DELLE FIGURE

CAPITOLO SECONDO

Figura 2.1– Funzionamento statico delle opere di sostegno a gravità (da Aversa e Callisto 2008).

Figura 2.2– Schema di riferimento per la soluzione di Muller – Breslau (1906).

Figura 2.3– Schema di riferimento per la soluzione di Monobe & Okabe.

Figura 2.4– Schema di riferimento per la soluzione di Motta (1993).

Figura 2.5– Schema di riferimento per la soluzione di Motta (1994).

Figura 2.6– Schema di riferimento per la soluzione di Caltabiano et al. (2000).

Figura 2.7– Schema di riferimento per la soluzione di Caltabiano et al. (2003).

Figura 2.8– Schema di riferimento per la soluzione di Greco (2001).

Figura 2.9– Schema di riferimento per la soluzione di Greco (2001).

Figura 2.10– Schema di riferimento per la soluzione di Greco (2005).

Figura 2.11– Schema di riferimento per la soluzione di Greco (2005).

CAPITOLO TERZO

Figura 3.1 – Schema di blocco rigido che scorre su piano orizzontale.

Figura 3.2 – Schema di riferimento per la descrizione dell'approccio proposto da Richard & Elms (1979).

Figura 3.3 – Schema di riferimento per la descrizione dell'approccio di Cascone et al.(1993)

Figura 3.4 – Schema di riferimento per la descrizione dell'approccio di Caltabiano (1999)

Figura 3.5 – Schema di riferimento per la soluzione del modello di Stamatopoulos et al. (2006)

Figura 3.6 – Cambio di geometria ipotizzato da Stamatopoulos et al. (2006)

PARTE SECONDA

Figura II.1: schema di riferimento utilizzato per la descrizione delle soluzioni con approccio MB

Figura II.2.a – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 2.a

Figura II.2.b – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 2.b

Figura II.3.a – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 3.a

Figura II.3.b – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 3.b

Figura II.3.c – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 3.c

Figura II.4.a – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 4.a

Figura II.4.b – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 4.b

Figura II.4.c – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 4.c

Figura II.5.a – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 5.a

Figura II.5.b – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 5.b

Figura II.5.c – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 5.c

Figura II.6: schema di riferimento muro

CAPITOLO QUARTO

Figura 4.1 – Schema di riferimento adottato per l'analisi MB

Figura 4.2 – Schema di riferimento per la determinazione del coefficiente sismico equivalente

Figura 4.3 – Variazione di K_{ae} e di $k_{h,c}$ con l'angolo α

Figura 4.4 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi'=30^\circ$

Figura 4.5 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi'=30^\circ$

Figura 4.6 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi'=30^\circ$

Figura 4.7 – Confronto tra i valori di $k_{h,c}$ e α forniti dagli abachi di Fig. 4.4, 4.5 e 4.6 per il caso $\Omega=0$

CAPITOLO QUINTO

Figura 5.1 – Schema di riferimento adottato per l'analisi MB

Figura 5.2 – Schema di riferimento per la determinazione del coefficiente sismico equivalente

Figura 5.3 – Variazione di K_{ae} e di $k_{h,c}$ con l'angolo α

Figura 5.4 – Effetto della distanza normalizzata λ e del coefficiente n_q su $K_{ae(g,q)}$, su α_c e su $k_{h,c}$

Figura 5.5 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi'=30^\circ$

Figura 5.6 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi'=35^\circ$

Figura 5.7 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi'=40^\circ$

Figura 5.8 – Confronto tra i valori di $k_{h,c}$ e α forniti dagli abachi di Fig. 5.5, 5.6 e 5.7 per il caso $\Omega=0$

CAPITOLO SESTO

Figura 6.1 – Schema di riferimento adottato per l'analisi MB

Figura 6.2 – Schema di riferimento per la determinazione del coefficiente sismico equivalente

Figura 6.3 – Variazione di K_{ae} e di $k_{h,c}$ con l'angolo α

Figura 6.4 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi'=30^\circ$

Figura 6.5 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi'=35^\circ$

Figura 6.6 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi'=40^\circ$

Figura 6.7 – Confronto tra i valori di $k_{h,c}$ e α forniti dagli abachi di Fig. 6.4, 6.5 e 6.6 per il caso $\Omega=0$

CAPITOLO SETTIMO

Figura 7.1 – Schema di riferimento adottato per l'analisi MB

Figura 7.2 – Schema di riferimento per la determinazione del coefficiente sismico equivalente

Figura 7.3 – Variazione di K_{ae} e di $k_{h,c}$ con l'angolo α

Figura 7.4 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi'=30^\circ$

Figura 7.5 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi'=35^\circ$

Figura 7.6 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi'=40^\circ$

Figura 7.7 – Confronto tra i valori di $k_{h,c}$ e α forniti dagli abachi di Fig. 7.4, 7.5 e 7.6 per il caso $\Omega=0$

CAPITOLO OTTAVO

- Figura 8.1 – Schema di riferimento per la determinazione dell'equazione del moto.
- Figura 8.2 – Schema di riferimento per l'analisi agli spostamenti.
- Figura 8.3 – Schema di riferimento per il caso di muro di sostegno.
- Figura 8.4 – Schema di riferimento per il caso di muro di sostegno in presenza di un sovraccarico distanziato ed esteso indefinitamente.
- Figura 8.5 – Schema di riferimento per il caso di muro con terrapieno di altezza finita in presenza di sovraccarico.
- Figura 8.6 – Schema di riferimento per il caso di muro di sostegno con terrapieno inclinato soggetto ad un carico lineare.
- Figura 8.7 – Variazione del fattore di forma C_w e dell'angolo che individua il cinematismo critico con il peso normalizzato Γ per lo schema analizzato nell'Appendice 8A
- Figura 8.8 – Variazione del fattore di forma C_w e dell'angolo che individua il cinematismo critico con il peso normalizzato Γ per lo schema analizzato nell'Appendice 8B
- Figura 8.9 – Variazione del fattore di forma C_w e dell'angolo che individua il cinematismo critico con il peso normalizzato Γ per lo schema analizzato nell'Appendice 8C
- Figura 8.10 – Variazione del fattore di forma C_w e dell'angolo che individua il cinematismo critico con il peso normalizzato Γ per lo schema analizzato nell'Appendice 8D

CAPITOLO NONO

- Figura 9.1 – Schema di riferimento per l'analisi agli spostamenti: configurazione indeformata
- Figura 9.2 – Schema di riferimento per l'analisi agli spostamenti: cambio di geometria
- Figura 9.3 – Configurazione deformata del sistema
- Figura 9.4 – Schema di riferimento per l'analisi MB
- Figura 9.5 – Schema di riferimento per il primo concio
- Figura 9.6 – Schema di riferimento per il secondo concio
- Figura 9.7 – Schema di riferimento per la valutazione dell'equazione del moto
- Figura 9.8 – Variazione di K_{ae} con il rapporto ϕ_{12}/ϕ
- Figura 9.9 – Variazione di K_{ae} con il rapporto ϕ_{12}/ϕ
- Figura 9.10 – Variazione di K_{ae} con il parametro χ
- Figura 9.11 – Variazione di $k_{h,c}$ con il rapporto ϕ_{12}/ϕ
- Figura 9.12 – Variazione di $k_{h,c}$ con il rapporto ϕ_{12}/ϕ
- Figura 9.13 – Variazione di $k_{h,c}$ con il parametro χ
- Figura 9.14 – Variazione di $k_{h,c}$ con il peso normalizzato Γ
- Figura 9.15 – Variazione di C_w con il parametro χ
- Figura 9.16 – Variazione di C_w con il peso normalizzato Γ
- Figura 9.17 – Variazione di C_w con il rapporto ϕ_{12}/ϕ
- Figura 9.18 – Variazione di C_w con il rapporto ϕ_{12}/ϕ

Introduzione

Sin dai primi studi di ingegneria geotecnica sismica dedicati ai problemi di stabilità delle opere di sostegno, si è adottato per il terreno il tradizionale modello di comportamento rigido-plastico, peraltro largamente utilizzato nell'ambito degli studi dei problemi statici. La caratterizzazione del "terremoto", analogamente a quanto avveniva negli altri settori dell'ingegneria, era effettuata sinteticamente attraverso un unico valore dell'accelerazione ritenuto, rappresentativo del sisma; tale valore veniva in genere assunto pari alla massima accelerazione di progetto attesa al sito, ovvero pari ad una aliquota della stessa.

In questo approccio, indicato come pseudo – statico le azioni indotte dal sisma, tipicamente dinamiche, sono convertite in "equivalenti" azioni statiche aggiuntive sulle masse in gioco, valutate come forze d'inerzia delle masse, proporzionali alle accelerazioni rappresentative del sisma applicate in maniera statica. In particolare, l'analisi consisteva nel valutare un fattore di sicurezza pseudo – statico F_{PS} (definito come rapporto tra tensioni, forze e momenti resistenti rispetto a quelli instabilizzanti) introducendo le componenti orizzontale $k_{h,eq}$ e verticali $k_{v,eq}$ del coefficiente sismico equivalente. La verifica si ritiene soddisfatta se $F_{PS} > 1$ ovvero se il valore delle tensioni, forze e momenti resistenti è superiore a quello delle corrispondenti instabilizzanti. La componente orizzontale $k_{h,eq}$ è generalmente assunta pari ad una aliquota η_H della componente orizzontale della massima accelerazione attesa al sito $k_{H,max}$ e pertanto è esprimibile come:

$$k_{h,eq} = \eta_H \cdot k_{H,max}$$

La componente verticale $k_{v,eq}$ è invece determinata come una aliquota di quella orizzontale $k_{h,eq}$; tale frazione è generalmente funzione delle caratteristiche dell'evento sismico preso in esame nella analisi.

Secondo le disposizioni del D.M. 16/01/1996 si assumeva $k_v = 0$ e $k_h = \frac{s-2}{100} \cdot \varepsilon$ in cui s è il grado di sismicità ed ε è il coefficiente di fondazione, variabile tra 1 e 1,3.

Nella più recente O.P.C.M. 3274/2003 si assume $k_{h,eq} = 0,5 k_{H,max}$ (ovvero $\eta_H = 0,5$) e $k_{v,eq} = \pm 0,5 k_{h,eq}$. Con tale assunzione il coefficiente sismico orizzontale $k_{h,eq}$ risulta sempre inferiore a $k_{h,max}$; inoltre secondo tale decreto attuativo è possibile tenere conto degli effetti di sito tramite due coefficienti S ed S_T , rispettivamente fattore di amplificazione stratigrafico e

topografico, implicitamente nella determinazione della componente orizzontale della massima accelerazione sismica attesa al sito secondo la relazione seguente:

$$k_{H,max} = \frac{a_g}{g} \cdot S \cdot S_T$$

in cui il termine a_g/g rappresenta il rapporto tra la massima accelerazione attesa al suolo su sito rigido di riferimento e l'accelerazione di gravità.

Nello spirito del metodo pseudo – statico $k_{h,eq}$ rappresenta il parametro che sintetizza gli effetti della azione sismica sull'opera di sostegno rigida; in realtà gli effetti prodotti dal sisma dipendono oltre che dalle sue caratteristiche anche da quelle dell'opera interessata. Pertanto una corretta scelta del coefficiente $k_{h,eq}$ dovrebbe tenere conto di entrambi questi aspetti. Sulla base di queste considerazioni, il rapporto η_H non può assumere un valore costante indipendentemente dalle caratteristiche dell'evento sismico e la sua scelta deve necessariamente dipendere da più parametri atti a descrivere gli effetti indotti dal sisma sull'opera di sostegno.

L'emanazione del più recente D.M. 14/01/2008, che recepisce le indicazioni degli Eurocodici, ha introdotto grandi novità sia per la verifica che per il progetto delle opere di sostegno. Questa è una norma basata sul metodo degli stati limite ultimi e di esercizio che fa riferimento alle caratteristiche “prestazionali” dell'opera (ben diverso dall'approccio considerato dalle normative precedenti) ma che ancora consente la progettazione dei sistemi geotecnici con il metodo pseudo – statico. Notevoli cambiamenti sono stati apportati ma nella sostanza il progettista si trova ancora ad avere a che fare con un metodo che ricalca quello pseudo – statico, a meno dei nuovi valori di coefficienti sismici.

La valutazione degli spostamenti permanenti che un'opera di sostegno a gravità può subire in seguito ad un evento sismico rappresenta una valida alternativa progettuale alla più consueta analisi pseudo – statica. Infatti, il mancato soddisfacimento della condizione di equilibrio tra le forze in gioco in un'analisi pseudo – statica individua una condizione di collasso dell'opera indipendentemente dall'entità degli spostamenti permanenti che essa può manifestare.

Una più razionale valutazione del comportamento sismico dell'opera può essere, invece, basata su criteri prestazionali. Per questo motivo alcuni strumenti normativi italiani e comunitari (O.P.C.M. 3274/2003, D.M. 14/01/08, EC8-5) e le recenti linee guida dell'Associazione Geotecnica Italiana (A.G.I., 2005), annoverano il metodo degli spostamenti tra i possibili metodi di analisi dinamica semplificata per lo studio del comportamento sismico delle opere di sostegno a gravità.

I vantaggi di un'analisi agli spostamenti rispetto alla valutazione pseudo – statica del comportamento sismico delle opere di sostegno a gravità sono molteplici:

a) l'analisi agli spostamenti consente una progettazione di carattere prestazionale basata sul confronto tra valori degli spostamenti permanenti attesi, per un evento sismico di riferimento, e valori degli spostamenti permanenti ritenuti tollerabili in relazione ad un prefissato stato limite ultimo o di esercizio. In tale contesto, l'istantaneo superamento delle resistenze da parte delle azioni instabilizzanti implica un accumulo di spostamenti permanenti sulla cui ammissibilità ci si deve poi pronunciare;

b) gli elevati valori delle azioni sismiche previsti in alcuni casi dalle norme, rendono la valutazione di tipo prestazionale l'unica strada tecnicamente percorribile per una progettazione razionale ed economica delle opere e per un'affidabile valutazione del loro comportamento nei confronti di un evento sismico di forte intensità;

c) così come già è avvenuto con riferimento al comportamento sismico dei pendii (Stewart et al. 2003; Biondi et al., 2007a; Rampello & Silvestri, 2009), delle dighe in terra (Hynes-Griffin & Franklin 1984) e delle discariche di rifiuti solidi urbani (Bray et al., 1998), anche per le opere di sostegno a gravità è possibile definire criteri di equivalenza tra l'analisi pseudo-statica e l'analisi agli spostamenti mediante i quali individuare opportuni valori del coefficiente sismico equivalente che, usati in un'analisi pseudo-statica, conducono ad una valutazione del comportamento delle opere in accordo con quella fornita da più accurate analisi dinamiche semplificate (Biondi et al., 2007b, 2009).

Per l'applicazione del metodo degli spostamenti è necessario determinare il coefficiente sismico critico del sistema muro-terreno. In tale analisi è necessario riferirsi ad un prefissato cinematismo, intendendo con tale termine il meccanismo con il quale l'opera di sostegno manifesta spostamenti permanenti a causa delle azioni instabilizzanti che, temporaneamente, superano le resistenze.

Il cinematismo preso in esame nelle analisi proposte in questo lavoro prevede una traslazione dell'opera lungo il piano di posa della fondazione; tale meccanismo è, infatti, quello che, generalmente, condiziona il comportamento sismico delle opere di sostegno rigide (Callisto & Aversa, 2008) ad esclusione dei casi in cui sono concomitanti fenomeni di liquefazione dinamica dei terreni di fondazione.

Gli approcci e le soluzioni disponibili nella letteratura per la determinazione del coefficiente sismico critico delle opere di sostegno rigide consistono in procedure numeriche di tipo iterativo o in soluzioni in forma chiusa; queste ultime, però, non sono di agevole applicazione e hanno un campo di applicazione limitato a particolari condizioni geometriche e di carico.

D'altra parte, nelle analisi agli spostamenti in cui il coefficiente sismico critico è variabile nel tempo, le soluzioni numeriche rendono l'analisi onerosa dal punto di vista computazionale.

Per tali motivi è evidente la necessità di soluzioni in forma chiusa, di carattere generale, che consentano la valutazione del coefficiente sismico critico in maniera agevole. Tali soluzioni, inoltre, rivestono un ruolo importante anche nell'ambito delle procedure per la definizione del coefficiente sismico equivalente cui prima si è accennato. Infine, poiché le massime sollecitazioni istantanee nell'opera di sostegno possono essere determinate utilizzando un valore della spinta attiva calcolato in corrispondenza del valore critico del coefficiente sismico (Callisto & Aversa, 2008), espressioni in forma chiusa per la determinazione della componente orizzontale dell'accelerazione critica del sistema muro-terreno possono risultare utili anche ai fini del dimensionamento strutturale delle opere di sostegno.

Sulla base di questa premessa il presente lavoro di tesi è stato incentrato sulla determinazione di soluzioni in forma chiusa per la valutazione del coefficiente sismico critico e del coefficiente sismico equivalente e sulla definizione di una idonea procedura per la valutazione degli spostamenti permanenti sulle opere di sostegno rigide libere di traslare lungo il piano di posa.

PARTE I

CAPITOLO PRIMO

LA STABILITÀ SISMICA DELLE OPERE DI SOSTEGNO: ESPERIENZE DA RECENTI EVENTI SISMICI

Quasi tutti i rapporti che riferiscono dei danni subiti dalle opere a causa di un terremoto documentano anche il collasso di strutture di sostegno intendendosi per collasso non necessariamente il crollo della struttura, bensì la perdita di quei requisiti di funzionalità per i quali era stata progettata.

Sebbene sia generalmente riconosciuto che i terremoti producano un incremento delle pressioni laterali sui muri di sostegno tali da provocare il collasso dell'opera, la letteratura relativa ai danni prodotti dai terremoti contempla pochi casi di collasso o spostamenti di muri di sostegno. D'altra parte, la mancanza di dati circa il comportamento dei muri di sostegno in condizioni sismiche non è indicativa del fatto che i muri resistano bene ai terremoti tanto da non fare registrare spostamenti, ma piuttosto del fatto che i danni a questo tipo di opere destano poco interesse rispetto agli effetti devastanti dei terremoti su altri tipi di strutture, risultando spesso poco documentati.

Tuttavia, risultano ben documentati gli spostamenti subiti dalle spalle dei ponti causati proprio dall'incremento dinamico delle pressioni. Tali spostamenti infatti, determinando forti distorsioni o addirittura, in qualche caso il crollo dell'impalcato, hanno sicuramente suscitato maggiore interesse che non quelli di semplici muri di sostegno.

Anche i danni subiti dalle banchine portuali (*quay – walls*) risultano ampiamente documentati nella letteratura riguardante i terremoti giapponesi. Gli spostamenti di questi muri variano entro un intervallo che va da circa 30 a 780 cm. In questi casi, secondo Seed – Whitman (1970), il collasso si è verificato per la combinazione di due effetti: l'incremento delle pressioni nel terreno a tergo del muro e la diminuzione delle pressioni dell'acqua dall'altra parte. Non è esclusa inoltre la possibilità che si siano manifestati significativi fenomeni di liquefazione con perdita di resistenza del terrapieno e del terreno di fondazione. Whitman (1991) in uno stato dell'arte sulla progettazione antisismica dei muri di sostegno, ha

sintetizzato in due punti le osservazioni sul comportamento delle opere di sostegno durante i terremoti:

- le strutture a contatto con l'acqua, in cui il terrapieno è inevitabilmente in gran parte saturo, hanno mostrato una scadente resistenza alle azioni sismiche esibendo fenomeni di collasso talora spettacolari causati dalle scadenti caratteristiche del terreno di fondazione e dall'incremento delle pressioni interstiziali nel terrapieno;
- le strutture non interessate dalla presenza di acqua, grazie all'elevato grado di sicurezza implicito nei metodi di progettazione antisismica, non hanno, subito evidenti fenomeni di instabilizzazione e solo in pochi casi si sono osservati spostamenti permanenti significativi.

Amano, Azuma e Ishii (1956) hanno riportato numerosi casi di completo collasso del sistema muro terreno e della sovrastruttura in caso di terreno saturo, dovuti a terremoti verificatisi in Giappone tra il 1930 e il 1952, nei quali si sono rilevati spostamenti dei muri molto elevati. Danni sui muri di banchine portuali sono indicati anche da Matsuo e Ohara (1960). Duke e Leeds (1963) hanno osservato il ribaltamento di muri a gravità, spostamenti dell'ordine di 1m di paratie tirantate e notevoli distorsioni dell'impalcato del ponte Teja dovute al moto dei muri di spalla a seguito del terremoto del Chile del 1960.

Ampia documentazione sui danni provocati dal terremoto di Niigata del 1964 è stata fornita da Hayashi, Kubo e Nakase (1966) e da Kawakami e Asada (1966). In particolare Hayashi et al. (1966) hanno definito cinque livelli di danno ed hanno attribuito alle opere di sostegno del porto di Nigata il livello di danno subito (tabella 1.1) mettendo in tal modo in evidenza la notevole incidenza dei casi di collasso dell'intera struttura.

Ross, Seed e Migliaccio (1969) hanno documentato i danni subiti dai porti a causa del terremoto avvenuto in Alaska nel 1964 sottolineando che in qualche caso si sono manifestati spostamenti permanenti delle paratie costituenti le spalle dei ponti, indotti dalle pressioni del terreno e da fenomeni di liquefazione.

Jennings (1971) ha illustrato alcuni casi di collasso di opere di sostegno avvenuti durante il terremoto di San Fernando (1971) in California. Gazetas, Dakoulas e Dennehy (1990) hanno riportato i risultati di un'analisi del comportamento di 110 paratie, nella maggior parte dotate di tiranti, effettuata da Kitajima e Uwabe (1978), dalla quale si evince che il 64% di tali opere ha sofferto danni a causa di eventi sismici. In particolare si è osservato che anche le paratie progettate secondo le disposizioni normative antisismiche sono state danneggiate nella medesima percentuale.

Alcune opere di sostegno dei porti di Corinto, Kiato e Kalamata ed alcuni muri posti a sostegno di rilevati stradali sono stati danneggiati dai terremoti avvenuti in Grecia tra il febbraio ed il marzo del 1981 (Gravas e Souflis, 1982) e nel marzo 1986 (Pitilakis e Moutsakis, 1989). In particolare Gravas e Souflis, (1982) hanno descritto la formazione di fessure nei muri, lo sviluppo di cedimenti nel terreno di fondazione e nei terrapieni, casi di spostamenti e rotazioni e di completi collassi dovuti alla spinta dinamica del terrapieno ed a fenomeni localizzati di liquefazione. Pitilakis e Moutsakis (1989) hanno descritto, e rianalizzato con un programma di calcolo agli elementi finiti, il comportamento di un muro del porto di Kalamata che ha subito una traslazione di circa 0,15m ed una rotazione di 4-5° con un conseguente cedimento del terrapieno di circa 0,20m dietro la testa del muro.

Spostamenti di circa 1,5m sono documentati per una paratia di pali in acciaio ad Akita, Giappone, a seguito di un terremoto avvenuto nel 1983 (Iai, Matsunaga e Urakami, 1989). Ho, Demby e Frigaszy (1990) hanno presentato dati circa il comportamento di dieci muri tirantati durante il terremoto di Whittier (California) del 1987, sottolineando la soddisfacente risposta dei muri che, solo in qualche caso, hanno subito spostamenti di pochi millimetri. Whitman (1991) ha elencato alcuni casi di collasso di muri di sostegno e di spostamenti compresi tra 0,05m e 0,7m causati dal terremoto del Chile del 1985 per i quali sia errori di esecuzione, sia l'insorgenza di sovrappressioni interstiziali del terrapieno hanno giocato un ruolo rilevante; Whitman ha inoltre attribuito alla liquefazione i notevoli spostamenti delle banchine del porto di Oakland, verificatisi a seguito del terremoto di Loma Prieta del 1989. Altri casi di danni subiti dalle opere di sostegno a causa di eventi sismici sono citati da Nazarian e Hadjian (1979) e da Ortiz, Scott e Lee (1983).

Tateyama, Tatsuoka, Koseki e Horii (1995) hanno fornito una dettagliata descrizione dei danni riportati da numerose opere di sostegno di diversa tipologia a seguito del terremoto di Hanshin-Awaji (Giappone) del Gennaio 1995, che ha colpito la città di Kobe con intensità, espressa in magnitudo Richter, pari a 7.2. Sebbene in diversi siti del distretto di Hanshin siano insorti fenomeni di liquefazione, i casi di collasso dei muri sono da ricondursi esclusivamente all'incremento delle pressioni laterali sui muri, molti dei quali erano stati realizzati più di cinquanta anni prima dell'evento sismico, senza alcuna alcuna precauzione nei confronti di un eventuale evento sismico.

grado di danno	descrizione	lunghezza totale [m]	strutture danneggiate
4	Completo collasso dell'intera struttura	7120	57,1%
3	Collasso di parti principali della struttura	3740	30,0%
2	Apprezzabili deformazioni di parti principali della struttura	35	0,3%
1	Collasso di parti secondarie della struttura	630	14,5%
0	Nessun danno	1560	7,6%

Tabella 1.1 – Livelli di danno individuati da Hayashi et al. (1996)

CAPITOLO SECONDO

L'ANALISI PSEUDO – STATICA

2.1 Generalità

Fino agli anni '70, gli studi sul comportamento sismico delle opere di sostegno, sono stati esclusivamente rivolti alla determinazione del regime delle pressioni laterali ed alla loro distribuzione, in quanto elementi essenziali per il calcolo delle spinte e quindi per la progettazione dei muri. D'altra parte le opere di sostegno risultano suscettibili di compiere spostamenti a causa delle azioni che si mobilitano nel terrapieno ed alla inerzia del muro che si destano allorquando insorga una forzante dinamica dovuta ad una sorgente di vibrazioni o ad un evento sismico. Gli spostamenti che si manifestano modificano a loro volta il regime delle pressioni e si instaura quindi un fenomeno di interazione terreno – struttura durante il quale, il sistema muro – terreno, in equilibrio dinamico, fornisce una risposta che dipende non soltanto dalle sue caratteristiche geometriche e meccaniche, ma anche dalla forzante esterna.

Le opere di sostegno a gravità riportano in fondazione la spinta sub-orizzontale S applicata dal terrapieno, componendola per il peso proprio W e trasformandola in un'azione sub verticale R , la cui retta d'azione interseca l'area d'impronta della fondazione stessa (Fig. 2.1). Da questo punto di vista, non c'è alcuna differenza sostanziale fra muri costituiti interamente da materiale strutturale (Fig. 2.1.a), muri a mensola in calcestruzzo armato (Fig. 2.1.b), e opere in terra rinforzata (Fig. 2.1.c): il funzionamento globale è analogo, mentre le differenze risiedono nella ripartizione interna (locale) delle azioni fra elementi strutturali e terreno.

Anche il comportamento sismico globale delle diverse opere di sostegno, mostrate in Figura 2.1, è concettualmente simile. Le azioni sismiche sono costituite da un incremento di spinta, indotto dalle azioni inerziali sul terrapieno e sulla massa generalmente significativa dell'opera. Le resistenze derivano dai terreni di fondazione e possono schematicamente suddividersi in resistenza allo scorrimento lungo il piano di posa e resistenza per raggiungimento di carico limite. Tipicamente all'aumentare delle azioni sismiche, ad andamento prevalentemente orizzontale, i due meccanismi tendono a coincidere ed il collasso tende a manifestarsi per scorrimento sul piano di posa; questo pertanto è il cinematismo che maggiormente condiziona il comportamento sismico del muro (Aversa & Callisto, 2008). La modalità di collasso per ribaltamento, cioè per rotazione intorno al punto

dell'area di impronta della fondazione più lontano dal terrapieno, è difficilmente in grado di condizionare il comportamento sismico dell'opera, poiché ben prima che la risultante delle azioni passi per il punto estremo del poligono di appoggio le azioni unitarie in fondazione divengono così elevate da produrre il raggiungimento del carico limite.

In questo capitolo, sulla scorta delle ipotesi che hanno portato alla determinazione delle soluzioni del coefficiente di spinta per il caso statico, descriveremo le principali soluzioni presenti in letteratura per la determinazioni delle soluzioni del coefficiente di spinta, per il caso di opere di sostegno soggette ad un evento sismico considerando, tra l'altro, differenti condizioni al contorno e di carico.

2.2 Le soluzioni per il calcolo delle spinte in condizioni statiche

È ben noto che la funzione a cui devono assolvere le opere di sostegno, nelle loro diverse tipologie, consista nel contenimento dei terrapieni di diversa natura e profili, ed è altresì noto che il terreno e l'opera di sostegno interagiscono in uno scambio di azioni e reazioni necessarie a garantire l'equilibrio dell'intero sistema terreno - struttura. Ciò rende evidente che la progettazione delle opere di sostegno è direttamente legata alla determinazione delle azioni in termini di pressioni laterali o di spinta risultante che il terreno esercita sulla struttura.

Il problema della determinazione della spinta del terreno sui muri di sostegno è stato affrontato rigorosamente per la prima volta da Coulomb (1776) che individuò le condizioni limite per l'equilibrio statico di un cuneo di terreno incoerente delimitato dal paramento di monte del muro, dall'estradosso del terrapieno e dalla superficie di rottura assumendo che tale superficie fosse piana, che la resistenza al taglio del terreno fosse interamente mobilitata e che la distribuzione delle pressioni laterali fosse di tipo idrostatico. Alla medesima soluzione, analizzando le condizioni di rottura in stato limite attivo di un volume elementare di terreno, pervenne Rankine (1857).

Sulla base di tali metodi di calcolo, e con riferimento allo schema mostrato in Figura 2.2, è possibile esprimere la risultante delle pressioni attive esercitate sul muro dal terrapieno mediante la relazione:

$$S_a = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot K_a \quad (2.1)$$

dove:

- γ è il peso dell'unità di volume del terreno sostenuto dall'opera;
- H è l'altezza del muro;
- K_a è il coefficiente di spinta attiva;

In particolare secondo la teoria di Coulomb generalizzata da Muller – Breslau (1906) per tenere conto della presenza di attrito tra muro e terreno, dell'inclinazione del paramento di monte del muro, nonché dell'inclinazione del terrapieno l'espressione del coefficiente di spinta attiva risulta:

$$K_a = \frac{\cos^2(\phi' - \beta)}{\cos^2 \beta \cdot \cos(\delta + \beta) \cdot \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi' + \delta) \cdot \sin(\phi' - i)}{\cos(\delta + \beta) \cdot \cos(i - \beta)}} \right]^2} \quad (2.2)$$

dove:

- ϕ' è l'angolo di resistenza al taglio del terreno sostenuto dall'opera;
- δ è l'angolo di attrito muro – terreno;
- i è l'angolo formato dall'estradosso del terrapieno con l'orizzontale;
- β è l'angolo formato dal paramento interno del muro con la verticale;

Al coefficiente di spinta attiva descritto dell'eq. 2.2 corrisponde la superficie di rottura inclinata dell'angolo:

$$\alpha_a = \phi' + \arctan \left[\frac{\tan(\phi' - i) + C_1}{C_2} \right] \quad (2.3)$$

dove:

$$C_1 = \sqrt{\tan(\phi' - i) \cdot [\tan(\phi' - i) + \cot(\phi' - \beta)] \cdot [1 + \tan(\delta + \beta) \cdot \cot(\phi' - \beta)]} \quad (2.4)$$

$$C_2 = 1 + \tan(\delta + \beta) \cdot [\tan(\phi' - i) + \cot(\phi' - \beta)] \quad (2.5)$$

rispetto all'orizzontale.

Sotto le ipotesi semplificative $\beta = \delta = i = 0$ il valore del coefficiente di spinta attiva determinato con la relazione di Muller – Breslau coincide con quella ottenuta da Rankine:

$$K_a = \frac{1 - \sin \phi'}{1 + \sin \phi'} = \tan^2 \left(45 - \frac{\phi'}{2} \right) \quad (2.6)$$

a cui è associata una superficie di rottura inclinata di un angolo

$$\alpha_a = 45 + \frac{\phi'}{2} \quad (2.7)$$

rispetto all'orizzontale.

Analogamente per le condizioni di spinta passiva valgono le seguenti relazioni:

$$S_p = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot K_p \quad (2.8)$$

$$K_p = \frac{\cos^2(\phi' + \beta)}{\cos^2 \beta \cdot \cos(\delta - \beta) \cdot \left[1 - \sqrt{\frac{\sin(\phi' + \delta) \cdot \sin(\phi' + i)}{\cos(\delta - \beta) \cdot \cos(i - \beta)}} \right]^2} \quad (2.9)$$

$$\alpha_p = -\phi' + \arctan \left[\frac{\tan(\phi' + i) + C_3}{C_4} \right] \quad (2.10)$$

dove:

$$C_3 = \sqrt{\tan(\phi' + i) \cdot [\tan(\phi' + i) + \cot(\phi' + \beta)] \cdot [1 + \tan(\delta - \beta) \cdot \cot(\phi' + \beta)]} \quad (2.11)$$

$$C_4 = 1 + \tan(\delta - \beta) \cdot [\tan(\phi' + i) + \cot(\phi' + \beta)] \quad (2.12)$$

e sotto le ipotesi semplificative $\beta = \delta = i = 0$:

$$K_p = \frac{1 + \sin \phi'}{1 - \sin \phi'} = \tan^2 \left(45 + \frac{\phi'}{2} \right) \quad (2.13)$$

$$\alpha_p = 45 - \frac{\phi'}{2} \quad (2.14)$$

L'assunzione di una superficie piana per la determinazione della spinta con il metodo dell'equilibrio limite comporta una semplificazione del problema che tuttavia fornisce, per le condizioni attive, soluzioni molto prossime a quelle deducibili prendendo in considerazione superfici di rottura più complesse attraverso il metodo delle caratteristiche sviluppato da Sokolowskii (1965) o con il metodo dell'analisi limite utilizzato da Chen (1975). Lo stesso però non può dirsi per il caso della determinazione della spinta in condizioni passive in cui l'assunzione di una superficie di rottura piana, per valori elevati dell'angolo di attrito muro – terreno, può portare ad una eccessiva sopravvalutazione del coefficiente K_p . In tale circostanza è opportuno ricorrere a soluzioni basate sull'adozione di superfici di rottura curve quali quelle di Terzaghi (1943) e Caquot – Kerisel (1948), basate sul metodo dell'equilibrio limite, o quelle di Chen (1975) e di Lancellotta (2002) basate sui teoremi dell'analisi limite.

Sebbene la teoria di Coulomb sia stata ampiamente utilizzata in passato per il dimensionamento delle opere di sostegno e costituisca il punto di partenza dei moderni

metodi di calcolo della spinta, è opportuno far rivelare che sotto l'ipotesi di distribuzione idrostatica delle pressioni, nel caso in cui si consideri l'attrito muro - terreno ($\delta \neq 0$), non è soddisfatta la condizione di equilibrio dei momenti (Terzaghi 1936, Prakash e Basavanna 1969). Inoltre le espressioni sopra riportate trovano applicazione solo nello studio dell'equilibrio statico del sistema muro – terreno e non sono idonee per la progettazione sismica delle opere di sostegno in quanto non prevedono nella determinazione della spinta del terreno, il contributo delle forze indotte dal moto del suolo durante l'evento sismico.

2.3 La soluzione di Mononobe – Okabe

La soluzione nota in letteratura come soluzione di Mononobe – Okabe fa riferimento ai lavori di Mononobe & Matsuo (1929) e Okabe (1926). Essa trae origini dalla teoria di Coulomb (1776) sulla valutazione della spinta attiva del terreno sui muri di sostegno rigidi in condizioni statiche, ed è senza dubbio il metodo di analisi più diffuso.

Mononobe & Matsuo (1929) e Okabe (1926) estesero la soluzione di Coulomb al campo sismico, considerando l'azione sismica mediante l'uso di forze di inerzia indotte, sulla massa del terreno retrostante il muro, da valori convenzionali delle componenti orizzontale e verticale della accelerazione sismica.

Un tale metodo presuppone l'assunzione di tutta una serie di ipotesi di base che, senz'altro, ne limitano l'applicazione condizionando, talvolta, la validità dei risultati che esso fornisce.

Per quanto riguarda il terreno le ipotesi riguardano:

- l'assenza di coesione;
- l'assunzione di un modello di tipo rigido-plastico, con criterio di rottura alla Mohr - Coulomb;
- l'ipotesi di condizioni drenate;

Per quanto concerne la configurazione geometrica le ipotesi prevedono:

- un paramento interno del muro piano o comunque inclinato;
- una superficie delimitante il terrapieno piana o comunque inclinata;

Per quanto riguarda infine il cinematismo del sistema muro-terreno e la configurazione a rottura la soluzione prevede che:

- il muro può solamente traslare lungo il suo piano di posa, assunto orizzontale, allontanandosi dal terrapieno, portando il terreno in una condizione di stato limite attivo;

- il potenziale cuneo di rottura versa in uno stato di equilibrio plastico delimitato dal muro, da un lato, e dal terreno sottostante, dall'altro, sotto l'azione delle forze statiche e dei carichi pseudo - statici indotti dal sisma;
- la superficie delimitante inferiormente il cuneo piana e passante per il tacco del muro;

Mononobe e Matsuo (1929) e Okabe (1926) considerano la condizione di equilibrio limite del cuneo al variare dell'inclinazione del piano di rottura, ricercando la condizione critica ovvero quella a cui corrisponde la massima reazione del muro e, quindi, la massima spinta che il terrapieno esercita sull'opera di sostegno in esame.

In Figura 2.3 sono rappresentate la geometria del problema e le forze in gioco relativamente alla condizione critica:

I simboli utilizzati hanno il seguente significato:

- α è l'inclinazione della superficie critica di rottura;
- β è l'inclinazione del paramento interno del muro rispetto alla verticale;
- i è l'inclinazione dell'estradosso del terrapieno;
- H è l'altezza del muro;
- δ è l'angolo di attrito terra-muro;
- W_S è il peso del cuneo di terreno coinvolto nel meccanismo di collasso;
- $W_S \cdot k_h$ rappresenta la forza d'inerzia indotta dalla componente orizzontale della accelerazione sismica;
- $W_S \cdot k_v$ rappresenta la forza d'inerzia indotta dalla componente verticale della accelerazione sismica;
- S_{ae} è la spinta attiva valutata per il meccanismo critico;
- N è la risultante delle tensioni normali alla superficie di scorrimento;
- T è la risultante delle tensioni tangenziali lungo la superficie di scorrimento.

Dall'equilibrio delle forze risulta:

$$S_{ae} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 (1 - k_v) \cdot K_{ae} \quad (2.15)$$

in cui :

- γ è il peso dell'unità di volume del terreno;

- K_{ae} è il coefficiente di spinta attiva del terreno che tiene conto sia delle azioni statiche che di quelle sismiche:

$$K_{ae} = \frac{\cos^2(\phi' - \theta - \beta)}{\cos \theta \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos(\delta + \theta + \beta) \cdot \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi' + \delta) \cdot \sin(\phi' - \theta - i)}{\cos(\delta + \beta + \theta) \cdot \cos(i - \beta)}} \right]^2} \quad (2.16)$$

in cui:

$$\theta = \arctan\left(\frac{K_h}{1 - K_v}\right) \quad (2.17)$$

La spinta S_{ae} è inclinata di un angolo pari a $\delta + \beta$ rispetto all'orizzontale.

L'inclinazione della superficie di rottura critica, rispetto all'orizzontale passante per il tacco del muro, è data dalla equazione seguente (Wong 1982):

$$\alpha_{ae} = \phi' - \theta + \arctan\left(\frac{\sqrt{P \cdot (P + Q) \cdot (1 + Q \cdot R)} - P}{1 + R \cdot (P + Q)}\right) \quad (2.18)$$

in cui :

$$\begin{cases} P = \tan(\phi' - \theta - i) \\ Q = \cot(\phi' - \theta - \beta) \\ R = \tan(\delta + \theta + \beta) \end{cases} \quad (2.19)$$

oppure si può utilizzare la seguente equazione:

$$\alpha_{ae} = \phi' - \theta + \arctan\left[\frac{\tan(\phi' - \theta - i) + C_{1e}}{C_{2e}}\right] \quad (2.20)$$

dove:

$$C_{1e} = \sqrt{\tan(\phi' - \theta - i) \cdot [\tan(\phi' - \theta - i) + \cot(\phi' - \theta - \beta)] \cdot [1 + \tan(\delta + \theta + \beta) \cdot \cot(\phi' - \theta - \beta)]} \quad (2.21)$$

$$C_{2e} = 1 + \tan(\delta + \theta + \beta) \cdot [\tan(\phi' - \theta - i) + \cot(\phi' - \theta - \beta)] \quad (2.22)$$

Nel caso di terrapieno con estradosso orizzontale ($i=0$) l'inclinazione della superficie di rottura critica può essere determinata mediante l'uso della seguente relazione (Standard for Aseismic Civil Engineering Construction in Japan, , 1980):

$$\cot \alpha_{ae} = -\tan(\phi' + \delta + \beta) + \sec(\phi' + \delta + \beta) \cdot \left[\frac{\sqrt{\cos(\beta + \delta + \phi') \cdot \sin(\phi' + \delta)}}{\cos \beta \cdot \sin(\phi' + \delta)} \right] \quad (2.23)$$

Il procedimento di Mononobe - Okabe, applicato al caso duale di spostamento del muro verso il terrapieno fornisce le seguenti espressioni per il calcolo della spinta passiva S_{pe} in condizioni sismiche:

$$S_{pe} = \frac{1}{2} \gamma \cdot H^2 (1 - k_v) \cdot K_{pe} \quad (2.24)$$

$$K_{pe} = \frac{\cos^2(\phi' - \theta + \beta)}{\cos \theta \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos(\delta + \theta - \beta) \cdot \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi' + \delta) \cdot \sin(\phi' - \theta + i)}{\cos(\delta - \beta + \theta) \cdot \cos(i - \beta)}} \right]^2} \quad (2.25)$$

L'inclinazione della superficie di rottura critica, rispetto all'orizzontale passante per il tacco del muro, è data dalla seguente equazione:

$$\alpha_{pe} = \theta - \phi' + \arctan \left[\frac{\tan(\phi' + \theta + i) + C_{3e}}{C_{4e}} \right] \quad (2.26)$$

dove:

$$C_{3e} = \sqrt{\tan(\phi' - \theta + i) \cdot [\tan(\phi' - \theta + i) + \cot(\phi' - \theta + \beta)] \cdot [1 + \tan(\delta + \theta - \beta) \cdot \cot(\phi' - \theta + \beta)]} \quad (2.27)$$

$$C_{4e} = 1 + \tan(\delta + \theta - \beta) \cdot [\tan(\phi' - \theta + i) + \cot(\phi' - \theta + \beta)] \quad (2.28)$$

Nel caso di superficie di estradosso perfettamente orizzontale ($i=0$) l'inclinazione della superficie di scorrimento critica di rottura in condizioni di spinta passiva può essere determinata mediante la equazione seguente (Standard for Aseismic Civil Engineering Construction in Japan, , 1980) :

$$\cot \alpha_{pe} = \tan(\phi' - \delta - \beta) + \sec(\phi' - \delta - \beta) \cdot \left[\frac{\sqrt{\cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \sin(\phi' - \delta)}}{\cos \beta \cdot \sin(\phi' - \theta)} \right] \quad (2.29)$$

Le formule per il calcolo dei coefficienti di spinta (sia attiva che passiva) in campo sismico cadono in difetto per particolari combinazioni dei valori degli angoli di cui le stesse sono funzione (analogamente a quanto accade alle formule di Coulomb in condizioni statiche). Esse sono sempre valide a patto che:

per il caso di spinta attiva risulti;

$$\theta \leq (\phi' - i) \quad \theta \leq [90^\circ - (\beta + \delta)] \quad (2.30)$$

per il caso di spinta passiva;

$$\theta \leq (\phi' + i) \quad \theta \leq [90^\circ - (\delta - \beta)] \quad (2.31)$$

2.4 La soluzione di Motta (1993)

Partendo dalla disamina dei limiti di applicabilità del metodo di Mononobe – Okabe, derivanti dalle condizioni geometriche, di carico, al contorno e da considerazioni di ordine fisico – matematico sulla validità della espressione del coefficiente di spinta K_{ae} , Motta (1993) ha formulato una estensione del metodo di Coulomb fornendo semplici espressioni per il calcolo del coefficiente di spinta attiva nel caso in cui il terrapieno sia un pendio di altezza finita, (Figura 2.4) eventualmente soggetto all'azione di un sovraccarico. È questo il caso di muri di sottoscampa a contenimento di rilevati stradali in una sezione a mezza costa.

Con riferimento allo schema mostrato in Figura 2.4 la spinta attiva è fornita dalla relazione:

$$S_{AE} = \frac{1}{2} \gamma \cdot H^2 \cdot K_{AE,\gamma}(\alpha) + q \cdot H \cdot K_{AE,q}(\alpha) - c \cdot H \cdot K_{AE,c}(\alpha) \quad (2.32)$$

in cui:

$$K_{AE,\gamma}(\alpha) = \left[(\cot \alpha + \tan \beta) \cdot (1 + 2t) + t^2 (\cot \alpha - \cot i) \right] \cdot \frac{\sin(\alpha + \theta - \phi)}{\cos \theta \cdot \cos(\alpha - \phi - \delta - \beta)} \quad (2.33)$$

$$K_{AE,q}(\alpha) = \left[\cot \alpha (1 + t) + \tan \beta - t \cdot \cot i \right] \cdot \frac{\sin(\alpha + \theta - \phi)}{\cos \theta \cdot \cos(\alpha - \phi - \delta - \beta)} \quad (2.34)$$

$$K_{AE,c}(\alpha) = (1 + t) \cdot \frac{\cos \phi}{\sin \alpha \cdot \cos(\alpha - \phi - \delta - \beta)} \quad (2.35)$$

con:

$$t = \frac{h}{H} \quad (2.36)$$

Poiché la derivazione della funzione $S_{ae}(\alpha)$ per un terreno dotato di coesione e attrito risulta essere piuttosto complessa, Motta ha determinato una soluzione in forma chiusa per un terreno incoerente che consenta di tener conto oltre che del contributo del peso proprio anche della presenza di un eventuale sovraccarico, ed una soluzione per valutare il contributo minimo della coesione supponendo $\gamma=q=0$.

Le espressioni ottenute relativamente al caso $c'=0$ sono le seguenti:

$$S_{AE}(\alpha) = \frac{1}{2} \gamma \cdot H^2 \cdot K_{AE,\gamma q}(\alpha) \quad (2.37)$$

con:

$$K_{AE,q}(\alpha) = \frac{(1+t) \cdot (1+t+n_q) \cdot (1-A \cdot \tan \alpha) \cdot \left[\cos(\phi - \theta) - \frac{\sin(\phi - \theta)}{\tan \alpha} \right]}{\cos \theta \cdot [\cos(\phi + \delta + \beta) + \tan \alpha \cdot \sin(\phi + \delta + \beta)]} \quad (2.38)$$

In questo caso l'angolo di inclinazione delle superficie critica è dato da:

$$\tan \alpha = \frac{\sin(\phi + \delta + \beta) \cdot \sin(\phi - \delta) + \sqrt{E}}{A \cdot \cos(\theta + \beta + \phi) + \cos(\phi - \theta) \cdot \sin(\phi + \beta + \delta)} \quad (2.39)$$

in cui:

$$n_q = \frac{2 \cdot q}{\gamma \cdot H} \quad (2.40)$$

$$A = \frac{t \cdot \cot i \cdot (t + n_q) - \tan \beta \cdot (1 + 2 \cdot t + n_q)}{(1+t) \cdot (1+t+n_q)} \quad (2.41)$$

$$E = \sin(\phi + \delta + \beta) \cdot \sin^2(\phi - \theta) + \frac{\sin[2(\phi - \theta)] \cdot \sin[2(\phi + \delta + \beta)]}{4} + A \cdot \cos(\theta + \delta + \beta) \cdot \sin(\phi - \theta) \cdot \cos(\phi + \delta + \beta) \quad (2.42)$$

La soluzione ottenuta è ammissibile se risulta verificata la condizione $\alpha < \alpha_1$ (Fig. 2.4). In caso contrario la soluzione va ricercata con il metodo di Mononobe - Okabe.

Il contributo minimo dovuto alla coesione è, invece, dato da:

$$S_{AE,c} = 2c \cdot H \cdot (1+t) \cdot \frac{\cos \phi'}{1 + \sin(\phi + \delta + \beta)} \quad (2.43)$$

e si ottiene in corrispondenza dell'angolo

$$\alpha = 45^\circ + \frac{\phi + \delta + \beta}{2} \quad (2.44)$$

2.5 La soluzione di Motta (1994)

Motta (1994) ha formulato una estensione del metodo di Coulomb fornendo semplici espressioni per il calcolo del coefficiente di spinta attiva nel caso in cui sul terrapieno privo di coesione ad estradosso piano agisca un sovraccarico uniformemente distribuito posto ad una certa distanza dalla testa del muro.

Con riferimento allo schema mostrato in Figura 2.5 la spinta attiva è:

$$S_{AE} = \frac{1}{2} \gamma \cdot H^2 \cdot (1 - k_V) \cdot K_{AE, \gamma q} \quad (2.45)$$

in cui il coefficiente di spinta è fornito dalla seguente espressione:

$$K_{AE, \gamma q}(\alpha) = \frac{(1 + n_q) \cdot \cos^2 i \cdot [1 - A \tan(\alpha - i)] \cdot \left[\cos \eta_2 - \frac{\sin \eta_2}{\tan(\alpha - i)} \right]}{\cos \theta \cdot [\cos \eta_1 + \tan(\alpha - i) \cdot \sin \eta_3]} \quad (2.46)$$

Mentre l'angolo α che individua la superficie critica risulta:

$$\tan(\alpha - i) = \frac{E + \sqrt{E^2 + \sin \eta_1 \cdot \cos \eta_1 \cdot \sin \eta_2 \cdot \cos \eta_2 + A \cdot \cos \eta_1 \cdot \sin \eta_2 \cdot \cos \eta_3}}{A \cdot \cos \eta_3 + \sin \eta_1 \cdot \cos \eta_2} \quad (2.47)$$

Nelle equazioni precedenti si è posto:

$$\lambda = \frac{d}{H} \quad (2.48)$$

$$\eta_1 = (\phi + \delta - i) \quad (2.49)$$

$$\eta_2 = (\phi - \delta - i) \quad (2.50)$$

$$\eta_3 = (\phi + \delta) \quad (2.51)$$

$$A = \frac{(1 + n_q) \cdot \sin i \cdot \cos i + \lambda \cdot n_q}{(1 + n_q) \cdot \cos^2 i} \quad (2.52)$$

$$E = \sin \eta_1 \cdot \sin \eta_2 \quad (2.53)$$

$$n_q = \frac{2q}{\gamma \cdot H} \quad (2.54)$$

Anche in questo caso perché la soluzione sia ammissibile è necessario verificare che sia soddisfatta la condizione $\alpha < \alpha_1$.

2.6 Le soluzioni di Caltabiano et al. (2000, 2003, 2005)

Caltabiano et al. (2003, 2005) hanno proposto alcune soluzioni del problema dell'equilibrio limite dei muri di sostegno. Le soluzioni permettono la determinazione dell'angolo formato dalla superficie di scorrimento, assunta piana, rispetto all'orizzontale e del coefficiente di spinta attiva; inoltre gli autori propongono anche una soluzione per la valutazione del

coefficiente di accelerazione critica del sistema muro-terreno, separando i contributi relativi al terreno da quelli del sovraccarico e del sisma. Il coefficiente di spinta attiva è determinato per il semplice caso di muro con paramento interno verticale e liscio ($\beta=0$), di terrapieno orizzontale ($i=0$) e di accelerazione verticale nulla ($k_v=0$). Il sistema muro-terreno preso in esame dagli autori per lo schema di muro non soggetto a sovraccarichi (Caltabiano et al, 2000, 2005) è mostrato in Figura 2.6 ove i simboli hanno il consueto significato.

Nelle condizioni di incipiente rottura l'equazione di equilibrio pseudo-statico assume la seguente forma:

$$W_w \cdot (\mu - k_h) = W_s \cdot [k_h + \tan(\alpha - \phi)] \quad (2.55)$$

dove $\mu = \tan \phi_b$ rappresenta il coefficiente di attrito alla base del muro, k_h il coefficiente di accelerazione sismica critica e W_s il peso del cuneo di rottura del terreno fornito dall'espressione:

$$W_s = \frac{1}{2} \gamma \cdot H^2 \cdot \cot \alpha \quad (2.56)$$

Combinando opportunamente le equazioni (2.55) e (2.56) è possibile ottenere la seguente forma per il coefficiente di spinta attiva in condizioni sismiche:

$$K_{AE} = \cot \alpha \cdot [k_h + \tan(\alpha - \phi)] \quad (2.57)$$

Gli autori propongono anche soluzioni analitiche del problema dell'equilibrio limite di muri di sostegno con sovraccarico indefinitamente esteso, applicato ad una fissata distanza dal muro. Infatti, la presenza di sovraccarichi distribuiti sulla superficie del terrapieno a tergo di muri di sostegno rappresenta una condizione di carico frequente nelle applicazioni: i sovraccarichi, infatti, sono generalmente dovuti a strutture che insistono sul terrapieno in prossimità delle opere di sostegno. Sebbene queste distribuiscano il proprio peso su una superficie limitata, l'estensione del sovraccarico può essere spesso considerata infinita rispetto all'altezza del muro.

Il sistema muro-terreno considerato nel caso di presenza di sovraccarico sul terrapieno (Caltabiano et al. 2003) è mostrato in Figura 2.7 ove i simboli hanno il consueto significato.

Nelle condizioni di incipiente rottura l'equazione di equilibrio pseudo-statico assume la forma seguente:

$$W_w (\mu - k_h) = W_{\text{tot}} [k_h + \tan(\alpha - \phi)] \quad (2.58)$$

dove $\mu = \tan \phi_b$ è il coefficiente d'attrito alla base del muro, k_h è il coefficiente di accelerazione sismica critica e W_{tot} , fornito dalla relazione:

$$W_{\text{tot}} = \frac{\gamma H^2}{2 \tan \alpha} \left[1 + \frac{2q}{\gamma H} (1 - \lambda \tan \alpha) \right] \quad (2.59)$$

rappresenta il peso del cuneo di rottura del terreno e della porzione di sovraccarico che grava su di esso e dipende dalla distanza adimensionalizzata $\lambda = d/H$ del sovraccarico dalla testa del muro. Sostituendo l'equazione (2.59) nella (2.58) ed utilizzando le posizioni:

$$Y = \tan \alpha \quad \Phi = \tan \alpha \quad \Gamma = \frac{2 \cdot W_w}{\gamma \cdot H^2} \quad Q = \frac{2q}{\gamma H} \quad (2.60)$$

l'equazione di equilibrio può essere messa nella forma adimensionale di secondo grado:

$$\begin{aligned} & [\Gamma (\mu - k_h) \Phi + (k_h \Phi + 1) Q \lambda] Y^2 + \\ & + [\Gamma (\mu - k_h) + \Gamma (k_h - \Phi) Q \lambda - (k_h \Phi + 1)(1 + Q)] Y - (k_h - \Phi)(1 + Q) = 0 \end{aligned} \quad (2.61)$$

Le soluzioni in k_h e α possono essere disaccoppiate annullando il discriminante dell'equazione (2.61) e risolvendo l'equazione di secondo grado nell'incognita k_h , che ammette una sola radice positiva:

$$\begin{aligned} k_h = & \frac{-(1+Q)^2 \Phi - [Q \lambda (1 - \Phi^2) + \Gamma (1 + \mu \Phi + 2 \Phi^2)](1+Q) + (\Gamma - Q \lambda)(\Gamma \mu - Q \lambda \Phi)}{[(1+Q) \Phi + Q \lambda - \Gamma]^2} + \\ & + \frac{2 \sqrt{\Gamma (1+Q)(1 + \Phi^2)[(1+Q) \Phi + Q \lambda][(\Gamma - Q \lambda)(\Phi - \mu) + (1+Q)(1 + \mu \Phi)]}}{[(1+Q) \Phi + Q \lambda - \Gamma]^2} \end{aligned} \quad (2.62)$$

Ricercando il minimo dell'equazione (2.61) e risolvendo rispetto a $Y = \tan \alpha$ si ottiene l'inclinazione della superficie di scorrimento:

$$\begin{aligned} \tan \alpha = & \frac{(1+Q)[Q \lambda (1 + \Phi^2) + \Gamma \Phi (\mu - \Phi)]}{Q \lambda (1 + \Phi^2)(Q \lambda - \Gamma) - \Gamma \Phi (1+Q)(\mu \Phi + 1)} + \\ & - \frac{\sqrt{\Gamma (1+Q)(1 + \Phi^2)[\Phi (1+Q) + Q \lambda][(\Gamma - Q \lambda)(\Phi - \mu) + (1+Q)(1 + \mu \Phi)]}}{Q \lambda (1 + \Phi^2)(Q \lambda - \Gamma) - \Gamma \Phi (1+Q)(\mu \Phi + 1)} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Per un fissato sistema muro-terreno, stabile in condizioni statiche, le equazioni (2.62) e (2.63) definiscono completamente il meccanismo di rottura in condizioni sismiche.

Imponendo $Q = 0$ nelle equazioni (2.61, 2.62 e 2.63) si ottiene l'equazione di equilibrio per il caso di sistemi senza sovraccarico e i corrispondenti valori del coefficiente sismico critico k_{h0} e l'angolo α_0 formato dalla superficie di scorrimento con l'orizzontale.

Nella ricerca della soluzione è necessario tener conto della possibilità che il collasso del sistema non sia influenzato dalla presenza sovraccarico. Infatti, se il carico è

sufficientemente lontano dal muro ($\lambda > \cot\alpha_0$) sono teoricamente possibili due distinti meccanismi di rottura: in questo caso, l'effettivo meccanismo di rottura è quello associato al minimo coefficiente sismico critico.

In altri termini, per un fissato Q , allontanando il sovraccarico dal muro si modifica il meccanismo di rottura, l'angolo α diminuisce e l'accelerazione richiesta al collasso cresce. Congruentemente varia anche il coefficiente di spinta che può essere valutato combinando opportunamente le equazioni (2.58) e (2.59):

$$K_{AE}^q = \frac{[1 + Q(1 - \lambda \tan\alpha)]}{\tan\alpha} \cdot [k_h + \tan(\alpha - \phi)] \quad (2.64)$$

Finchè il sovraccarico è applicato a distanze $\lambda < \cot\alpha_0$, il meccanismo di rottura è governato dal sovraccarico; per distanze $\lambda > \cot\alpha_0$ la soluzione è influenzata dal sovraccarico fino ad una distanza limite, oltre la quale il sistema può essere studiato come in assenza di sovraccarico. Questo valore limite di λ si ottiene eguagliando le espressioni di k_h e k_{h0} .

I risultati ottenuti permettono di descrivere le condizioni di equilibrio limite di sistemi muro-terreno con sovraccarico mediante relazioni in forma chiusa, superando i limiti dei metodi di analisi tradizionali.

2.7 Le soluzioni di Greco (2001, 2005)

Greco (2001) ha proposto alcuni studi relativi alla spinta sui muri a mensola in condizione sismica, che generalmente viene valutata con il metodo di Rankine (1857) utilizzando l'approccio pseudo – statico. L'applicabilità di tale metodo tuttavia è limitata a condizioni geometriche e di carico molto semplici che vedono:

- un profilo topografico planare;
- l'assenza di linee e strisce di carico sul terrapieno.

Il tacco del muro, inoltre, deve essere sufficientemente lungo perché il cuneo di rottura non intercetti il muro e non ne venga interrotto.

Partendo da queste limitazioni, l'autore presenta un approccio razionale che consente l'uso del metodo di Coulomb (1773), basato sul metodo dell'equilibrio limite, per il calcolo della spinta attiva in condizioni sismiche sui muri a mensola con il metodo pseudo – statico sotto condizioni generali per quanto attiene la conformazione geometrica del profilo topografico del terrapieno e dei carichi agenti su di esso.

Facendo riferimento alla Figura (2.8), i muri a mensola, sono generalmente studiati facendo riferimento alla teoria di Rankine, in cui il masso risulta plasticizzato secondo due famiglie di superfici di rottura, inclinate rispettivamente degli angoli:

$$\begin{aligned}\chi &= \frac{\pi}{2} + \frac{\phi'}{2} - \frac{\Delta - \varepsilon + \theta}{2} \\ \rho &= \frac{3}{4}\pi - \frac{\phi'}{2} - \frac{\Delta - \varepsilon + \theta}{2}\end{aligned}\quad (2.65)$$

dove:

$$\Delta = \arcsin\left[\frac{\sin(\varepsilon + \theta)}{\sin \phi'}\right] \quad (2.66)$$

Similmente al metodo di Coulomb, il metodo può includere forze sismiche di tipo pseudo statico, dando luogo ad una spinta attiva il cui coefficiente K_{ae}^R relativo alla superficie di rottura M – C, (Fig. 2.8), è definito dalla seguente espressione:

$$K_{ae}^R = \frac{\cos \phi'}{\cos(\varepsilon + \theta) + \sqrt{\cos^2(\varepsilon + \theta) - \cos^2 \phi'}} \cdot \frac{\sin(\rho - \varepsilon)}{\sin^2 \rho} \quad (2.67)$$

L'autore dimostra che attribuendo all'angolo β , nell'espressione di K_{ae}^C di Coulomb (2.68), il valore di ρ (2.65) e assumendo per δ il valore di ϕ' i valori dei coefficienti sono identici, quindi è possibile utilizzare anche per lo studio dei muri a mensola il metodo di Coulomb che consente di generalizzare le soluzioni per differenti condizioni di carico e al contorno.

$$K_{ae}^C = \left(\frac{\frac{\sin(\beta + \theta - \phi')}{\sin \beta}}{\sqrt{\sin(\beta + \theta + \delta)} + \sqrt{\frac{\sin(\phi' + \delta) \cdot \sin(\phi' - \varepsilon - \theta)}{\sin(\beta - \varepsilon)}}} \right)^2 \quad (2.68)$$

I coefficienti di spinta qui definiti, coincidendo sul piano di rottura M – C, devono necessariamente coincidere su ogni altro piano B – C genericamente inclinato di β e la spinta può essere calcolata anche con il metodo di Coulomb, a patto di attribuire un opportuno valore all'angolo δ nella (2.68), in particolare tale valore può essere determinato proprio dalle condizioni di equilibrio delle forze agenti sul cuneo MCB (Fig. 2.8).

Se ipotizziamo che la generica inclinazione del piano C – B sia quella verticale passante per il tacco del muro C – E, le condizioni di equilibrio delle forze agenti sul cuneo MCE sono espresse dalle relazioni:

$$\begin{aligned}S_{aeh} &= P_{ae} \cdot \sin(\beta + \phi') + k_h W_1 \\ S_{aev} &= -P_{ae} \cdot \cos(\beta + \phi') - (1 + k_v) \cdot W_1\end{aligned}\quad (2.69)$$

dove S_{aeh} e S_{aev} sono rispettivamente la componente orizzontale e quella verticale della spinta attiva sismica, S_{ae} , agente sul piano C – E, mentre W_1 è il peso del cuneo MCE. Derivando rispettivamente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_{aeh}}{\partial \beta} &= 0 \\ \frac{\partial S_{aev}}{\partial \beta} &= 0\end{aligned}\tag{2.70}$$

Si ottiene il valore dell'angolo ρ , che risulta coincidente con il valore dell'angolo ρ di Rankine.

$$\beta = \frac{3}{4}\pi - \frac{\phi'}{2} - \frac{\Delta - \varepsilon + \theta}{2} = \rho\tag{2.71}$$

Quindi le funzioni esplicitate dalle equazioni 2.68 assumono i loro valori estremi per lo stesso valore dell'angolo β e che tale valore coincide con quello dell'angolo ρ di Rankine. L'autore inoltre dimostra che per tale valore dell'angolo β il coefficiente di sicurezza allo scorrimento lungo la base, F_s , assume il suo valore minimo.

Passando adesso ad analizzare il caso generale illustrato in Figura 2.9, siano V e H rispettivamente le componenti verticale e orizzontale delle forze di massa agenti sul cuneo ABC e delle forze di superficie agenti sul tratto AEB. La spinta P_{ae} agente sul piano BC viene ricavata dalle condizioni di equilibrio delle forze agenti sul cuneo ACB:

$$P_{ae}(\alpha, \beta) = \frac{V \cdot \sin(\alpha - \phi') + H \cdot \cos(\alpha - \phi')}{\sin(\beta + 2\phi' - \alpha)}\tag{2.72}$$

dove α è l'inclinazione del piano AC che delimita il cuneo di spinta.

Le condizioni di equilibrio delle forze agenti sul cuneo BCE sono espresse dalle relazione:

$$\begin{aligned}S_{aeh} &= P_{ae} \cdot \sin(\beta + \phi') - H' \\ S_{aev} &= -P_{ae} \cdot \cos(\beta + \phi') - V'\end{aligned}\tag{2.73}$$

Dove V' e H' sono le componenti verticale e orizzontali della somma delle forze di massa agenti sul cuneo BCE e delle forze di superficie agenti su BE. Le funzioni, quindi, dipendono dagli angoli β e α . L'autore dimostra che per un assegnato valore di $\alpha = \alpha_c$, la condizione critica per la stabilità dell'opera viene raggiunta per un valore $\beta = \beta_c$, che contemporaneamente massimizza la S_{aeh} e minimizza la S_{aev} .

In definitiva, quindi, l'autore propone dei metodi per il calcolo della spinta in condizioni sismiche per i muri a mensola che non possono essere trattati con il classico metodo di Rankine, che rappresenta la condizione critica per la stabilità dell'opera nei confronti del

meccanismo di collasso costituito dallo scorrimento lungo il piano di posa, similmente al metodo originario di Coulomb.

Lo stesso autore (Greco 2005) propone una soluzione per la determinazione della spinta sui muri a gravità, relativa al caso di terrapieno con profilo comunque inclinato ($\varepsilon \neq 0$) e sul quale agisce un carico lineare verticale.

Facendo riferimento allo schema di Figura 2.10, in accordo con l'approccio di Coulomb (1773), il cuneo ABC risulta soggetto alle seguenti forze:

- R: risultante delle forze normali e tangenziali alla superficie di rottura AC;
- P(a): spinta attiva agente sulla superficie di interfaccia muro – terreno;
- W: peso del cuneo di rottura;
- F: forza verticale agente sull'estradosso del terrapieno posta ad una distanza d dalla testa del muro;

L'espressione della spinta è ottenuta dall'equilibrio delle forze che agiscono sul cuneo ABC:

$$P_a(\alpha) = \begin{cases} [A \cdot f(\alpha) + F] \cdot g(\alpha) & \alpha \leq \chi \\ A \cdot f(\alpha) \cdot g(\alpha) & \alpha > \chi \end{cases} \quad (2.74)$$

in cui:

$$A = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \frac{\sin(\beta - \varepsilon)}{\sin^2 \beta} \quad (2.75)$$

$$f(\alpha) = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\alpha - \varepsilon)} \quad g(\alpha) = \frac{\sin(\alpha - \phi')}{\sin(\beta + \phi' + \delta - \alpha)} \quad (2.76)$$

$$\chi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{H \cdot \cot \beta + d}{H + d \cdot \tan \varepsilon}\right) \quad (2.77)$$

nelle espressioni precedenti H è l'altezza del muro e γ è il peso dell'unità di volume del terreno sostenuto dall'opera.

Il prodotto delle funzioni $f(\alpha)$ e $g(\alpha)$ è funzione di α ed il massimo di questa funzione si ottiene per un valore di $\alpha = \alpha_0$ che è fornito dalla la seguente relazione:

$$\alpha_0 = \phi' + \arctan\left[\frac{\sqrt{L \cdot (L + M) \cdot (1 + M \cdot MN)} - L}{1 + (L + M) \cdot N}\right] \quad (2.78)$$

con:

$$\begin{aligned}
 L &= \tan(\phi' - \varepsilon) \\
 M &= \tan(\beta - \phi') \\
 N &= -\cot(\beta + \delta)
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

Il massimo della funzione $[A \cdot f(\alpha) + F] \cdot g(\alpha)$ si ottiene per un valore di α pari a:

$$\alpha_c = \phi' + \arctan \left[\frac{C_2 \cdot D_3 + C_3}{C_2 \cdot D_1 - C_1 \cdot (D_2 + D_3)} \right] \tag{2.80}$$

con:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= A \cdot \sin(\beta - \phi') - F \cdot \sin(\varepsilon - \phi') \\
 C_2 &= A \cdot \cos(\beta - \phi') - F \cdot \cos(\varepsilon - \phi') \\
 C_3 &= \sqrt{(C_1^2 + C_2^2) \cdot D_3^2 - C_1 \cdot D_3 \cdot (C_2 \cdot D_1 - C_1 \cdot D_2)} \\
 D_1 &= \sin(\beta + \delta + \varepsilon - \phi') \\
 D_2 &= \cos(\beta + \delta + \varepsilon - \phi') \\
 D_3 &= \sin(\beta + \delta) \cdot \sin(\varepsilon - \phi')
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Se il valore di C_3 è negativo o se il valore fornito dalla 280 è superiore al valore di β , allora la funzione $[A \cdot f(\alpha) + F] \cdot g(\alpha)$ avrà il suo massimo per $\alpha = \beta$ e quindi risulta $\alpha_c = \beta$.

Nello studio si definisce il valore α_m come il valore di α che si ottiene dalla seguente relazione:

$$[A \cdot f(\alpha_m) + F] \cdot g(\alpha_m) = A \cdot f(\alpha_0) \cdot g(\alpha_0) \tag{2.82}$$

Utilizzando le equazioni (2.75), (2.76), (2.78) e (2.79) si ottiene:

$$\alpha_m = \phi' + \arctan \left(\frac{M_1 + \sqrt{M_1^2 - 4 \cdot M_0 \cdot M_2}}{2 \cdot M_2} \right) \tag{2.83}$$

dove:

$$\begin{aligned}
 M_0 &= A \cdot f(\alpha_0) \cdot g(\alpha_0) \cdot \sin(\beta + \delta) \cdot \sin(\varepsilon - \phi') \\
 M_1 &= A \cdot f(\alpha_0) \cdot g(\alpha_0) \cdot \sin(\beta + \delta + \varepsilon - \phi') - A \cdot \sin(\beta - \phi') + F \cdot \sin(\varepsilon - \phi') \\
 M_2 &= A \cdot f(\alpha_0) \cdot g(\alpha_0) \cdot \cos(\beta + \delta) \cdot \cos(\varepsilon - \phi') - A \cdot \cos(\beta - \phi') + F \cdot \cos(\varepsilon - \phi')
 \end{aligned} \tag{2.84}$$

Il massimo valore della spinta si ottiene massimizzando la 2.74 rispetto ad α :

$$S_a = \max_{\alpha} \{P_a(\alpha)\} = P_a(\alpha_{cr}) \tag{2.85}$$

Il valore di S_a dipende quindi dalla posizione della forza F e dal relativo angolo χ che essa determina rispetto agli angoli α_m e α_c .

Con riferimento alla Figura 2.11 gli angoli α_0 , α_m e α_c intercettano sul profilo di estradosso del terrapieno rispettivamente i punti A_0 , A_m e A_c le cui ascisse sono rispettivamente:

$$\begin{aligned} x_0 &= H \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha_0) \cdot \cos \varepsilon}{\sin(\alpha_0 - \varepsilon) \cdot \sin \beta} \\ x_m &= H \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha_m) \cdot \cos \varepsilon}{\sin(\alpha_m - \varepsilon) \cdot \sin \beta} \\ x_c &= H \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha_c) \cdot \cos \varepsilon}{\sin(\alpha_c - \varepsilon) \cdot \sin \beta} \end{aligned} \quad (2.86)$$

In particolare se:

$$\chi \leq \alpha_m \rightarrow d \geq x_m:$$

risulta:

$$\begin{aligned} \alpha_{crit} &= \alpha_0 \\ S_a &= \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha_0) \cdot \sin(\beta - \varepsilon)}{\sin^2 \beta \cdot \sin(\alpha_0 - \varepsilon)} \cdot \frac{\sin(\alpha_0 - \phi')}{\sin(\beta + \phi' + \delta - \alpha_0)} \end{aligned} \quad (2.87)$$

se:

$$\alpha_m < \chi < \alpha_0 \rightarrow x_c < d < x_m$$

risulta:

$$\begin{aligned} \alpha_{crit} &= \chi \\ S_a &= \left[\frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot \frac{\sin(\beta - \chi) \cdot \sin(\beta - \varepsilon)}{\sin^2 \beta \cdot \sin(\chi - \varepsilon)} + F \right] \cdot \frac{\sin(\chi - \phi')}{\sin(\beta + \phi' + \delta - \chi)} \end{aligned} \quad (2.88)$$

infine, se:

$$\chi \geq \alpha_c \rightarrow d \leq x_c$$

risulta:

$$\begin{aligned} \alpha_{crit} &= \alpha_c \\ S_a &= \left[\frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot \frac{\sin(\beta - \alpha_c) \cdot \sin(\beta - \varepsilon)}{\sin^2 \beta \cdot \sin(\alpha_c - \varepsilon)} + F \right] \cdot \frac{\sin(\alpha_c - \phi')}{\sin(\beta + \phi' + \delta - \alpha_c)} \end{aligned} \quad (2.89)$$

La spinta sul muro di sostegno in condizioni sismiche è analizzata utilizzando l'approccio pseudo – statico e quindi assimilando le forze sismiche a delle forze d'inerzia.

Le soluzioni fin qui ottenute per il caso statico da Greco (2005) possono essere generalizzate al caso sismico introducendo i seguenti parametri:

$$\begin{aligned}\phi'_s &= \phi' - \theta \\ \delta_s &= \delta + \theta \\ \gamma_s &= \gamma \cdot \frac{1 + k_v}{\cos \theta} \\ F_s &= F \cdot \frac{1 + k_v}{\cos \theta}\end{aligned}\tag{2.90}$$

dove k_v e k_h sono rispettivamente i coefficienti sismici verticale ed orizzontale e:

$$\theta = \arctan\left(\frac{k_h}{1 + k_v}\right)\tag{2.91}$$

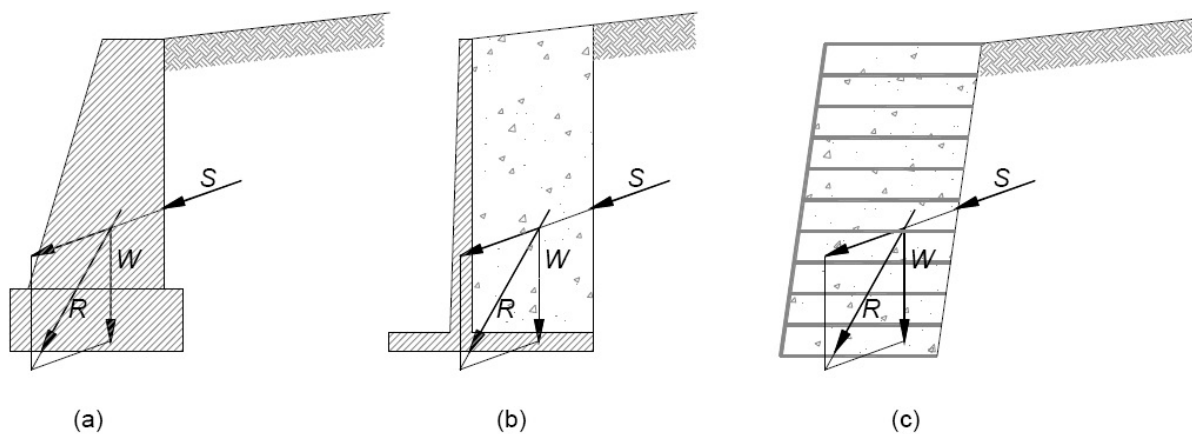


Figura 2.1– Funzionamento statico delle opere di sostegno a gravità (da Aversa e Callisto 2008).

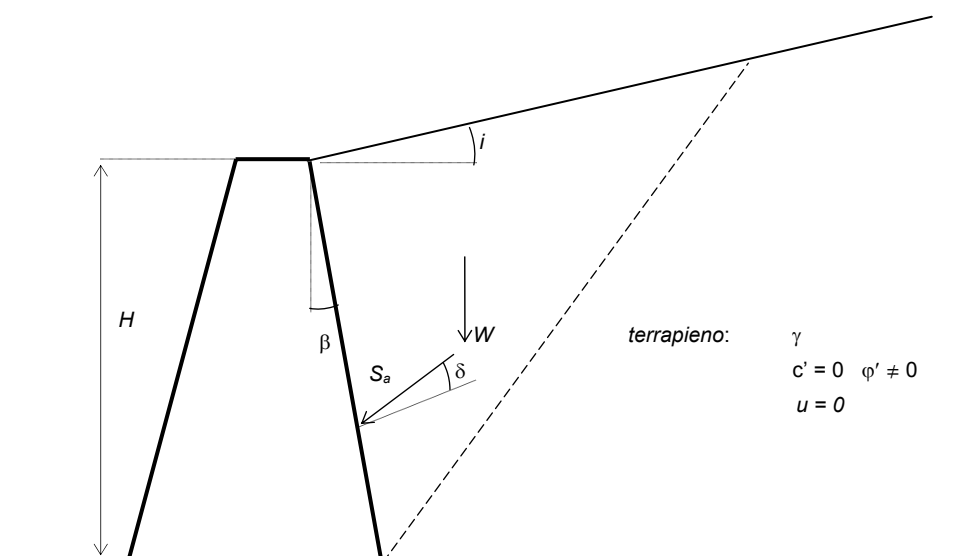


Figura 2.2– Schema di riferimento per la soluzione di Muller – Breslau (1906).

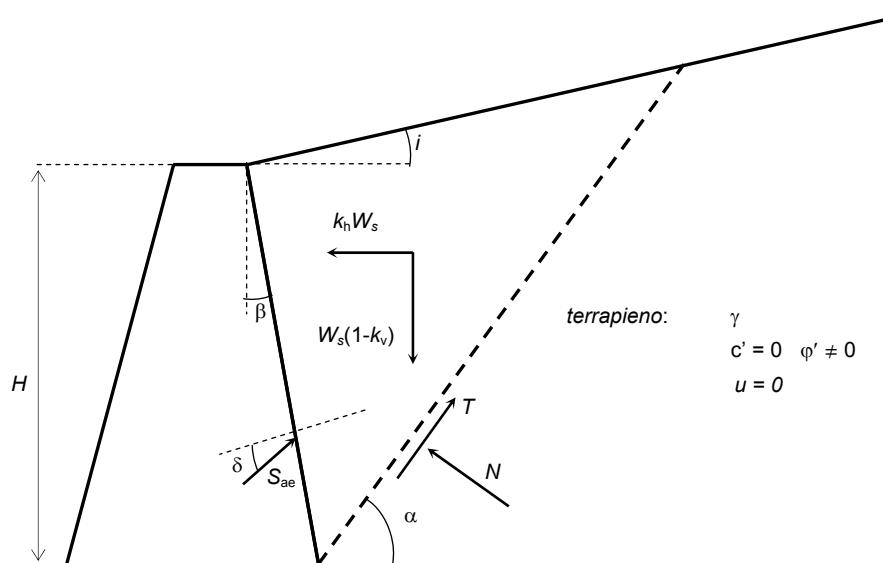


Figura 2.3– Schema di riferimento per la soluzione di Monobe & Okabe.

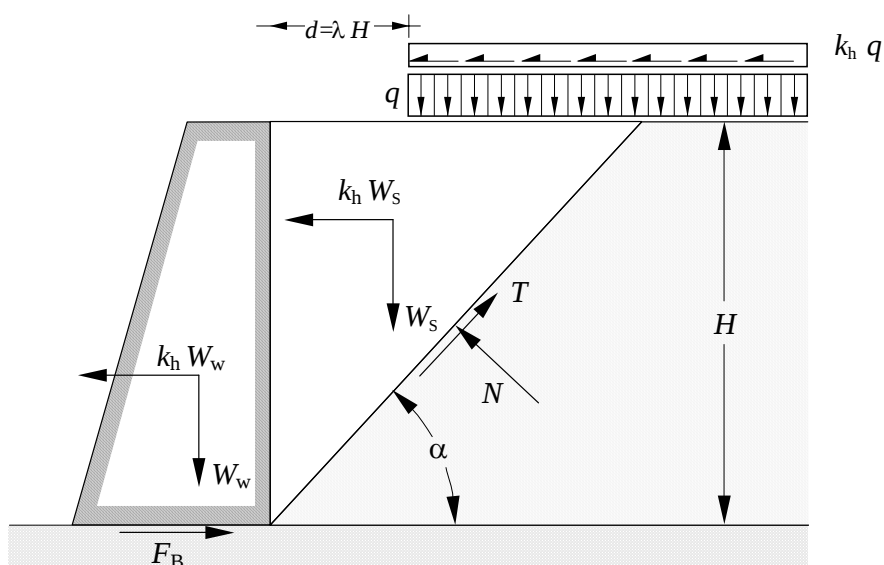


Figura 2.7– Schema di riferimento per la soluzione di Caltabiano et al. (2003).

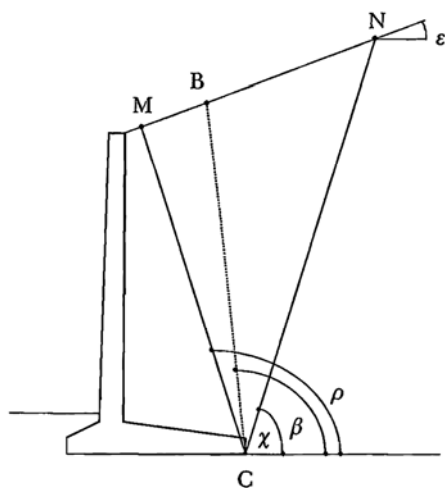


Figura 2.8– Schema di riferimento per la soluzione di Greco (2001).

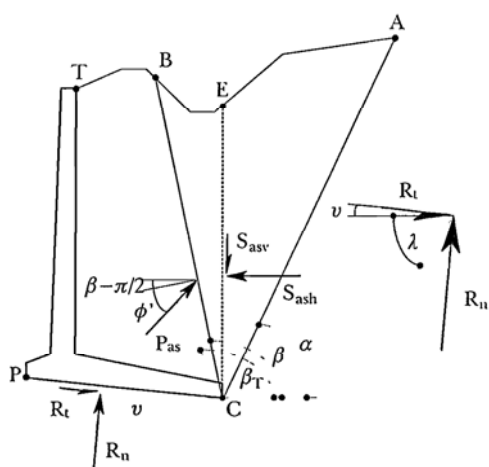


Figura 2.9– Schema di riferimento per la soluzione di Greco (2001).

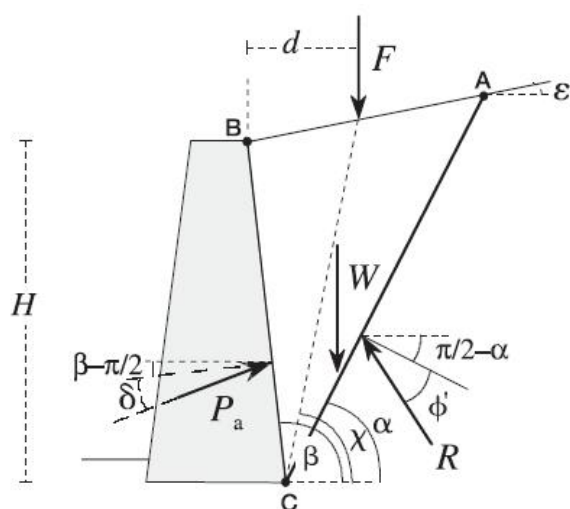


Figura 2.10– Schema di riferimento per la soluzione di Greco (2005).

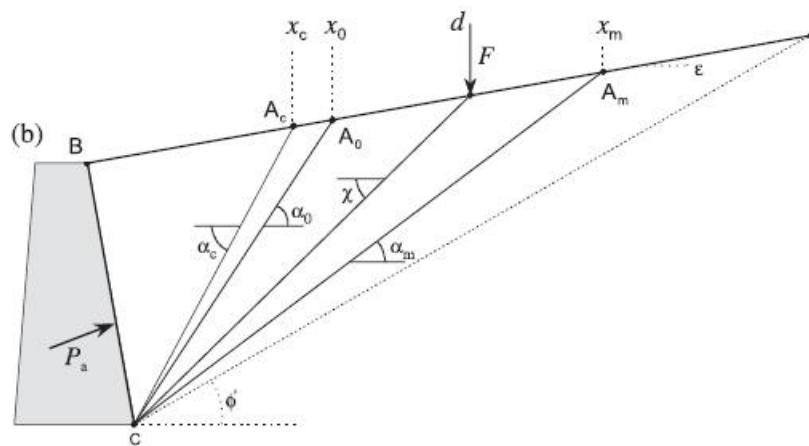


Figura 2.11– Schema di riferimento per la soluzione di Greco (2005).

CAPITOLO TERZO

ANALISI AGLI SPOSTAMENTI

3.1 Premessa

L'approccio pseudo -statico fornisce risultati fortemente condizionati dai valori dei coefficienti sismici utilizzati. Tali valori, in generale, sono di difficile determinazione ed inoltre risulta poco significativo trasformare un'azione sismica, di intensità variabile sia nel tempo che nello spazio, in una forza statica equivalente.

Una più significativa valutazione della stabilità di un'opera di sostegno soggetta a sisma può essere invece basata sulla stima degli spostamenti (scorrimenti e /o rotazioni) indotti dalle eccitazioni sismiche attese; tali spostamenti possono essere confrontati con predefiniti valori limite degli stessi che, presumibilmente, sono funzioni delle condizioni al contorno del problema in esame. Pertanto il progetto dell'opera di sostegno può essere basato sul criterio dell'ammissibilità degli spostamenti e non sulla verifica di margini di sicurezza rispetto a condizioni di equilibrio limite.

Tra l'altro le *“Nuove norme Tecniche per le Costruzioni”* di cui al D.M. 14/01/2008 introducono il concetto di “comportamento prestazionale delle opere” il che si traduce nel tenere conto della valutazione degli spostamenti sia in fase di progettazione ma soprattutto in quella di verifica.

Diverse sono le metodologie presenti in letteratura per la valutazione degli spostamenti; le differenze sostanziali tra queste si possono ricondurre alle ipotesi fatte circa la deformabilità delle strutture e sul modello reologico adottato per il tipo di terreno in esame, ipotesi più o meno sofisticate sulla base della complessità del fenomeno in esame.

In particolare nel caso in cui si possa assumere per la struttura un rigidezza sufficientemente elevata e per il terreno un modello reologico di tipo rigido-plastico, l'interazione tra opera e terreno indotta dalle forze d'inerzia sismiche può essere efficacemente studiata mediante l'uso di metodi basati sul classico modello di blocco rigido scorrevole su superficie piana, proposto da Newmark nel 1965.

Tali metodi presuppongono la definizione dell'evento sismico atteso al suolo; evento che può essere studiato mediante un'analisi dei dati rilevati dalla rete di accelerometri e sismometri presenti in zona o mediante l'uso di accelerogrammi generati.

L'uso degli accelerogrammi consente una più accurata valutazione delle caratteristiche dell'evento sismico in quanto oltre a tenere conto della accelerazione sismica di picco permette di considerare il contenuto in frequenza, la durata, l'energia, e quindi, del potenziale distruttivo del terremoto.

Sin dai primi capitoli del D.M. 14/01/2010 (N.T.C.) si fa riferimento ai concetti di “*prestazioni attese*” ed in particolare il paragrafo 2.1 del capitolo 2 di dette norme così recita:

“... omissis...”

La sicurezza e le prestazioni di un'opera o di una parte di essa devono essere valutate in relazione agli stati limite che si possono verificare durante la vita nominale. Stato limite è la condizione superata la quale l'opera non soddisfa più le esigenze per le quali è stata progettata.

In particolare, secondo quanto stabilito nei capitoli specifici, le opere e le varie tipologie strutturali devono possedere i seguenti requisiti:

- 2 - sicurezza nei confronti di stati limite ultimi (SLU): capacità di evitare crolli, perdite di equilibrio e dissesti gravi, totali o parziali, che possano compromettere l'incolumità delle persone ovvero comportare la perdita di beni, ovvero provocare gravi danni ambientali e sociali, ovvero mettere fuori servizio l'opera*
- 3 - sicurezza nei confronti di stati limite di esercizio (SLE): capacità di garantire le prestazioni previste per le condizioni di esercizio;*

... omissis...

Il superamento di uno stato limite ultimo ha carattere irreversibile e si definisce collasso.

Il superamento di uno stato limite di esercizio può avere carattere reversibile o irreversibile.

... omissis...”

Anche il capitolo 6, relativo alla progettazione geotecnica, fa riferimento alle prestazioni attese dalle opere realizzate, ed in particolare il paragrafo 6.1.2 così recita:

“Le scelte progettuali devono tener conto delle prestazioni attese delle opere, dei caratteri geologici del sito e delle condizioni ambientali.

... omissis...”

Il capitolo 7 di dette norme, fa esclusivamente riferimento alla progettazione di opere soggette ad azioni sismiche, ed in particolare il paragrafo 7.11 fa esplicitamente riferimento alla progettazione geotecnica per azioni sismiche.

Il paragrafo 7.11.6.1 così recita:

“La sicurezza delle opere di sostegno deve essere garantita prima, durante e dopo il terremoto di progetto. Sono ammissibili spostamenti permanenti indotti dal sisma che non alterino significativamente la resistenza dell’opera e che siano compatibili con la sua funzione e con quella di eventuali strutture o infrastrutture interagenti con essa...omissis...”

Quindi si fa esplicitamente riferimento agli spostamenti permanenti indotti dal sisma.

Al paragrafo 7.11.6.2.1 si fa riferimento ai metodi di analisi da adottare per le opere di sostegno:

“A meno di analisi dinamiche avanzate, l’analisi della sicurezza dei muri di sostegno in condizioni sismiche può essere eseguita mediante i metodi pseudo - statici e i metodi degli spostamenti.

L’analisi pseudo - statica si effettua mediante i metodi dell’equilibrio limite

...omissis...La verifica nei confronti del collasso per scorrimento può essere eseguita anche con il metodo degli spostamenti. In tal caso, la valutazione delle condizioni di sicurezza è effettuata mediante il confronto tra lo spostamento calcolato e il valore limite o di soglia dello spostamento.

...omissis... La scelta dei valori limite di spostamento deve essere effettuata e opportunamente motivata dal progettista...In particolare, gli spostamenti permanenti indotti dal sisma devono essere compatibili con la funzionalità dell’opera e con quella di eventuali strutture o infrastrutture interagenti con essa...”

Sulla base di questa premessa il presente capitolo descrive le principali soluzioni presenti in letteratura per la valutazione della “performance” sismica di un’opera di sostegno a gravità mediante un approccio agli spostamenti.

3.2 Il metodo di Newmark (1965)

Per la descrizione del metodo di Newmark (1965) si può fare riferimento ad un blocco rigido posto su un piano orizzontale. Il blocco, soggetto all’azione sismica derivante dal moto del piano, oppone resistenza al moto lungo il piano per effetto di una forza agente alla base proporzionale alla sua massa, quindi presupponendo l’esistenza di un legame di tipo rigido-plastico all’interfaccia blocco-terreno. Con riferimento allo schema di Figura 3.1 la resistenza allo scorrimento risulta:

$$T_{LIM} = W_b \cdot \tan \varphi_b \quad (3.1)$$

in cui W_b rappresenta il peso del blocco e $\tan\varphi_b$ è il valore scelto per il coefficiente di attrito tra blocco e piano.

In presenza di un moto del piano (che simula un evento sismico) la componente orizzontale della accelerazione che sollecita il piano viene integralmente trasferita al blocco; nel momento in cui tale accelerazione ha raggiunto un valore per cui la forza d'inerzia che sollecita il blocco supera la resistenza limite T_{LIM} si innesca tra le due superfici di contatto un moto relativo tale da determinare spostamenti permanenti. Il valore a_c della accelerazione per cui si desta il moto è individuato dalla condizione di equilibrio tra le due forze in gioco:

$$W_b \cdot k_h = W_b \cdot \tan\varphi_b \quad (3.2)$$

e pertanto risulta:

$$a_c = g \cdot \tan\varphi_b = k_{h,c} \cdot g \quad (3.3)$$

$k_{h,c}$ viene detto coefficiente di accelerazione o critica.

In definitiva sino a quando l'accelerazione indotta dal terremoto sul blocco è inferiore a quella critica il blocco risulta solidale al piano ed i due si muovono senza che venga compiuto alcuno spostamento relativo all'interfaccia blocco-terreno; nel momento in cui il valore della accelerazione agente sul blocco supera quella critica iniziano ad accumularsi spostamenti permanenti che sommati forniscono una misura degli spostamenti accumulati durante il moto relativo causato dal sisma. Man mano che procede il moto relativo si accumulano, quindi, spostamenti permanenti e la solidarietà tra blocco e piano viene a ripristinarsi nuovamente quando l'accelerazione indotta sul blocco ritorna sotto il valore di quella limite.

Lo spostamento finale è fornito dalla doppia integrazione nel tempo della funzione accelerazione relativa blocco-piano.

Il metodo descritto può essere esteso banalmente al caso in cui siano presenti anche le forze d'inerzia verticali definendo queste ultime mediante l'uso del coefficiente sismico verticale k_v . In tal caso il coefficiente di accelerazione critica si ottiene dalla seguente condizione di equilibrio:

$$k_h \cdot W = N \cdot (1 - k_v) \cdot \tan\varphi_b \quad (3.4)$$

pertanto risulta:

$$k_{h,c} = (1 - k_v) \cdot \tan\varphi_b \quad (3.5)$$

3.3 L'approccio di Richard & Elms (1979)

La valutazione degli spostamenti permanenti indotti da un sisma su un muro di sostegno a gravità, in termini di scorrimenti lungo il piano di posa, può essere effettuata con la procedura fornita da Richard & Elms nel 1979. Questa è basata sul modello di blocco su un piano scabro introdotto da Newmark (1965) e descritto nel precedente paragrafo.

L'approccio di Richard & Elms (nel seguito RE), prevede che le tensioni attive che il terreno esercita sul muro durante un terremoto siano stimate con la nota relazione di Mononobe-Okabe, quindi in termini di spinta mediante il coefficiente di spinta attiva in condizioni sismiche K_{ae} . Il calcolo dello spostamento permanente nell'analisi proposta da Newmark necessita della conoscenza del coefficiente di accelerazione critica $k_{h,c}$ la cui determinazione richiede la valutazione delle condizioni di equilibrio limite del muro, considerando la presenza contemporanea sia della forze di inerzia orizzontali che verticali indotte dal sisma.

Utilizzando l'approccio di RE le condizioni di equilibrio limite del muro, descritte dal sistema di equazioni che governa l'equilibrio delle forze agenti, dipendono dalla resistenza ultima alla base del muro. Con riferimento allo schema di Figura 3.2 l'espressione del coefficiente sismico critico è data dalla seguente relazione:

$$k_{h,c} = \frac{(2 \cdot c_b \cdot B_b) / (\gamma \cdot H^2 \cdot \Gamma)}{1 + \Omega \cdot A'} + \frac{A'}{1 + \Omega \cdot A'} \quad (3.6)$$

in cui:

$$A' = \tan \varphi_b + \frac{K_{ae}}{\Gamma} \cdot [\tan \varphi_b \cdot \sin(\delta + \beta) - \cos(\delta + \beta)] \quad (3.7)$$

Considerando che il valore della coesione alla base del muro sia nullo:

$$c_b = 0 \quad (3.8)$$

l'equazione (3.6) risulta:

$$\tan \theta = \frac{k_{h,c}}{1 - \Omega \cdot k_{h,c}} = \tan \varphi_b + \frac{K_{ae}}{\Gamma} \cdot [\tan \varphi_b \cdot \sin(\delta + \beta) - \cos(\delta + \beta)] \quad (3.9)$$

Con riferimento allo schema di Figura 3.2 è possibile ricavare l'equazione del moto che governa l'equilibrio dinamico del muro tenendo conto delle varie forze in gioco.

Sempre con riferimento alla Figura 3.2 indicando con B la larghezza della base di fondazione e considerando che la resistenza ultima all'interfaccia fondazione – terreno sia descritta dalla relazione:

$$T = c_b \cdot B + N \cdot \tan \varphi_b$$

l'equilibrio alla traslazione verticale ed orizzontale fornisce:

$$\begin{aligned}\sum F_o &= c_b \cdot B + N \cdot \tan \phi' = c_b \cdot B + W_w(1 - \Omega \cdot k_h) \cdot \tan \varphi_b + S_{ae} \cdot \sin(\delta + \beta) \cdot \tan \varphi_b = T_{lim} \\ \sum F_v &= W_w k_h + S_{ae} \cdot \cos(\delta + \beta) = T_{mob}\end{aligned}\quad (3.10)$$

Possono essere esaminate le due seguenti condizioni:

- il muro non subisce spostamenti fino a quando k_h non raggiunge il valore $k_{h,c}$ (1° caso);
- il muro subisce spostamenti appena il valore di k_h supera quello di $k_{h,c}$ (2° caso);

Nel primo caso ($k_h = k_{h,c}$) risulta:

$$S_{ae}(k_{h,c}) \cdot \cos(\delta + \beta) + k_{h,c} \cdot c_b \cdot B - W_{tot} \cdot \tan \varphi_b + \Omega \cdot k_{h,c} \cdot \tan \varphi_b - S_{ae}(k_{h,c}) \cdot \sin(\delta + \beta) = 0 \quad (3.11)$$

Nel secondo caso ($k_h > k_{h,c}$) si ha, invece:

$$S_{ae}(k_h) \cdot \cos(\delta + \beta) + k_h \cdot c_b \cdot B - W_{tot} \cdot \tan \varphi_b + \Omega \cdot k_h \cdot \tan \varphi_b - S_{ae}(k_h) \cdot \sin(\delta + \beta) = \frac{W_{tot}}{g} \cdot \ddot{d}_w \quad (3.12)$$

La (3.11) e la (3.12) ipotizzando per semplicità di calcolo $c_b = 0$ e possono essere riscritte nella seguente forma:

$$S_{ae}(k_{h,c}) \cdot \cos(\delta + \beta) + W_{tot} \cdot k_{h,c} - [W_{tot} \cdot (1 - \Omega \cdot k_{h,c}) + S_{ae}(k_{h,c}) \cdot \sin(\delta + \beta)] \cdot \tan \varphi_b = 0 \quad (3.13)$$

$$S_{ae}(k_h) \cdot \cos(\delta + \beta) + W_{tot} \cdot k_h - [W_{tot} \cdot (1 - \Omega \cdot k_h) + S_{ae}(k_h) \cdot \sin(\delta + \beta)] \cdot \tan \varphi_b = \frac{W}{g} \cdot \ddot{d}_w \quad (3.14)$$

Facendo la differenza tra la (3.14) e la (3.13) si ottiene:

$$\begin{aligned}& [S_{ae}(k_h) - S_{ae}(k_{h,c})] \cdot \cos(\delta + \beta) + W_{tot} \cdot (k_h - k_{h,c}) + W_{tot} \cdot \Omega \cdot \tan \varphi_b \cdot (k_h - k_{h,c}) + \\ & - [S_{ae}(k_h) - S_{ae}(k_{h,c})] \cdot \sin(\delta + \beta) \cdot \tan \varphi_b = \frac{W_{tot}}{g} \cdot \ddot{d}_w\end{aligned}\quad (3.15)$$

che può essere riscritta nella seguente forma:

$$(k_h - k_{h,c}) \cdot W_{tot} \cdot (1 + \Omega \cdot \tan \varphi_b) + [S_{ae}(k_h) - S_{ae}(k_{h,c})] \cdot [\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan \varphi_b] = \frac{W_{tot}}{g} \cdot \ddot{d}_w \quad (3.16)$$

dividendo entrambi i membri della (3.16) per $\frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2$ si ottiene:

$$\begin{aligned}& (k_h - k_{h,c}) \cdot \Gamma \cdot (1 + \Omega \cdot \tan \varphi_b) + [K_{ae}(k_h) \cdot (1 - \Omega \cdot k_h) - K_{ae}(k_{h,c}) \cdot (1 - \Omega \cdot k_{h,c})] \cdot \dots \\ & \dots \cdot [\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan \varphi_b] = \frac{\Gamma}{g} \cdot \ddot{d}_w\end{aligned}\quad (3.17)$$

dove Γ è il peso adimensionalizzato del muro:

$$\Gamma = \frac{2 \cdot W_{tot}}{\gamma \cdot H^2} \quad (3.18)$$

in cui:

- W_{tot} è il peso del muro;
- H è l'altezza del muro;
- γ è il peso specifico del terreno.

In definitiva l'equazione del moto che governa l'equilibrio dinamico del muro è la seguente:

$$\ddot{d}_w = g \cdot [(1 + \Omega \cdot \tan \varphi_b) \cdot (k_h - k_{h,c}) + C] \quad (3.19)$$

dove il parametro C assume la seguente espressione:

$$C = [K_{ae} \cdot (1 - \Omega \cdot k_h) - K_{ae,c} \cdot (1 - \Omega \cdot k_{h,c})] \cdot \frac{\cos(\delta + \beta) - \tan \varphi_b \cdot \sin(\delta + \beta)}{\Gamma} \quad (3.20)$$

in cui:

- K_{ae} e $K_{ae,c}$ sono i valori del coefficiente di spinta attiva calcolati con riferimento ad un generico coefficiente di accelerazione k_h e per uno critico $k_{h,c}$;
- δ e β rappresentano, come di consueto, l'angolo di attrito terra-muro e quello di inclinazione del paramento interno del muro stesso.

Utilizzando lo stesso procedimento adesso descritto è possibile determinare per lo schema di blocco rigido che scorre su piano orizzontale, considerando un egual valore della componente orizzontale dell'accelerazione e del coefficiente $k_{h,c}$, l'equazione del moto che governa l'equilibrio dinamico del blocco;

Tale equazione assume la seguente espressione:

$$\ddot{d}_0 = g \cdot [(1 + \Omega \cdot \tan \varphi_b) \cdot (k_h - k_{h,c})] \quad (3.21)$$

Le equazioni (3.19) e (3.21) sono legate tra loro dalla seguente relazione:

$$\ddot{d}_w = \ddot{d}_0 + C \cdot g \quad (3.22)$$

L'equazione (3.22) tiene conto delle reali differenze tra le equazioni del moto del muro di sostegno e del blocco rigido.

Eseguendo una doppia integrazione nel tempo delle equazioni (3.19), (3.21) e tenuto conto della (3.20) e (3.22) si perviene alla definizione degli spostamenti del muro di sostegno d_w e del blocco d_0 .

Sulla base del modello di Newmark e basandosi sui risultati delle integrazioni effettuate da Franklin & Chang (1977), Richard & Elms (1979) individuarono una legge per l'involuppo degli spostamenti in funzione del rapporto di accelerazione critica, definito come rapporto tra il

coefficiente di accelerazione critica di $k_{h,c}$ ed il coefficiente sismico k_{max} che descrive la massima accelerazione rilevata al suolo.

$$PGA = k_{h,max} \cdot g \quad (3.23)$$

L'equazione ricavata dai due autori è la seguente:

$$d = 0.087 \cdot \frac{PGV^2}{PGA} \cdot \left(\frac{k_c}{k_{max}} \right)^{-4} \quad (3.24)$$

in cui d è lo spostamento relativo espresso in pollici, PGV è la massima velocità del moto sismico.

3.4 L'approccio di Cascone et al. (1993)

Cascone et al. (1993) hanno proposto un metodo per il calcolo degli spostamenti che subiscono i muri di sostegno a gravità a seguito di un evento sismico nel caso di terrapieno con estradosso orizzontale e terreno privo di coesione. Si è considerato un sistema muro – terreno a due gradi di libertà (traslazioni, rotazioni) e sono state risolte mediante un metodo di integrazioni diretta le equazioni che governano il comportamento del sistema, ottenendo quindi la risposta del muro nel tempo, in termini di traslazioni e rotazioni.

Innanzitutto si suppone che il moto del muro possa essere assimilato a quello di un corpo rigido. Ciò consente di impostare il modello dinamico su uno schema a masse concentrate limitando a due il numero dei gradi di libertà del sistema (Fig. 3.3a). Per quanto riguarda la deformabilità del terreno, essa viene affidata ad un numero finito di molle ed infine per tenere conto della capacità del terreno di dissipare parte dell'energia che viene trasmessa dal sisma, ad ogni molla viene accoppiato uno smorzatore viscoso (Fig. 3.3b).

Il calcolo degli spostamenti che subisce il sistema in esame costituisce il risultato della risoluzione simultanea di due equazioni di equilibrio dinamico, una per ciascun grado di libertà fissato. In termini matriciali le equazioni assumono la forma:

$$[M] \cdot \ddot{u} + [C] \cdot \dot{u} + [K] \cdot u = p(t) \quad (3.25)$$

dove:

- $[M]$ rappresenta la matrice di massa del sistema;
- $[C]$ rappresenta la matrice di smorzamento del sistema;
- $[K]$ rappresenta la matrice di rigidità del sistema;

- $\ddot{u}, \dot{u}, u$ sono rispettivamente i vettori accelerazione, velocità e spostamento;
- $p(t)$ è il vettore di carico.

Il vettore di carico si può esprimere nella forma:

$$p(t) = M \cdot I \cdot \ddot{u}_g(t) \quad (3.26)$$

dove:

- M è la massa del sistema;
- $I = [1, 0]$ è il vettore pseudo – statico;
- $\ddot{u}_g(t)$ è l'accelerazione al suolo.

L'elemento innovativo di questo approccio consiste nel considerare le molle a rigidezza variabile con la posizione e di caratterizzarle con una legge costitutiva elasto – plastica inelastica specifica per ogni molla.

Facendo riferimento allo schema di Figura 3.3 Cascone et al.(1993) esprimono la rigidezza della generica molla normalizzata rispetto ad una lunghezza, in funzione del modulo di scarico e carico E_{ur} :

$$K_{ur} = E_{ur} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta l} \quad (3.27)$$

dove:

- Δl rappresenta la lunghezza che tiene conto dell'ampiezza della zona di terreno interessata dal moto del muro;
- E_{ur} è il modulo elastico di scarico e carico, che si può esprimere come:

$$E_{ur} = R_{ur} \cdot p^n \quad (3.28)$$

con:

- R_{ur} ed n coefficienti di rigidezza sperimentali adimensionali;
- P pressione media di confinamento;

Quindi in definitiva la (3.27) si può esprimere come segue:

$$K_{ur} = R_{ur} \cdot p^n \cdot \frac{\Delta z}{\Delta l} \quad (3.29)$$

Poiché Δz è costante, ciascuna molla di monte risulta caratterizzata da un diverso valore di K_{ur} dipendente dalla pressione media di confinamento alla quota della molla.

Per una dettagliata disamina dell'influenza dei parametri del modello, si rimanda al lavoro originale.

3.5 L'approccio di Caltabiano (1999)

Caltabiano (1999) affronta il problema della determinazione degli spostamenti delle opere di sostegno del tipo a gravità. Avendo limitato l'analisi, a questo tipo di opere di sostegno, assimilabili a corpi rigidi, la descrizione del moto è ricondotta ad un numero finito di gradi di libertà. In particolare, ipotizzare un terreno di fondazione infinitamente rigido e trascurare gli effetti di bordo, riducono ulteriormente i gradi di libertà alla sola traslazione e rotazione.

Inizialmente l'autore analizza il modello ad un solo grado di libertà che descrive gli scorrimenti orizzontali lungo il piano di posa della fondazione; successivamente lo studio esamina il modello caratterizzato da rotazioni e traslazioni.

Considerando solo il caso di pura traslazione, le azioni destinate in presenza di un evento sismico si possono suddividere come:

- Azioni resistenti: Taglio alla base T_b ;
- Azioni instabilizzanti: Spinta delle terre F_s e forze d'inerzia F_i ,

L'equilibrio dinamico del sistema è definito dalla seguente equazione:

$$F_i + F_s + T_b = 0 \quad (3.30)$$

Fissando le caratteristiche geometriche e geotecniche del sistema, rimangono univocamente definite le condizioni limite affinché sopraggiunga la plasticizzazione.

In particolare:

- fintantoché la forzante applicata non supera il valore minimo richiesto (accelerazione critica del sistema), si avrà una fase di moto solidale, la massa partecipante al moto rimane indefinita e l'accelerazione del sistema è coincidente con quella al suolo;
- quando invece la forzante supera il valore minimo richiesto, nel complesso muro – terrapieno sarà possibile distinguere un sottosistema sollecitato da un'accelerazione differente da quella al suolo e quindi da un campo di spostamenti permanenti rispetto alla configurazione iniziale.

Per valutare il campo di spostamenti indotto sul sistema durante le fasi di moto relativo è indispensabile individuare la massa che prende parte al moto. Nel modello proposto da

Caltabiano (1999), la massa del sistema non rappresenta una grandezza costante nel tempo bensì variabile. Infatti nell'alternarsi delle fasi di moto solidale e moto relativo, il sistema assume nuove configurazioni sempre più stabili. La modellazione dinamica proposta, ipotizza che durante la fase di moto relativo sia il piano di rottura che la massa del terreno siano invarianti, e che in seguito al campo di spostamenti l'estradosso del cuneo di rottura rimane invariato. (Figura 3.4)

Imponendo l'equilibrio dei volumi tra configurazione iniziale e quella deformata si ottiene, secondo il principio di conservazione della massa:

$$h^2 + 2 \cdot h \cdot x \cdot \tan \alpha - h_0^2 = 0 \quad (3.31)$$

Esplicitando tutto in funzione di dell'incognita h , e considerando la radice positiva di quest'ultima si ha l'altezza nella configurazione deformata come:

$$h = -x \cdot \tan \alpha + \sqrt{(x \cdot \tan \alpha)^2 + h_0^2} \quad (3.32)$$

Considerando il regime globale di spinta che sollecita il sistema, l'autore differenzia gli incrementi dinamici di origine inerziale ed azione spingente laterale delle terre come:

$$S_{ts} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot k_{ts} \quad (3.33)$$

dove k_{ts} è il coefficiente di spinta sismico;

$$S_t = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot k_t \quad (3.34)$$

dove k_t è il coefficiente di spinta delle terre.

Sommando le equazioni (3.33) e (3.34) si ottiene la classica relazione di spinta con il coefficiente di spinta pseudo – statico K_{ae} :

$$S_{ae} = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot (k_{ts} + k_t) = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot K_{ae} \quad (3.35)$$

Esplicitando adesso l'equazione del moto, con le forze che entrano in gioco durante la fase dinamica suddivise in azione spingente delle terre, taglio alla base ed azione inerziale si ha:

$$F_i + F_s + T_b = 0 \quad (3.36)$$

In qualsiasi istante la resistenza offerta alla base del muro dovrà rispettare la condizione:

$$T_b \leq F_a \quad (3.37)$$

Ossia un taglio alla base mai superiore alla resistenza di attrito disponibile.

Fin quando il valore assoluto della somma della forza d'inerzia e della spinta risulterà inferiore alla forza di attrito:

$$|F_i + F_s| < F_a \quad (3.38)$$

il sistema sarà governato da una condizione di moto solidale al terreno, in caso contrario:

$$|F_i + F_s| > F_a \quad (3.39)$$

si assisterà alla nascita di un'accelerazione relativa, responsabile delle deformazioni subite dal complesso muro – terrapieno.

Nell'istante in cui esiste il perfetto equilibrio tra la forza d'attrito e le azioni in stabilizzanti:

$$|F_i + F_s| = F_a \quad (3.40)$$

il sistema raggiunge la cosiddetta configurazione di transizione o di collasso, testimoniando il cambiamento della condizione di moto. Dunque in condizioni di moto solidale, sorretta dalla disequaglianza 3.38, l'unica accelerazione che sollecita il sistema è quella agente al suolo $\ddot{x}_g$, per cui l'equazione del moto si scriverà nella forma:

$$m \cdot \ddot{x}_g(t) + S[x(t)] - T_b(t) = 0 \quad (3.41)$$

Raggiunta la fase di incipiente collasso, il taglio alla base eguaglia la resistenza d'attrito disponibile e l'accelerazione al suolo coincide con l'accelerazione di soglia, quindi l'equazione di equilibrio dinamico assume la forma:

$$m \cdot k_h \cdot g + \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot h^2 \cdot K_t = F_a \quad (3.42)$$

Infine per un ulteriore aumento dell'eccitazione esterna, mentre il taglio alla base rimane costante, si genera un moto relativo, causato dalla presenza di una accelerazione $\ddot{x}$, tale da sopperire al mancato incremento del taglio. In queste condizioni l'equilibrio del sistema è così rappresentato:

$$m \cdot (\ddot{x}_g + \ddot{x}) + S[x(t)] - \sin g(\dot{x}) \cdot F_a = 0 \quad (3.43)$$

3.6 La soluzione di Stamatopoulos et al. (2006)

Stamatopoulos et al. (2006) propongono un metodo per la stima degli spostamenti permanenti di un muro di sostegno soggetto ad azioni sismiche considerando un approccio multi – blocco nel seguito (MB) ed imponendo una condizione di compatibilità cinematica tra gli spostamenti.

Con riferimento allo schema di Figura 3.5 l'ipotesi su cui si basa il metodo è che vi sia sempre contatto all'interfaccia muro – terreno sia prima che dopo il cambio di geometria; a seguito di ciò è possibile imporre che gli spostamenti del muro e del cuneo lungo la direzione ortogonale al paramento interno siano uguali. Quello proposto dagli autori è un modello a due blocchi in cui il muro (blocco 1) si muove lungo la sua fondazione ed il cuneo di terreno (blocco 2) tende a scivolare lungo la sua superficie di scorrimento.

Un tale cinematismo risulterebbe inammissibile in quanto ammetterebbe la possibilità di avere compenetrazioni interna con il terreno al di sotto del tacco del muro; per ovviare al problema i due autori ipotizzano che la superficie di estradosso del terrapieno in realtà non rimanga inalterata, ma che tenda ad assumere una differente configurazione come mostrato in Figura 3.6

Infatti come evidenziano le linee tratteggiate di Figura 3.6, relative al cambio di geometria del sistema, l'inclinazione del terrapieno a ridosso del muro si modifica in modo tale che la porzione di terreno, che non può più scivolare lungo la superficie di scorrimento, si vada ad accumulare tutta nella parte sommitale.

Considerando un tale cinematismo Stamatopoulos et al. (2006) risolvono il problema imponendo un equilibrio tra gli spostamenti dei due blocchi lungo la direzione ortogonale al paramento interno del muro. Indicando con d_1 lo spostamento del muro lungo la sua base e con d_2 quello del cuneo lungo la superficie di scorrimento, inclinata di un angolo pari a α_{Bcr-i} , ed imponendo la condizione di compatibilità cinematica risulta:

$$\Delta u_{W-i} \cdot \cos(-\alpha_W - \delta) = \Delta u_{Bcr-i} \cdot \cos(-\delta - \alpha_{Bcr-i}) \quad (3.44)$$

da cui:

$$\frac{\Delta u_{W-i}}{\Delta u_{Bcr-i}} = \frac{\cos(-\delta - \alpha_{Bcr-i})}{\cos(-\alpha_W - \delta)} = \lambda_i \quad (3.45)$$

Dopo aver introdotto il parametro λ_i , gli autori scrivono l'equazione del moto del muro e quella del cuneo considerando le varie forze agenti su questi come vettori funzione del tempo t .

L'equazione del moto del blocco 1 nella direzione dello spostamento risulta:

$$\frac{W_W}{g} \cdot \left(\frac{d^2 u_W}{dt^2} \right) = \frac{1}{\cos \phi_b} \cdot \left[\begin{aligned} &W_W \cdot \sin(\alpha_W - \varphi_W) + P_a \cdot \cos(\phi_{12} + \varphi_W - \alpha_W - \delta) + \dots \\ &\dots - c_W \cdot b_W \cdot \cos \varphi_W - c_{12} \cdot d_i \cdot \sin(\varphi_W - \delta - \alpha_W) + \dots \\ &\dots + k_i \cdot W_W \cdot \cos(\alpha_W - \varphi_W) \end{aligned} \right] \quad (3.46)$$

L'equazione del moto del blocco 2 nella direzione dello spostamento è:

$$\frac{W_{Bcr-i}}{g} \cdot \left(\frac{d^2 u_{Bcr-i}}{dt^2} \right) = \frac{1}{\cos \phi_B} \cdot \left[\begin{aligned} &W_{Bcr-i} \cdot \sin(\alpha_{Bcr-i} - \phi_B) - P_a \cdot \cos(\phi_{12} + \phi_B - \alpha_{Bcr-i} - \delta) + \dots \\ &\dots - c_B \cdot b_{Bcr-i} \cdot \cos \phi_B + c_{12} \cdot d_i \cdot \sin(\phi_B - \delta - \alpha_{Bcr-i}) + \dots \\ &\dots + k_i \cdot W_{Bcr-i} \cdot \cos(\alpha_{Bcr-i} - \phi_B) \end{aligned} \right] \quad (3.47)$$

dove d_i è la lunghezza di interfaccia tra il blocco 1 e il blocco 2 che può essere espressa come:

$$d_i = \frac{H_i}{\cos(-\delta)} \quad (3.48)$$

L'equazione che governa gli spostamenti del sistema è ottenuta dalle equazioni (3.45), (3.46) e (3.47) come:

$$\frac{d^2 u_W}{dt^2} = Z_{W-i} \cdot g \cdot (k_i - k_{c-i}) \quad (3.49)$$

dove:

$$Z_{W-i} = \frac{W_W \cdot \cos(\alpha_W - \varphi_W) \cdot \cos(\phi_{12} - \alpha_{Bcr-i} - \delta + \phi_B) + W_{Bcr-i} \cdot \cos(\alpha_{Bcr-i} - \phi_B) \cdot \cos(\phi_{12} - \alpha_W - \delta + \phi_W)}{W_W \cdot \cos \varphi_W \cdot \cos(\phi_{12} - \alpha_{Bcr-i} - \delta + \phi_B) \cdot \lambda_i + W_{Bcr-i} \cdot \cos \phi_B \cdot \cos(\phi_{12} - \alpha_W - \delta + \phi_W)} \cdot \lambda_i \quad (3.50)$$

con:

$$k_{c-i} = \frac{AA}{BB} \quad (3.51)$$

definito come coefficiente di accelerazione critica orizzontale.

I coefficienti AA e BB hanno la seguente espressione:

$$\begin{aligned} AA = & [W_W \cdot \sin(\varphi_W - \alpha_W) + c_W \cdot b_W \cdot \cos \varphi_W] \cdot \cos(\phi_{12} + \phi_B - \alpha_{Bcr-i} - \delta) + \dots \\ & \dots + [W_{Bcr-i} \cdot \sin(\phi_B - \alpha_{Bcr-i}) + c_B \cdot b_{Bcr-i} \cdot \cos \phi_B] \cdot \cos(\phi_{12} + \phi_W - \alpha_W - \delta) + \dots \\ & \dots + c_{12} \cdot d_i \cdot \cos \phi_{12} \cdot \cos(\phi_W - \phi_B + \alpha_W - \alpha_{Bcr-i}) \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} BB = & W_W \cdot \cos(\varphi_W - \alpha_W) \cdot \cos(\phi_{12} + \phi_B - \alpha_{Bcr-i} - \delta) + \dots \\ & \dots + W_{Bcr-i} \cdot \cos(\phi_B - \alpha_{Bcr-i}) \cdot \cos(\phi_{12} + \phi_W - \alpha_W - \delta) \end{aligned} \quad (3.53)$$

Mettendo in relazione tali equazioni gli autori ricavano la relazione che descrive la variazione della altezza del cuneo con il procedere degli spostamenti:

$$H_i = H_0 - \sum_{j=1}^{i-1} \left[\Delta u_{w-j} \cdot \left(\frac{\sin \alpha_{Bcr-j}}{\lambda_j} - \sin \alpha_w \right) \right] \quad (3.54)$$

Nella relazione precedente H_0 è il valore iniziale dell'altezza e i pedici “ i ” e “ j ” indicano il valore delle variabili calcolate rispettivamente al generico istante di tempo e a quello immediatamente precedente.

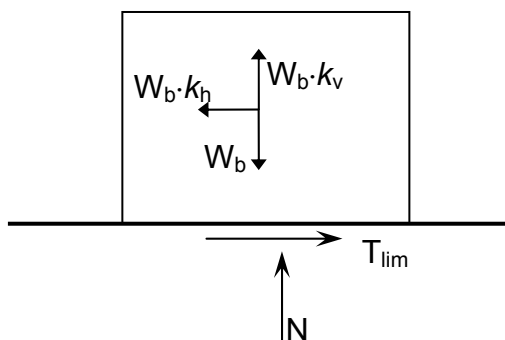


Figura 3.1 – Schema di blocco rigido che scorre su piano orizzontale.

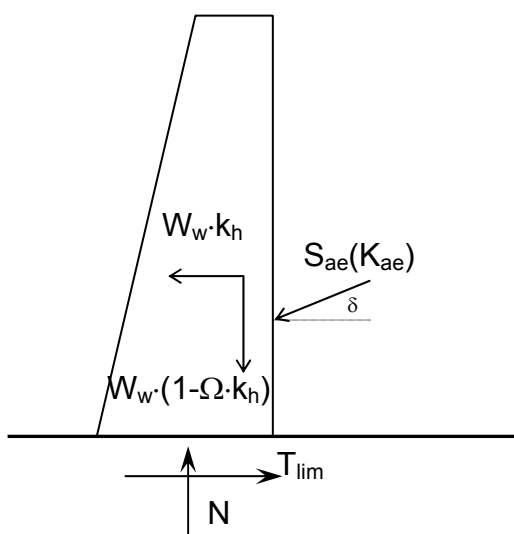


Figura 3.2 – Schema di riferimento per la descrizione dell'approccio proposto da Richard & Elms (1979).

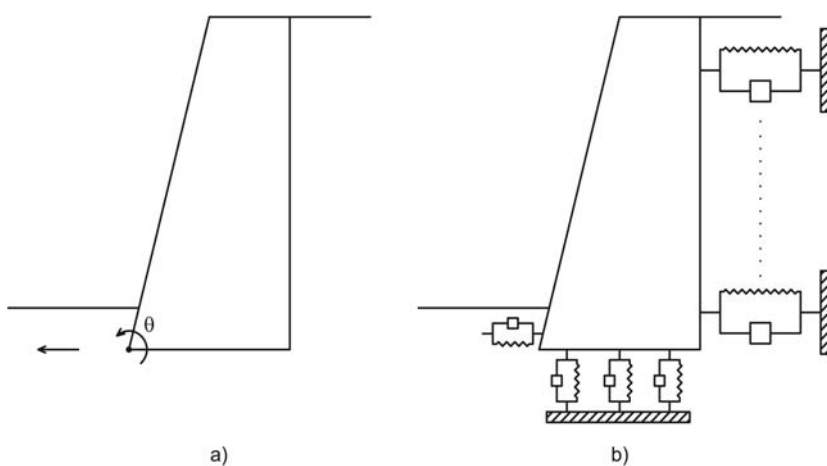


Figura 3.3 – Schema di riferimento per la descrizione dell'approccio di Cascone et al. (1993)

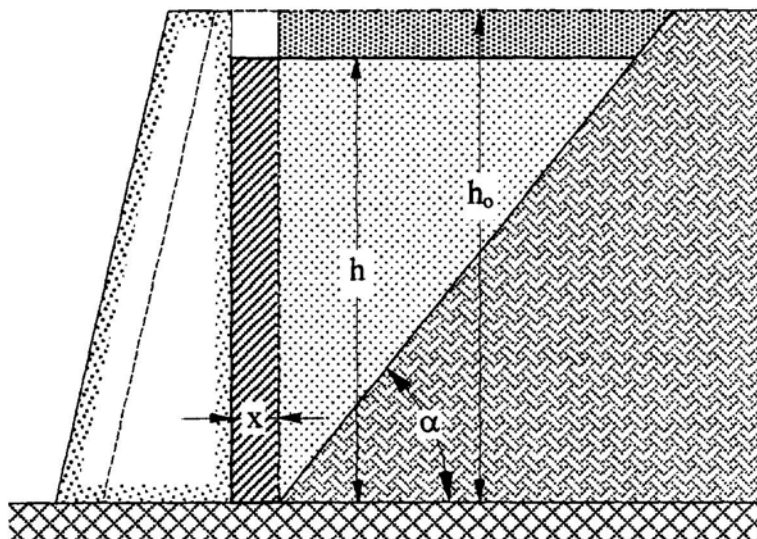


Figura 3.4 – Schema di riferimento per la descrizione dell'approccio di Caltabiano (1999)

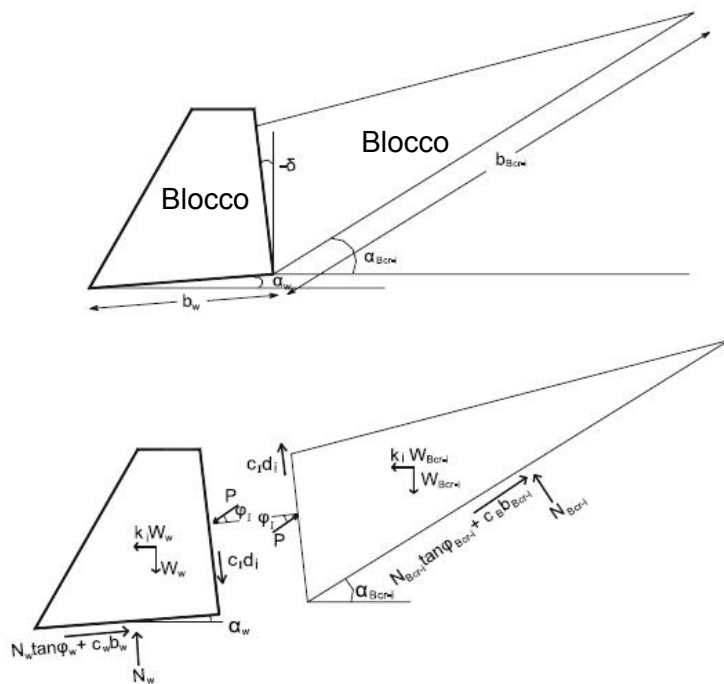


Figura 3.5 – Schema di riferimento per la soluzione del modello di Stamatopoulos et al. (2006)

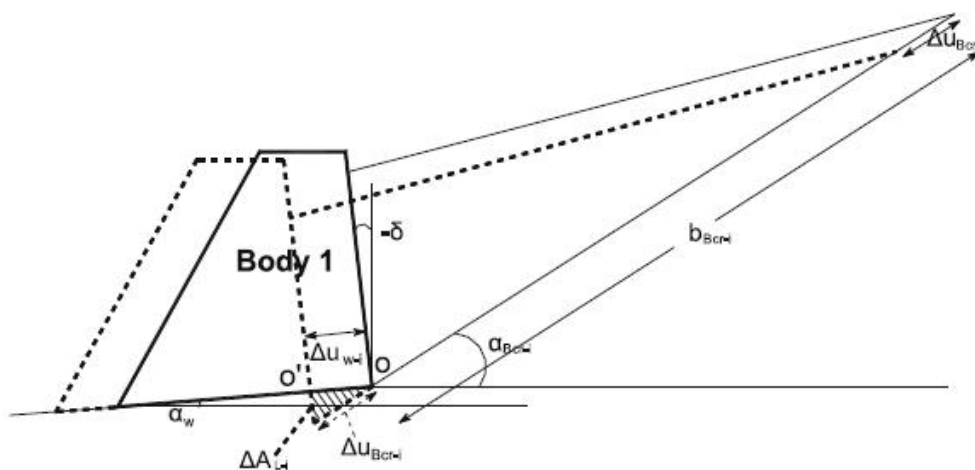


Figura 3.6 – Cambio di geometria ipotizzato da Stamatopoulos et al. (2006)

PARTE II

Premessa

L'approccio multi – blocco (MB) consente di pervenire ad espressioni in forma chiusa per la valutazione del coefficiente di spinta attiva K_{ae} e del coefficiente di accelerazione critica $k_{h,c}$ esaminando, contemporaneamente, l'equilibrio del muro e del terrapieno ed imponendo condizioni di compatibilità cinematica degli spostamenti di quest'ultimo. La denominazione "multi – blocco" di tale approccio deriva dal procedimento adottato per pervenire alle soluzioni sia del coefficiente di accelerazione critica $k_{h,c}$ che del coefficiente di spinta attiva K_{ae} .

A differenza dell'approccio alla "Richard & Elms", (nel seguito approccio RE), nell'analisi non si assume nota a priori né la geometria del cuneo di terreno coinvolto nel cinematismo (cuneo critico) né il valore delle azioni mutue che muro e terreno si scambiano.

Pertanto, i valori dell'angolo α_c e del coefficiente di spinta K_{ae} sono parte integrante della soluzione e quindi oltre alla valutazione di $k_{h,c}$, l'approccio MB consente, anche, di determinare K_{ae} ed α_c .

Diversamente da quanto mostrato per l'approccio RE, il procedimento analitico che conduce alla soluzione nell'approccio MB è complesso, soprattutto se ci si prefigge l'obiettivo di determinare una soluzione di carattere generale in termini di condizioni di carico sul terrapieno e configurazioni geometriche dello stesso.

La complessità analitica deriva dal fatto che il sistema di equazioni che descrive le condizioni di equilibrio del terrapieno deve essere risolto simultaneamente al sistema di equazioni che descrive le condizioni di equilibrio del muro ricercando, contestualmente, una soluzione di massimo (la spinta attiva) nel caso del terrapieno ed una soluzione di minimo (il coefficiente sismico critico) nel caso del muro.

Posizione del problema

Le regole fondamentali adottate in campo progettuale sono state da sempre il giusto compromesso tra l'esigenza di avere, da un canto, teorie applicabili con estrema semplicità e

dall'altro modellazioni matematiche che fossero quanto più aderenti al sistema reale da rappresentare.

Da qui l'esigenza di un'analisi a livello sia macro che microscopico, allo scopo di individuare un numero ristretto di parametri indispensabili, atti a descriverne il comportamento del sistema esaminato.

Le teorie e i modelli riportati in letteratura, descrivono il comportamento delle terre, fondandosi essenzialmente su due distinti legami costitutivi: elasto - plastico e rigido - plastico.

La possibilità di adottare un legame elasto - plastico richiede, nel comportamento reale del sistema, l'esistenza di una o più fasi elastiche con eventuali escursioni anche in campo plastico. Un sistema per il quale possa essere adottato un legame costitutivo esclusivamente elastico o elasto - plastico reagirà in relazione alla deformazione subita per la presenza dell'azione esterna; ma qualora venga meno la causa perturbatrice, la deformazione accumulata verrà restituita, rispettivamente, in parte o totalmente.

D'altro canto osservando il comportamento reale del sistema muro - terrapieno, appare evidente che una volta cessata la causa perturbatrice, qualunque sia la sua natura, lo stato deformativo impresso al sistema non subirà ulteriori evoluzioni, fin quando non sopraggiungeranno ulteriori azioni in grado di mutare il provvisorio stato di quiete e la corrispondente condizioni di equilibrio. Mettendo a confronto queste ultime due considerazioni, ossia relative al legame costitutivo da assumere per il terreno ed il suo reale comportamento, appare evidente che un legame costitutivo di tipo elasto - plastico risulta inadeguato per descrivere correttamente l'evoluzione del sistema.

Contrariamente, in letteratura, vengono proposte teorie in cui la determinazione della risposta del sistema è correlata all'esistenza di uno spostamento limite, ovvero una soglia che separa il comportamento elastico da quello rigido plastico.

Escludendo, durante le fasi di quiete, la possibilità da parte del sistema, di restituire anche in parte le deformazioni da esso subite, viene scartata l'ipotesi di adottare un ordinario legame elasto - plastico per il quale sarebbe necessario definire una soglia limite elastica.

Infatti è possibile osservare che l'azione complessiva di questo regime di tensioni, notoriamente indicato come spinta, genera sul manufatto a sostegno del terrapieno, uno stato tensionale di compressione la cui risultante è assimilabile all'azione esercitata da parte una molla compressa.

È così appurato un comportamento unilatero del terreno, che chiarisce dunque l'incapacità del sistema di restituire le deformazioni subite.

Ne consegue che la scelta del legame costitutivo, è indirizzata innanzitutto a cogliere questo nuovo aspetto, cioè che l'unico stato tensionale ammissibile da parte di un terreno privo di coesione, è un regime di compressione semplice.

Da questa serie di riflessioni è emerso, in conclusione, che il terreno possiede un comportamento unilatero ed irreversibile, per cui il legame costitutivo più conforme a rappresentarlo, sia per valutare il regime di spinta che per quel che riguarda l'analisi delle deformazioni, è una legge di tipo rigido – plastico.

Il sistema preso in esame in questa parte seconda, del presente lavoro di tesi, è costituito da un muro di contenimento del tipo a gravità o a mensola a sostegno di un terreno sabbioso asciutto ed omogeneo.

La valutazione della risposta in termini di spostamenti richiede un'analisi preliminare consistente nel determinare le condizioni che comportano la plasticizzazione del sistema, ossia quelle configurazioni dette di incipiente collasso che precedono le fasi di moto relativo, durante le quali il complesso muro – terrapieno accumula deformazioni.

Valutare queste cosiddette condizioni di incipiente collasso corrisponde in altri termini a determinare le grandezze che individuano il raggiungimento dello stato limite, rappresentate dal valore dell'accelerazione critica $k_{h,c}$ e dall'inclinazione del piano di rottura all'interno del terrapieno α_c , ovvero l'angolo critico di inclinazione del cuneo di terreno.

Concordemente a quanto anticipato in precedenza, si farà riferimento a terreni granulari privi di coesione ed in assenza di falda. Escludere a priori l'interazione con l'acqua interstiziale, riduce il numero dei parametri liberi del problema, evitando in tal modo una modellazione complessa, che debba altrimenti prendere in considerazione lo sviluppo di sovrappressioni interstiziali ed eventuali fenomeni di liquefazione.

I muri di sostegno, rientrano tra quelle opere ingegneristiche diffusamente impiegate, poiché trovano innumerevoli applicazioni in diversi settori. Naturalmente ciò ha richiesto in termini di geometria una certa flessibilità.

Per questo motivo il problema è stato risolto con riferimento a semplici condizioni geometriche e al contorno mentre nel seguito del lavoro sono state esaminate diverse condizioni al contorno per il terrapieno a ridosso dell'opera di sostegno;

in particolare saranno trattati i casi:

- terrapieno comunque inclinato (capitolo quarto);
- terrapieno comunque inclinato in presenza di sovraccarico distanziato ed esteso indefinitamente (capitolo quinto);

- terrapieno di altezza finita ed in presenza di sovraccarico (capitolo sesto);
- terrapieno comunque inclinato soggetto a carico lineare (capitolo settimo);

La teoria di seguito esposta è indipendente dalla sezione del muro, e quindi, definita la geometria del sistema e la densità del calcestruzzo o del materiale costituente l'opera è facile determinare la massa del sistema. In definitiva sarà quindi necessario solamente determinare la porzione di terreno mobilitata nello stato di incipiente collasso α_c , e il valore dell'accelerazione critica $k_{h,c}$ superata la quale il muro inizierà ad accumulare gli spostamenti.

Riportiamo di seguito le ipotesi su cui si basano le successive modellazioni matematiche essenziali per caratterizzare le configurazioni limite:

il muro è sufficientemente lungo da poter trascurare gli effetti di bordo (sistema piano);

il terreno è sabbioso e asciutto, omogeneo e privo di coesione, soddisfacendo così il criterio di rottura di Mohr – Coulomb;

la superficie di rottura è piana, comunque inclinata di un angolo α incognito, e originandosi al piede del muro, stabilisce lo stato limite in corrispondenza alla massima spinta;

il sistema è in condizioni di incipiente collasso in corrispondenza del minimo regime di pressioni orizzontali, determinando lungo la superficie di rottura lo sviluppo della massima resistenza al taglio del terreno;

Schemi di riferimento per l'analisi

Come già accennato nel precedente paragrafo, le soluzioni mostrate insieme ai modelli matematici utilizzati, sono indipendenti dalla geometria dell'opera, sia essa del tipo a gravità o a mensola.

Le tipologie di muri di sostegno che verranno analizzati nel presente lavoro di tesi sono mostrati nelle Figure da II.2 a II.5 e corrispondono ai seguenti casi:

- muro di sostegno a ridosso di un terrapieno comunque inclinato; (Fig. II.2)
- muro di sostegno a ridosso di un terrapieno in presenza di sovraccarico distanziato ed esteso indefinitamente; (Fig. II.3)
- muro di altezza finita ed in presenza di sovraccarico; (Fig. II.4)
- muro di sostegno a ridosso di un terrapieno comunque inclinato soggetto a carico lineare. (Fig. II.5)

Nelle stesse figure sono mostrate le differenti combinazioni di parametri geometrici del problema che saranno esaminati in questo lavoro.

Tutte le geometrie prese in esame nelle Figure da II.2a II.5c, possono essere ricondotte ad un unico schema equivalente mostrato in Figura II.6 caratterizzato da opportuni valori β^* , Γ^* e del peso W_w^* dell'opera.

In particolare:

$\beta^* = \beta$ per gli schemi di riferimento di Fig. II.2a, II.3a, II.4a, II.5a

$\beta^* = 0$ per gli schemi di riferimento di Fig II.2b, II.3b, II.3c, II.4b, II.4c, II.5b, II.5c.

Il peso W_w^* risulta definito dalla relazione:

$$W_w^* = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot \Gamma^* \quad (II.1)$$

in cui:

$$\Gamma^* = \frac{2 \cdot W_w}{\gamma \cdot H^2} \text{ per gli schemi di riferimento mostrati nelle Figure II.2a, II.3a, II.4a, II.5a} \quad (II.2)$$

$$\Gamma^* = \frac{2 \cdot W_w}{\gamma \cdot H^2} + \chi_s \text{ per gli schemi di riferimento mostrati nelle Figure II.2b, II.3b, II.4b, II.5b} \quad (II.3)$$

$$\Gamma^* = \frac{2 \cdot W_w}{\gamma \cdot H^2} + \chi_s + \chi_q \text{ per gli schemi di riferimento mostrati nelle Figure II.3c, II.4c, II.5c} \quad (II.4)$$

dove:

- γ è il peso dell'unità di volume costituente il terrapieno;
- W_w è il peso reale dell'opera di sostegno
- H è l'altezza reale dell'opera di sostegno mostrata nelle Fig. da II.2 a II.5c.

Inoltre:

per gli schemi mostrati nelle Figure II.2b, II.3b, II.4b, II.5b l'espressione di χ_s è la seguente:

$$\chi_s = l \cdot [2 \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta) + l \cdot \tan i] + \tan \beta \cdot (1 - \xi)^2 \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta) \quad (II.5)$$

per lo schema mostrato nella Figura II.4c l'espressione di χ_s è la seguente:

$$\chi_s = (1 - \xi) \cdot [2 \cdot l + (1 - \xi) \cdot \tan \beta] + 2 \cdot t [l + (1 - \xi) \cdot \tan \beta - t \cdot \cot i] + t^2 \cdot \cot i \quad (II.6)$$

$$\text{dove: } t = \frac{h_0}{H} \quad (II.7)$$

per gli schemi mostrati nelle Figure II.3c II.4c l'espressione di χ_q è la seguente:

$$\chi_q = n_q \cdot (\tan \beta + l - l_q) \quad (II.8)$$

$$\text{dove: } n_q = \frac{2 \cdot q}{\gamma \cdot H} \text{ per gli schemi di Fig. II.3c e II.4c} \quad (II.9)$$

q è il sovraccarico distribuito sull'*estradosso*

$$l_q = t \cdot \cot i \text{ per lo schema di fg. II.4c} \quad (II.10)$$

per lo schema di Fig. II.5c, l'espressione di χ_q è la seguente:

$$\chi_q = n_q = \frac{2 \cdot F}{\gamma \cdot H^2} \quad (II.11)$$

Per tutti gli schemi presi in esame nello studio, le espressioni per la determinazione del peso del cuneo che entra in gioco nelle equazioni di equilibrio sono le seguenti:

$$W_s = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot (\tan \beta + \cot \alpha) \cdot \frac{1 + \tan i \cdot \tan \beta}{1 - \tan i \cdot \cot \alpha} \text{ per lo schema di Fig. II.2a} \quad (II.12)$$

$$W_s = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^{*2} \cdot \frac{\cot \alpha}{1 - \tan i \cdot \cot \alpha} \text{ per gli schemi di Fig. II.2b, II.3b, II.3c, II.5b, II.5c} \quad (II.13)$$

$$W_s = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot [(\cot \alpha + \tan \beta) \cdot (1 + 2 \cdot t) + t^2 \cdot (\cot \alpha - \cot i)] \text{ per lo schema di Fig. II.4a} \quad (II.14)$$

$$W_s = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^{*2} \cdot [\cot \alpha \cdot (1 + 2 \cdot t^*) + t^{*2} \cdot (\cot \alpha - \cot i)] \text{ per lo schema di Fig. II.4b} \quad (II.15)$$

$$W_s = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^{*2} \cdot \cot \alpha \text{ per lo schema di Fig. II.4c} \quad (II.16)$$

in cui:

$$t = \frac{h_0}{H} \text{ per lo schema di riferimento di Fig. II.4a;} \quad (II.17)$$

$$t^* = \frac{h_0^*}{H^*} \text{ per lo schema di riferimento di Fig. II.4b.} \quad (II.18)$$

Relativamente alla distanza del sovraccarico dalla testa dell'opera, valgono le seguenti posizioni;

$$\lambda_q^* = 0 \text{ per i casi di Fig. II.3c, II.4c;} \quad (II.19)$$

$$\lambda_q^* \neq 0 \text{ per i casi di Fig. II.3b, II.4b;} \quad (II.20)$$

$$\lambda_q \neq 0 \text{ per il caso di Fig. II.3a.} \quad (II.21)$$

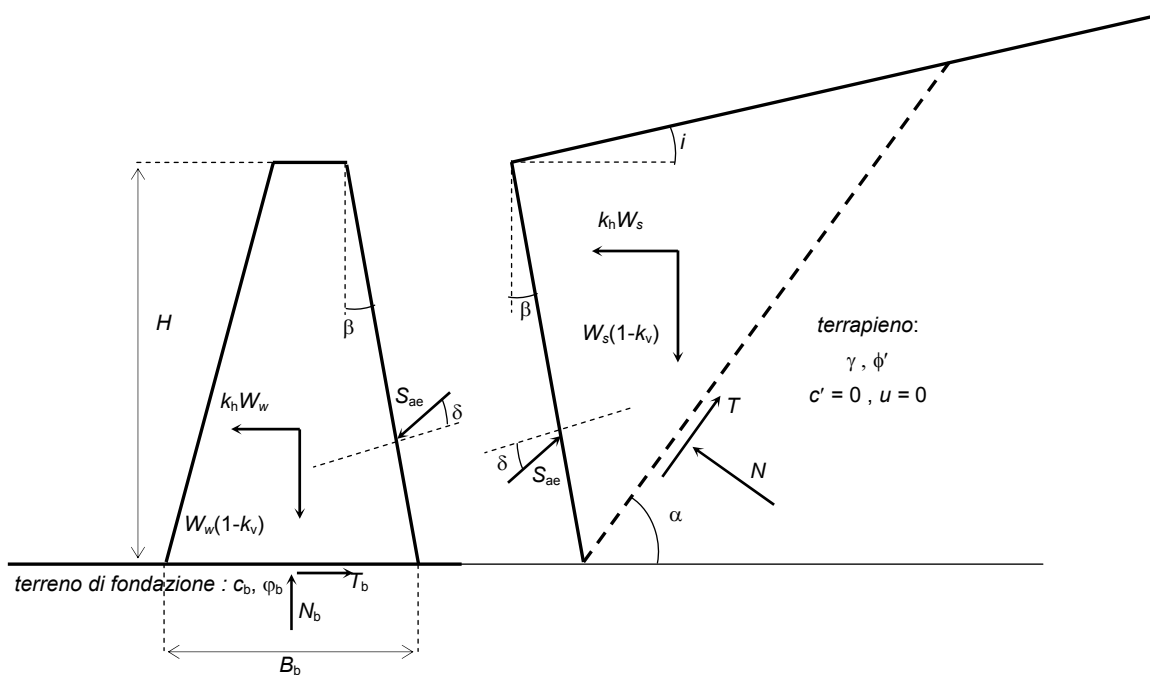


Figura II.1: schema di riferimento utilizzato per la descrizione delle soluzioni con approccio MB

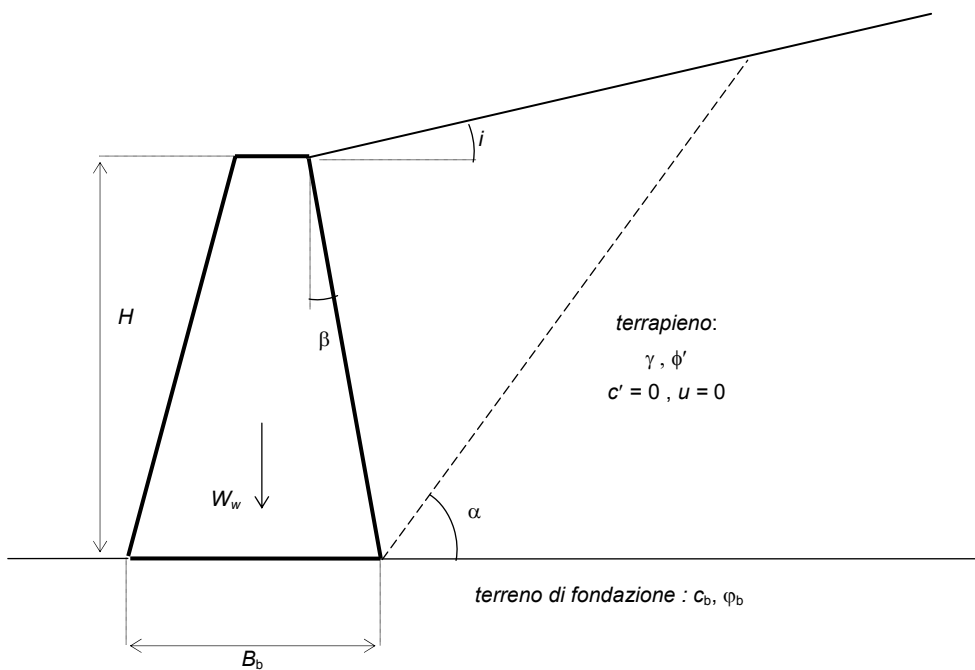


Figura II.2.a – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 2.a

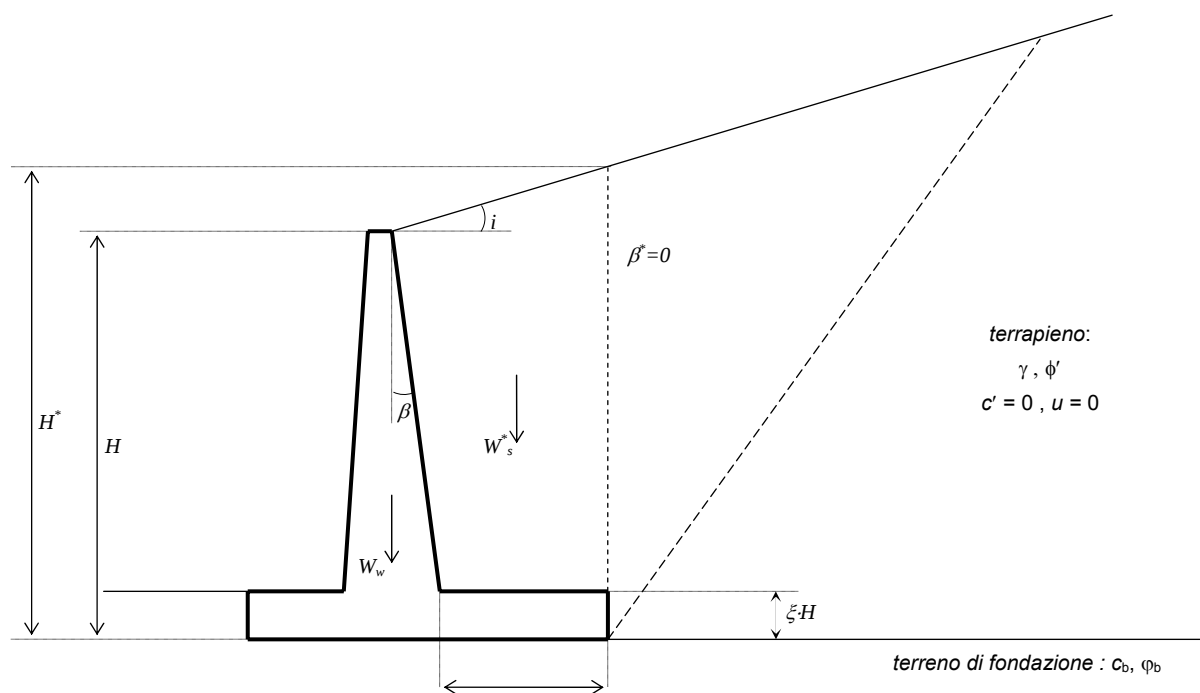


Figura II.2.b – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 2.b

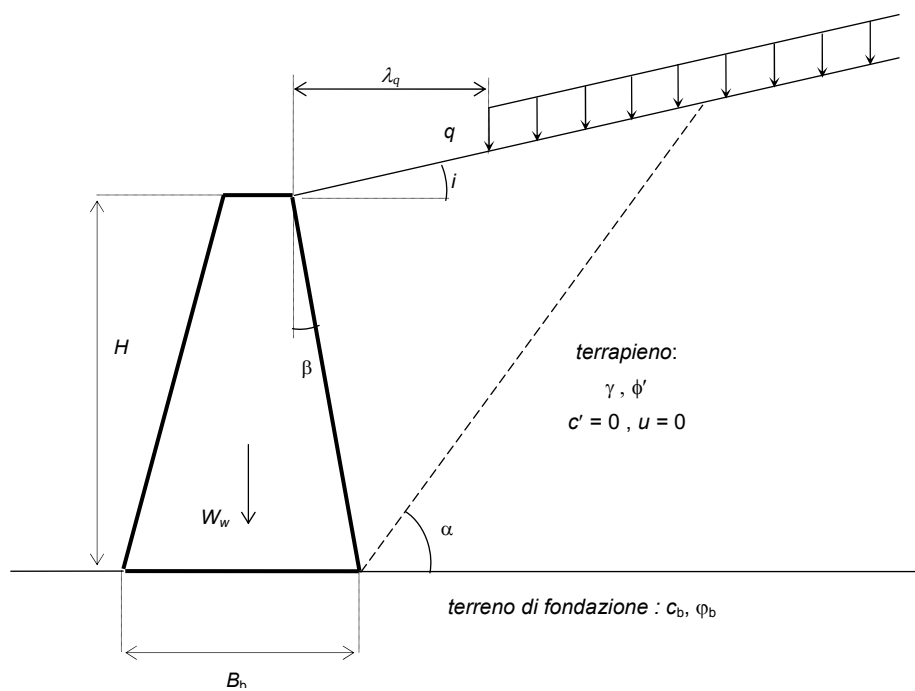


Figura II.3.a – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 3.a

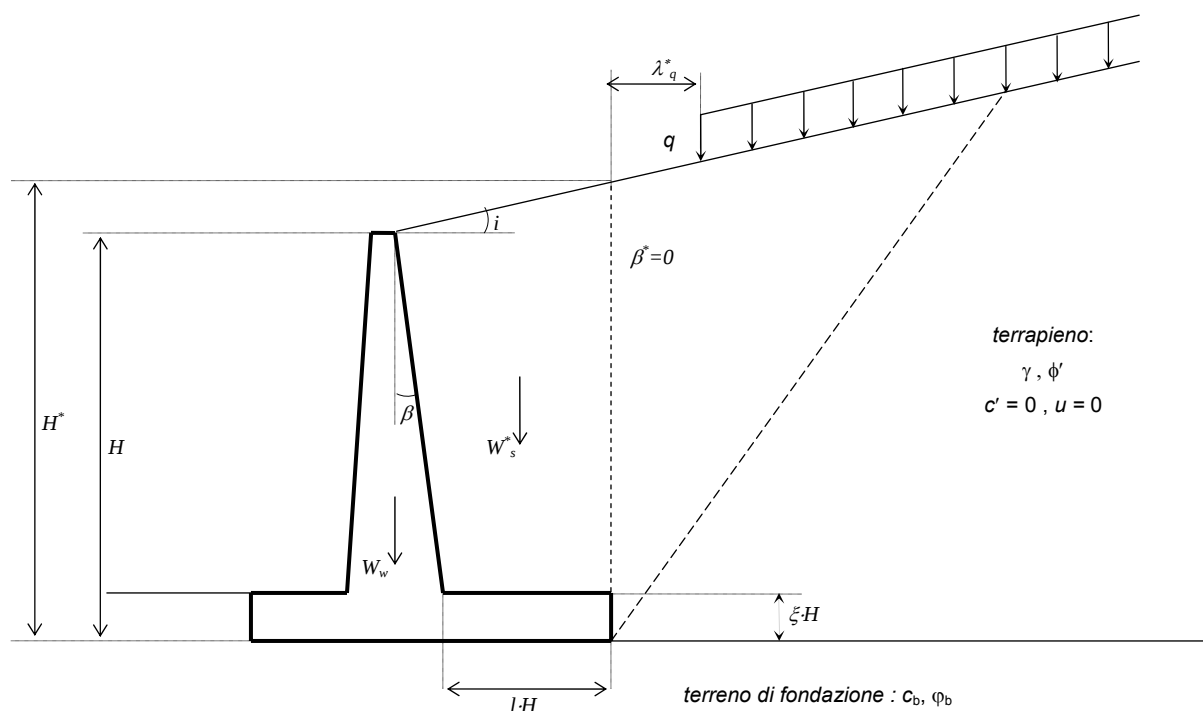


Figura II.3.b – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 3.b

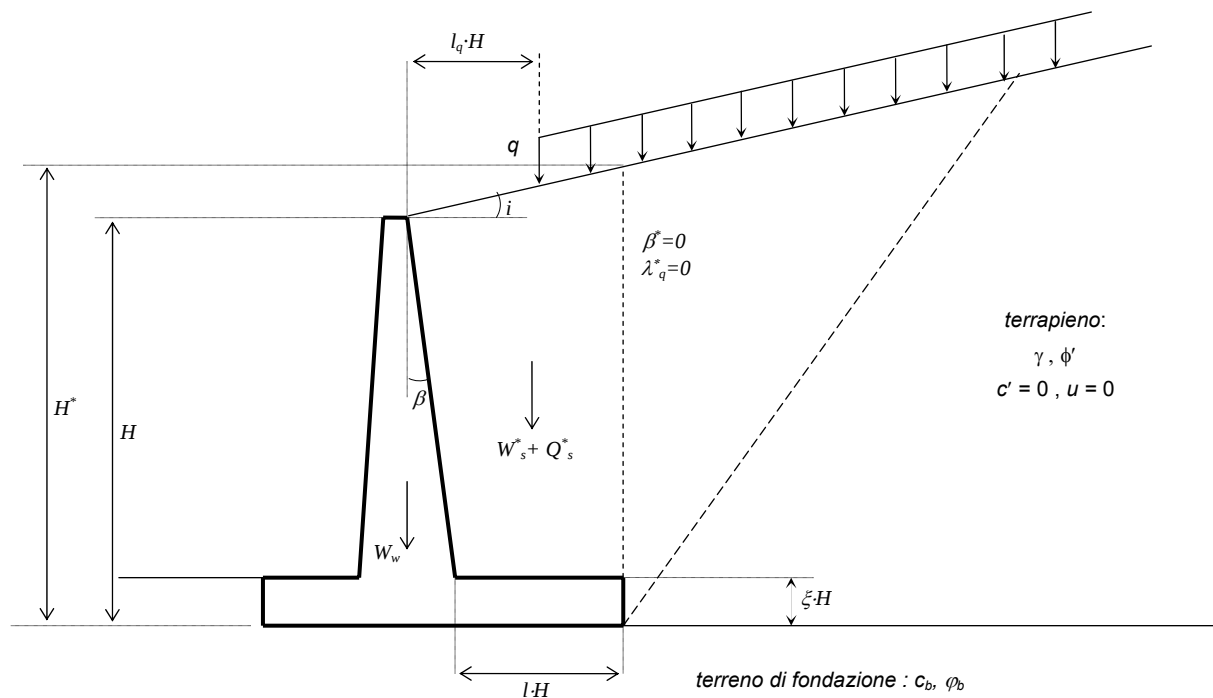


Figura II.3.c – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 3.c

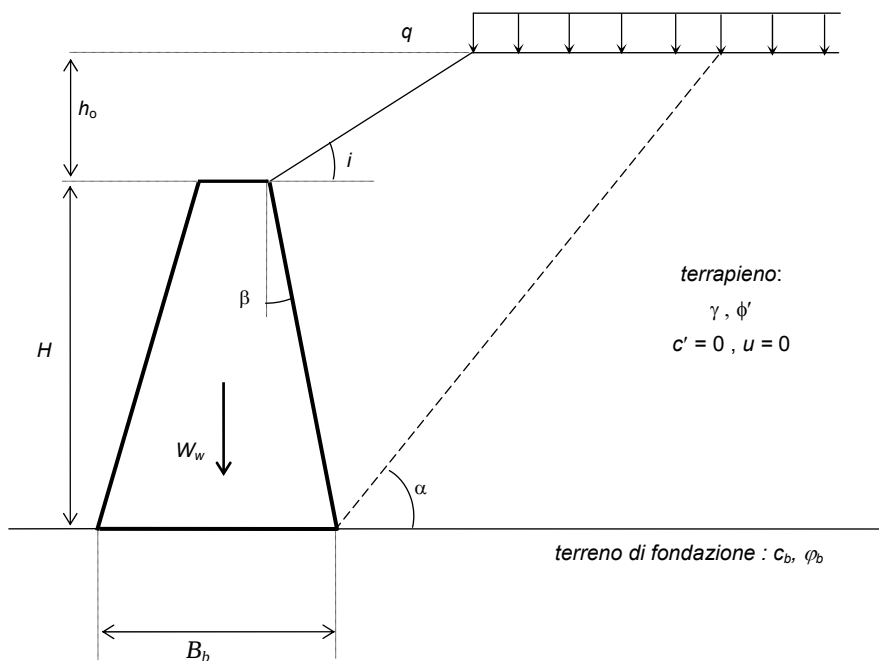


Figura II.4.a – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 4.a

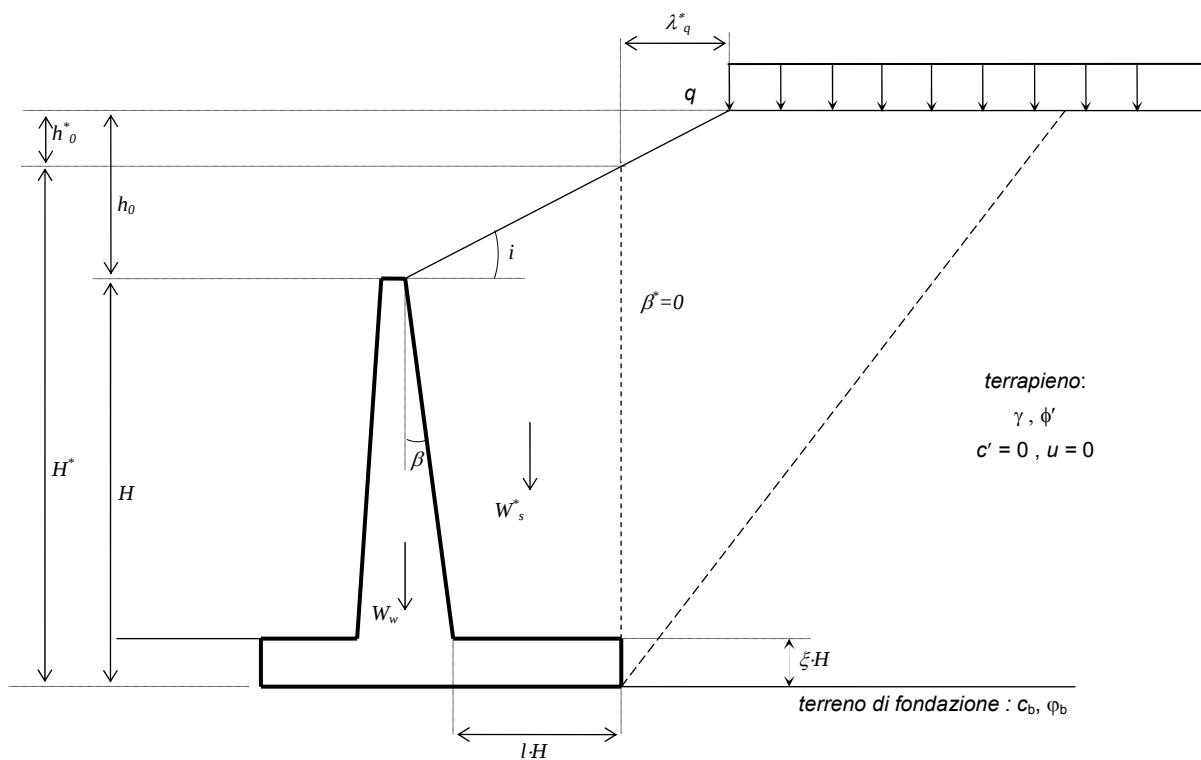


Figura II.4.b – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 4.b

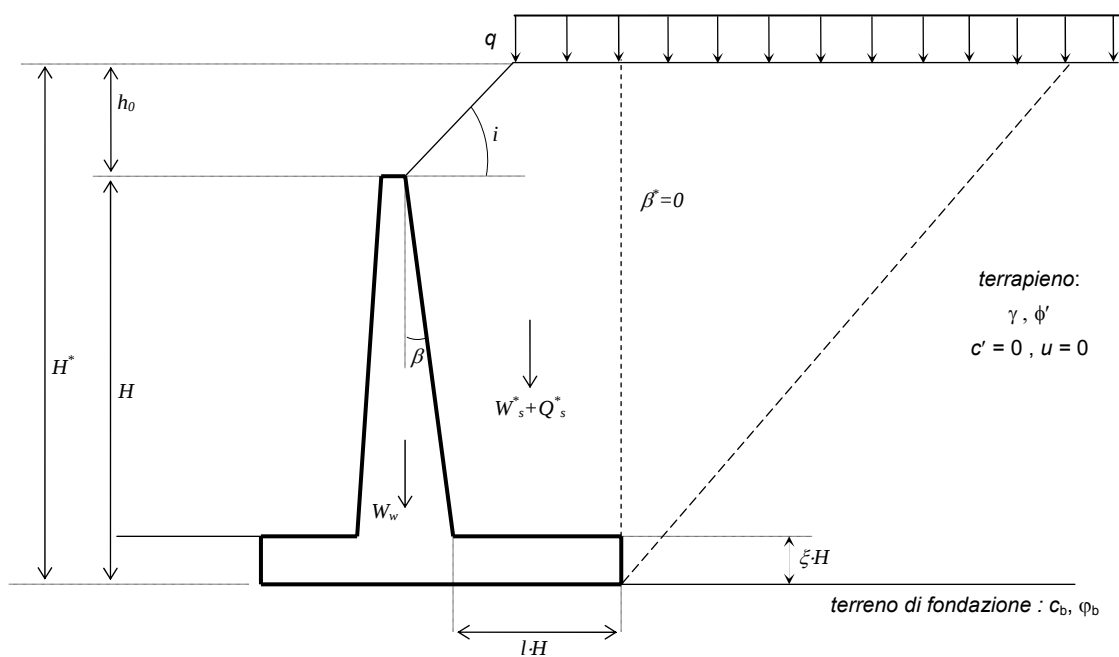


Figura II.4.c – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 4.c

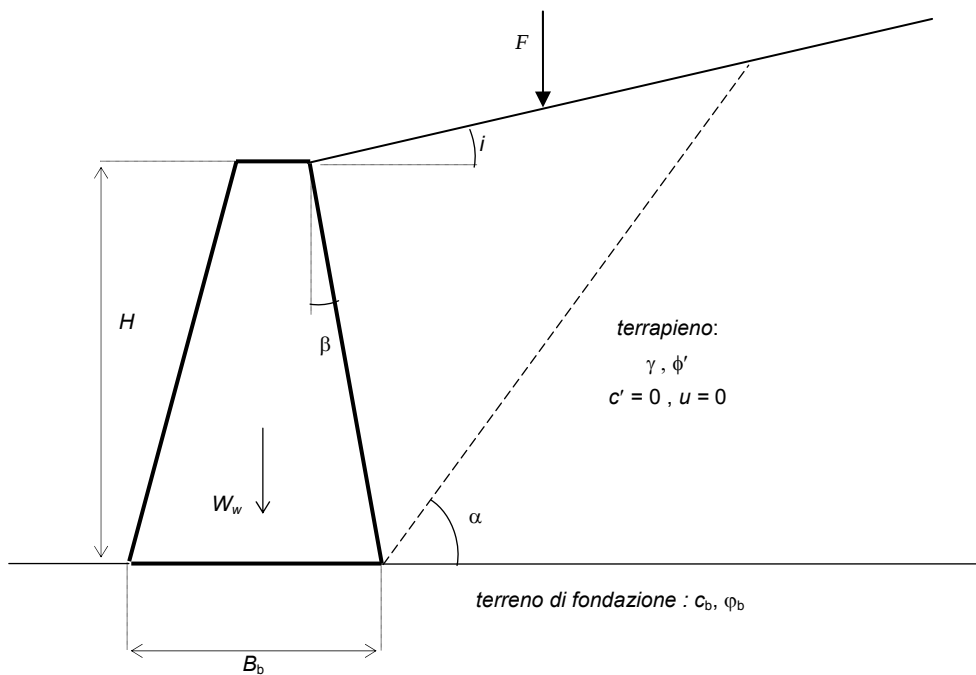


Figura II.5.a – Schema per la generalizzazione della soluzione: caso 5.a

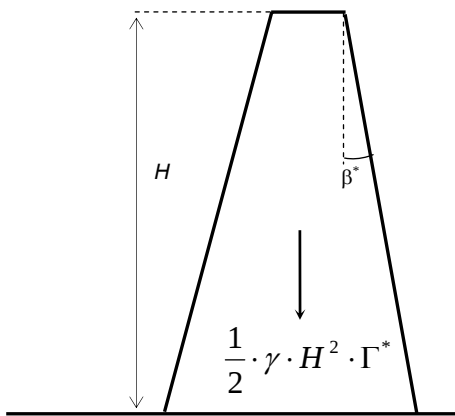


Figura II.6: schema di riferimento muro.

CAPITOLO QUARTO

SOLUZIONI IN FORMA CHIUSA LA DETERMINAZIONE DEL COEFFICIENTE DI SPINTA ATTIVA, DEL COEFFICIENTE SISMICO CRITICO E DEL COEFFICIENTE SISMICO EQUIVALENTE PER LO SCHEMA DI MURO DI SOSTEGNO

4.1 Generalità

In questo capitolo sarà esaminato lo schema di muro di sostegno per il quale l'approccio multi blocco sarà applicato con riferimento alle notazioni mostrate in Figura 4.1.

In effetti la configurazione del sistema, o più genericamente le condizioni al contorno, influiscono sullo schema di equilibrio limite e quindi influenzano le grandezze che individuano le condizioni critiche per l'opera di sostegno, ovvero il coefficiente sismico critico $k_{h,c}$ del sistema e l'inclinazione del piano di rottura all'interno del terrapieno α_c .

D'altro canto è interessante osservare che l'approccio con cui si perviene alla soluzione è indipendente dalla geometria del complesso muro-terreno cosicché il criterio che verrà di seguito esposto costituisce un metodo generale, estendibile a qualsiasi condizione al contorno.

4.2 Schema di riferimento

La procedura proposta in questa sede per la determinazione di $k_{h,c}$ è inquadrabile nell'ambito degli approcci multi blocco (di seguito MB) e fa utilizzo del metodo dell'equilibrio limite. Il sistema muro-terreno preso in esame è mostrato nella Figura 4.1 insieme alle notazioni utilizzate per descrivere le variabili prese in esame nell'analisi. Il terrapieno è supposto asciutto ($u = 0$) e dotato di sola resistenza attritiva ($c' = 0$). La resistenza allo scorrimento alla base del muro è descritta dai parametri c_b e ϕ_b .

L'azione sismica è considerata agente sul terrapieno e sul muro ed è descritta dalle componenti orizzontali k_h e verticale k_v del coefficiente sismico e dai parametri θ e Ω definiti dalle seguenti relazioni:

$$\tan \theta = \frac{k_h}{1 - k_v} \quad (4.1)$$

$$\Omega = \frac{k_v}{k_h} \quad (4.2)$$

θ è correlato ad Ω mediante la relazione:

$$\Omega = \frac{1}{k_h} - \frac{1}{\tan \theta} \quad (4.3)$$

La stabilità del sistema, sia in campo statico che dinamico è affidata esclusivamente al muro di sostegno. La resistenza offerta dall'opera di contenimento ha origine lungo la superficie di contatto suolo – fondazione, ed è diretta costantemente in opposizione al moto generato dalle eccitazioni dinamiche esterne. Tale azione è genericamente indicata come taglio alla base T_b , ed il suo modulo non è costante ma influenzato dall'equilibrio del sistema. Esiste comunque per essa un limite superiore, dipendente sia dal peso del manufatto, che dal coefficiente di attrito alla base del muro ($\tan \varphi_b$), definito a partire dall'angolo di attrito suolo – fondazione φ_b e rappresentativo del vincolo di aderenza osservato in corrispondenza al piano di contatto. Il valore massimo del taglio alla base, comunemente indicato come forza d'attrito, rimane definito dalla seguente relazione:

$$T_{lim,b} = c_b \cdot B_b + W_w \cdot \tan \varphi_b \quad (4.4)$$

in cui B_b è la larghezza della base della fondazione e W_w è il peso del manufatto.

Nella 4.4 trascurando il contributo dovuto alla coesione alla base $c_b=0$ risulta:

$$T_b = T_{lim,b} = W_w \cdot \tan \varphi_b \quad (4.5)$$

Infine l'azione laterale esercitata dal terrapieno sul manufatto è correlata al piano di scorrimento individuato in condizioni plastiche. Il suo modulo rappresenta la risultante orizzontale delle tensioni normali e tangenziali, mobilitate lungo la superficie di rottura. Una delle ipotesi fondamentali, per risolvere il problema, consiste nel supporre che, raggiunta la condizione di equilibrio limite, le tensioni tangenziali, mobilitate lungo la presunta superficie di scorrimento, rispettino la nota relazione:

$$\tau_{lim} = \sigma_{lim} \cdot \tan \phi' \quad (4.6)$$

che integrata all'intero piano di rottura diventa:

$$T = N \cdot \tan \phi' \quad (4.7)$$

4.3 Determinazione del coefficiente di spinta attiva e del coefficiente sismico critico

Nello spirito dell'approccio *MB* la soluzione del problema (ovvero i valori di $k_{h,c}$ e di K_{ae}) è ricercata risolvendo simultaneamente le equazioni che descrivono le condizioni di equilibrio del cuneo di spinta (supposto in stato limite attivo) e le equazioni che descrivono le condizioni di equilibrio limite del muro ipotizzando che, per effetto delle azioni instabilizzanti di natura sismica, esso possa traslare lungo il piano di posa della fondazione. Nell'analisi si prende in esame una superficie di potenziale scorrimento del terrapieno piana individuata dall'angolo α che essa forma con l'orizzontale (Fig. 4.1).

Il cuneo di terreno individuato da tale generica superficie è in equilibrio sotto l'azione del proprio peso W_s , delle corrispondenti azioni inerziali $k_h \cdot W_s$ e $k_v \cdot W_s$, dell'azione mutua $S_{ae}(\alpha)$ che muro e terrapieno si scambiano e, infine, delle azioni N e T risultanti delle tensioni normali e tangenziali mobilitate lungo la superficie di potenziale scorrimento (Fig. 4.1).

Le condizioni di equilibrio limite ($k_h = k_{h,c}$, $k_v = k_{v,c}$) del cuneo di terreno sono descritte dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} W_s \cdot (1 \pm \Omega \cdot k_{h,c}) = S_{ae}(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) + T \cdot \sin(\alpha) + N \cdot \cos(\alpha) \\ W_s \cdot k_{h,c} = S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) + T \cdot \cos(\alpha) - N \cdot \sin(\alpha) \\ T = T_{lim} = N \cdot \tan \phi' \end{cases} \quad (4.8)$$

con:

$$W_s = \frac{\gamma \cdot H^2}{2} \cot \alpha \cdot \left(1 + \frac{\cot \alpha \cdot \tan i}{1 - \cot \alpha \cdot \tan i} \right) \quad (4.9)$$

$$S_{ae}(\alpha) = \frac{\gamma \cdot H^2}{2} K_{ae}(\alpha) \cdot (1 - \Omega \cdot k_{h,c}) \quad (4.10)$$

Esplicitando tutto in funzione di $\tan \alpha$, dopo le opportune semplificazioni e sostituzioni, il sistema di equazioni descritto dalla (4.8), può essere riscritto con la seguente equazione:

$$K_{ae}(\alpha) = \frac{A_1 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_1 \cdot \tan \alpha + C_1}{A_2 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_2 \cdot \tan \alpha + C_2} = \frac{\Phi_1(\alpha)}{\Phi_2(\alpha)} \quad (4.11)$$

che descrive in forma adimensionale, la condizione di equilibrio limite del cuneo di terreno;

I coefficienti A_1 , B_1 , C_1 e A_2 , B_2 , C_2 , relativi al coefficiente di spinta K_{ae} (4.11), sono definiti dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} A_1 = -\tan\beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan\beta) \cdot (1 + \tan\theta \cdot \tan\phi') \\ B_1 = -\frac{\cos(\beta - \theta + \phi')}{\cos\beta \cdot \cos\theta \cdot \cos\phi'} \cdot (1 + \tan\beta \cdot \tan i) \\ C_1 = \frac{\cos(i - \beta)}{\cos i \cdot \cos\beta} \cdot \frac{\sin(\phi' - \theta)}{\cos\phi' \cdot \cos\theta} \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\begin{cases} A_2 = -\frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos\phi'} \\ B_2 = \frac{-\cos(i + \beta + \delta + \phi')}{\cos i \cdot \cos\phi'} \\ C_2 = \frac{\cos(\beta + \delta + \phi') \cdot \tan i}{\cos\phi'} \end{cases} \quad (4.13)$$

Essi si riferiscono alle condizioni di equilibrio del cuneo di terreno e dipendono esclusivamente dalla geometria del terrapieno (i , β), dall'angolo di resistenza al taglio ϕ' del terreno che lo costituisce, dall'angolo di attrito muro-terreno δ e dal parametro θ definito dalla (4.1).

Il muro è in equilibrio sotto l'azione del proprio peso W_w e delle corrispondenti azioni inerziali $k_h \cdot W_w$ e $k_v \cdot W_w$, dell'azione mutua $S_{ae}(\alpha)$ e, infine, delle azioni N_b e T_b che si mobilitano alla base della fondazione del muro (Fig. 4.1). In condizioni di equilibrio limite ($k_h = k_{h,c}$, $k_v = k_{v,c}$), la resistenza allo scorrimento lungo il piano di posa della fondazione è interamente mobilitata e l'equilibrio del muro è descritto dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} N_b = W_w \cdot (1 \pm k_v) + S_{ae}(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) \\ T_b = W_w \cdot k_h + S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) \\ T_b = T_{lim,b} = N_b \cdot \tan\phi_b \end{cases} \quad (4.14)$$

Dove $S_{ae}(\alpha)$ è già stata definita dalle equazioni 4.10 e 4.11, mentre W_w rappresenta il peso dell'opera.

Esplicitando tutto in funzione di $\tan \alpha$, dopo le opportune semplificazioni e sostituzioni, il sistema di equazioni descritto dalla (4.14), può essere riscritto con la seguente equazione:

$$\tan\theta_c(\alpha) = \frac{k_{h,c}(\alpha)}{1 - \Omega \cdot k_{h,c}(\alpha)} = \frac{A_3 \cdot (\tan\alpha)^2 + B_3 \cdot \tan\alpha + C_3}{A_4 \cdot (\tan\alpha)^2 + B_4 \cdot \tan\alpha + C_4} = \frac{\Psi_1(\alpha)}{\Psi_2(\alpha)} \quad (4.15)$$

che descrive in forma adimensionale, la condizione di equilibrio limite del muro;

I coefficienti A_3 , B_3 , C_3 e A_4 , B_4 , C_4 , relativi al parametro θ_c , sono definiti dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} A_3 = -\frac{\cos(\varphi_b + \beta + \delta)}{\cos \varphi_b} \cdot [-\tan \beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)] - \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \tan \varphi_b \cdot \Gamma \\ B_3 = \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} \cdot (1 - \tan \beta \cdot \tan \phi') \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta) - \frac{\cos(i + \beta + \delta + \phi')}{\cos i \cdot \cos \phi'} \cdot \Gamma \cdot \tan \varphi_b \\ C_3 = -\frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} \cdot [1 + \tan i \cdot \tan \beta] \cdot \tan \phi' + \frac{\cos(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \tan i \cdot \Gamma \cdot \tan \varphi_b \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} A_4 = \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} \cdot [-\tan \beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)] \cdot \tan \phi' - \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \Gamma \\ B_4 = \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} \cdot [-(\tan \beta + \tan \phi') \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)] - \frac{\cos(i + \beta + \delta + \phi')}{\cos i \cdot \cos \phi'} \cdot \Gamma \\ C_4 = -\frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} \cdot [1 + \tan i \cdot \tan \beta] + \frac{\cos(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \tan i \cdot \Gamma \end{cases} \quad (4.17)$$

Essi si riferiscono alle condizioni di equilibrio limite del muro e, oltre che da i , β , ϕ' , δ , θ , dipendono, anche, dal peso normalizzato Γ del muro, dal rapporto Ω e dall'angolo di attrito terreno-fondazione φ_b .

Le equazioni 4.8 e 4.14 costituiscono un sistema di sei equazioni nelle sei incognite N , T , N_b , T_b , S_{ae} e $k_{h,c}$. Procedendo per sostituzione è possibile mostrare che tale sistema può essere ricondotto al sistema costituito dalle 4.11 e 4.15 nelle due incognite $K_{ae}(\alpha)$ e $\tan \theta_c$:

$$\begin{cases} K_{ae}(\alpha) = \frac{A_1 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_1 \cdot \tan \alpha + C_1}{A_2 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_2 \cdot \tan \alpha + C_2} = \frac{\Phi_1(\alpha)}{\Phi_2(\alpha)} \\ \tan \theta_c(\alpha) = \frac{k_{h,c}(\alpha)}{1 - \Omega \cdot k_{h,c}(\alpha)} = \frac{A_3 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_3 \cdot \tan \alpha + C_3}{A_4 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_4 \cdot \tan \alpha + C_4} = \frac{\Psi_1(\alpha)}{\Psi_2(\alpha)} \end{cases} \quad (4.18)$$

In cui θ_c è il valore di θ calcolato per $k_h = k_{h,c}$ e $k_v = \Omega \cdot k_{h,c}$ mentre K_{ae} è un coefficiente di spinta attiva per le condizioni sismiche che definisce la spinta attiva S_{ae} dovuta al peso proprio del terreno.

Ciascuna delle eq. 4.18 descrive, in forma adimensionale, le condizioni di equilibrio limite del cuneo di terreno e del muro, e pertanto la loro simultanea risoluzione individua la coppia θ_c , K_{ae} che descrive la soluzione cercata.

Al variare dei coefficienti K_{ae} e $\tan \theta_c$ esisteranno ∞^4 soluzioni che soddisfano il sistema descritto dalle equazioni 4.18; il problema in altri termini risulta indeterminato, sarà pertanto indispensabile determinare l'ulteriore condizione complementare che consente di giungere ad una soluzione univoca.

Introducendo le posizioni:

$$\begin{aligned} \Phi_1(\alpha) &= A_1 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_1 \cdot \tan \alpha + C_1 \\ \Phi_2(\alpha) &= A_2 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_2 \cdot \tan \alpha + C_2 \end{aligned} \quad (4.19)$$

$$\begin{aligned}\Psi_1(\alpha) &= A_3 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_3 \cdot \tan \alpha + C_3 \\ \Psi_2(\alpha) &= A_4 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_4 \cdot \tan \alpha + C_4\end{aligned}\quad (4.20)$$

che definiscono, tutte, funzioni paraboliche della variabile $\tan \alpha$ il sistema di eq. 4.18 può essere riscritto nella forma sintetica:

$$\begin{cases} \Phi_3(\alpha, K_{ae}) = \Phi_2(\alpha) \cdot K_{ae}(\alpha) - \Phi_1(\alpha) = 0 \\ \Psi_3(\alpha, \theta_c) = \Psi_2(\alpha) \cdot \tan \theta_c(\alpha) - \Psi_1(\alpha) = 0 \end{cases}\quad (4.21)$$

$$\begin{cases} \tan^2 \alpha \cdot (A_2 \cdot K_{ae} - A_1) + \tan \alpha \cdot (B_2 \cdot K_{ae} - B_1) + (C_2 \cdot K_{ae} - C_1) = 0 \\ \tan^2 \alpha \cdot (A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3) + \tan \alpha \cdot (B_4 \cdot \tan \theta_c - B_3) + (C_4 \cdot \tan \theta_c - C_3) = 0 \end{cases}$$

Il sistema di equazioni 4.21 introduce le funzioni Φ_3 e Ψ_3 per le quali il luogo dei punti di nullo descrive, rispettivamente, le condizioni di equilibrio limite del cuneo di terreno ($\Phi_3=0$) e del muro ($\Psi_3=0$). Le funzioni Φ_3 e Ψ_3 in quanto combinazioni lineari delle funzioni Φ_1 , Φ_2 e Ψ_1 , Ψ_2 , sono anch'esse parabole nella variabile $\tan \alpha$ e risultano funzioni parametriche, rispettivamente, in K_{ae} e $\tan \theta_c$.

La ricerca della soluzione può essere condotta facendo variare l'angolo α e ricercandone il valore per cui K_{ae} attinge ad un massimo e θ_c attinge ad un minimo.

La Figura 4.3 mostra schematicamente questo procedimento con riferimento al caso descritto dai parametri mostrati nei seguenti prospetti:

parametri geotecnici:

$$\phi' = 40^\circ, \quad \delta/\phi' = 2/3, \quad \varphi_b/\phi' = 2/3 \quad (4.22)$$

parametri sismici:

$$\theta = 14^\circ, 25, \quad \Omega = 0, \quad \Omega = -1/2, \quad \Omega = +1/2 \quad (4.23)$$

Parametri geometrici:

$$\beta = i = 0^\circ, \quad \Gamma = 1 \quad (4.24)$$

Per la determinazione della soluzione si procede con il seguente schema:

- fissiamo le condizioni geometriche e geotecniche del sistema preso in esame;
- facendo variare l'angolo α si determina il valore che minimizza il coefficiente di accelerazione critica $k_{h,c}$;
- si determina il corrispondente valore di θ utilizzando l'equazione 4.1;

- determinato il valore di θ , si fa variare l'angolo α in modo da ottenere il massimo valore di K_{ae} associato al minimo valore di $k_{h,c}$.

Così facendo si determina il massimo valore del coefficiente di spinta attiva associato al minimo valore del coefficiente di accelerazione critica del sistema.

Ciascuna delle curve mostrate in Figura 4.3 presenta concavità verso l'alto, nel caso della funzione $K_{ae}(\alpha)$, e verso il basso, nel caso della funzione $k_{h,c}(\alpha)$; in corrispondenza di un particolare valore α_c dell'angolo α , per ogni coppia di curve rappresentate può essere individuato un punto di massimo, nel caso della funzione K_{ae} , e un punto di minimo, nel caso della funzione $k_{h,c}(\alpha)$.

Le proprietà analitiche delle funzioni $K_{ae}(\alpha)$ e $k_{h,c}(\alpha)$, appena descritte con riferimento ad un caso particolare, possono, in realtà, essere generalizzate. Utilizzando, infatti, le eqq. (4.12), (4.13), (4.16) e (4.17) è possibile mostrare che le condizioni di equilibrio limite del cuneo e del muro (descritte rispettivamente dalle condizioni $\Phi_3=0$ e $\Psi_3=0$), descrivono coniche parametriche che rappresentano, sempre, parabole con concavità verso il basso, nel caso della funzione Φ_3 e verso l'alto nel caso della funzione Ψ_3 .

Una dettagliata dimostrazione di tali proprietà è riportata dell'appendice 4A di questo capitolo.

Tale risultato è in accordo con l'obiettivo del problema in esame, che, nello spirito del metodo dell'equilibrio limite, consiste nella ricerca di un valore di massimo (la spinta attiva S_{ae} , ovvero il coefficiente di spinta attiva K_{ae}) relativo alle condizioni di equilibrio limite del cuneo di terreno (condizione $\Phi_3=0$) e nella ricerca di un valore di minimo (la componente orizzontale del coefficiente sismico critico $k_{h,c}$ ovvero il parametro θ_c) relativo alle condizioni di equilibrio limite del muro (condizione $\Psi_3=0$).

Il procedimento descritto in Figura 4.3 fornisce l'ulteriore condizione a cui deve sottostare la soluzione del problema: l'angolo di rottura effettivamente mobilitato è quello a cui corrisponde il minor valore del coefficiente di accelerazione e dunque la minima accelerazione di soglia. Da un punto di vista analitico tutto ciò si traduce nel determinare dal sistema di eq. 4.18 l'angolo α che minimizza il coefficiente di accelerazione critica e massimizza quello relativo alla spinta attiva.

Individuate le proprietà delle funzioni Φ_3 e Ψ_3 , la determinazione della coppia K_{ae} , θ_c , che rappresenta la soluzione del problema, può ottenersi considerando che la condizione di massimo, relativa al calcolo della spinta attiva, e la condizione di minimo, relativa al calcolo del coefficiente sismico critico, corrispondono, rispettivamente, all'annullamento dei discriminanti Δ_Φ e Δ_Ψ delle funzioni Φ_3 e Ψ_3 descritte dalle eq.(4.21).

La soluzione ricercata, ovvero la coppia K_{ae} , θ_c , è quindi la soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \Delta_\Phi = \Delta[\Phi_3(\alpha_c, K_{ae})] = 0 \\ \Delta_\Psi = \Delta[\Psi_3(\alpha_c, \theta_c)] = 0 \end{cases} \quad (4.25)$$

Che, utilizzando le eq. 4.19, eq. 4.20, eq. 4.21 può essere scritto nella forma:

$$\begin{aligned} [B_2 \cdot K_{ae} - B_1]^2 - 4 \cdot [A_2 \cdot K_{ae} - A_1] \cdot [C_2 \cdot K_{ae} - C_1] &= 0 \\ [B_4 \cdot \tan \theta_c - B_3]^2 - 4 \cdot [A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3] \cdot [C_4 \cdot \tan \theta_c - C_3] &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Il particolare valore α_c che individua il cuneo critico, può, invece, essere determinato considerando che, nella rappresentazione di Figura 4.3, il valore $\tan \alpha_c$ rappresenta l'ascissa dei vertici delle parabole descritte dalle eq.(4.21); l'angolo α_c è, quindi, definito dalle relazioni:

$$\tan \alpha_c = \frac{B_3 - B_4 \cdot \tan \theta_c}{2 \cdot (A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3)} \quad (4.27)$$

$$\tan \alpha_c = \frac{B_1 - B_2 \cdot K_{ae}}{2 \cdot (A_2 \cdot K_{ae} - A_1)} \quad (4.28)$$

La dipendenza di α_c da θ_c (eq.4.27) è dovuta alla particolare condizione critica, infatti il valore di α_c calcolato con la 4.28 è identico al valore di α_c calcolato con la 4.27, solo perché si fa riferimento alla condizione critica, e quindi il valore di K_{ae} presenta nella 4.28 è determinato per la particolare condizione di $\theta = \theta_c$. In tutti gli altri casi il valore dell'angolo determinato con la 4.27 non coincide con quello determinato con la 4.28.

Ciascuna delle eq. (4.26) rappresenta un'equazione di secondo grado nelle variabili K_{ae} o $\tan \theta_c$ di facile risoluzione.

Le eq. (4.26) possono essere riscritte nella forma:

$$\begin{aligned} K_{ae}^2 \cdot (B_2^2 - 4A_2C_2) + 2 \cdot K_{ae} \cdot (2C_1A_2 - B_1B_2 + 2A_1C_2) + (B_1^2 - 4A_1C_1) &= 0 \\ \tan^2 \theta_c \cdot (B_4^2 - 4A_4C_4) + 2 \cdot \tan \theta_c \cdot (2C_3A_4 - B_3B_4 + 2A_3C_4) + (B_3^2 - 4A_3C_3) &= 0 \end{aligned} \quad (4.29)$$

Scartando le soluzioni prive di significato fisico ed effettuando semplici, ma laboriosi, passaggi, è possibile risolvere le eq. (4.26) ottenendo le seguenti espressioni di $\tan \theta_c$ e K_{ae} :

$$\tan \theta_c = \frac{-2C_3A_4 + B_3B_4 - 2A_3C_4 + \sqrt{(2C_3A_4 - B_3B_4 + 2A_3C_4)^2 - (B_3^2 - 4A_3C_3) \cdot (B_4^2 - 4A_4C_4)}}{B_4^2 - 4A_4C_4} \quad (4.30)$$

$$K_{ae} = \frac{-2C_1A_2 + B_1B_2 - 2A_1C_2 - \sqrt{(2C_1A_2 - B_1B_2 + 2A_1C_2)^2 - (B_1^2 - 4A_1C_1) \cdot (B_2^2 - 4A_2C_2)}}{B_2^2 - 4A_2C_2} \quad (4.31)$$

dove i coefficienti $A_1, A_2, \dots, C_3, C_4$, sono stati già esplicitati dalle eq. (4.12), (4.13), (4.16) e (4.17).

In particolare per l'eq. (4.31) sostituendo i coefficienti da $A_1, A_2, \dots, C_1$ e C_2 , con le espressioni (4.12) e (4.13) e utilizzando il procedimento descritto in dettaglio nell'appendice 4B di questo capitolo, è possibile ottenere la classica forma analitica del coefficiente di spinta nota come soluzione di Mononobe & Okabe:

$$K_{ae} = \frac{\cos^2(\beta + \theta - \phi')}{\cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos(\delta + \beta + \theta) \cdot \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi' - i - \theta) \cdot \sin(\delta + \phi')}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)}} \right]^2} \quad (4.32)$$

L'eq.(4.30) insieme alle relazioni che legano k_h , θ e Ω eq.(4.1) (4.2) e (4.3), consente, per un dato valore di Ω , la determinazione della componente orizzontale $k_{h,c}$ del coefficiente sismico critico mediante una soluzione in forma chiusa:

$$k_{h,c} = \frac{\tan \theta_c}{1 + \Omega \cdot \tan \theta_c} \quad (4.33)$$

Le soluzioni ricavate sono applicabili solo in condizioni dinamiche; diversamente per determinare i requisiti minimi del sistema affinché si assista al raggiungimento delle condizioni limite anche in campo statico, è necessario considerare il sistema di eq (4.14) considerando però nullo il valore di $k_{h,c}$.

In tal modo si ottiene:

$$\begin{cases} N_b = W_w + S_a(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) \\ T_b = S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) \\ T_b = T_{lim,b} = N_b \cdot \tan \phi_b \end{cases} \quad (4.34)$$

in cui:

$$S_a = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot K_a \quad (4.35)$$

S_a è il modulo della spinta attiva in condizioni statiche;

W_w è il valore del peso dell'opera.

considerando il fattore di sicurezza globale alla traslazione lungo il piano di posa:

$$F_s = \frac{F_{stab}}{F_{inst}} \quad (4.36)$$

$$\text{con} \quad \begin{cases} F_{stab} = T_b \\ F_{inst} = S_a \cdot \cos(\delta + \beta) \end{cases} \quad (4.37)$$

si ottiene

$$F_s = \frac{[W_w + S_a \cdot \sin(\delta + \beta)] \tan \varphi_b}{S_a \cdot \cos(\delta + \beta)} \quad (4.38)$$

dividendo tutto per $\frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2$ risulta:

$$F_s = \frac{[\Gamma + K_a \cdot \sin(\delta + \beta)] \tan \varphi_b}{K_a \cdot \cos(\delta + \beta)} \quad (4.39)$$

dove K_a rappresenta il coefficiente di spinta attivo in condizione statiche.

La condizione di equilibrio limite anche in condizioni statiche è rappresentata dal valore unitario del fattore di sicurezza F_s :

$$F_s = 1 = \frac{[\Gamma + K_a \cdot \sin(\delta + \beta)] \tan \varphi_b}{K_a \cdot \cos(\delta + \beta)} \quad (4.40)$$

Risolviendo la (4.40) rispetto a Γ otteniamo il minimo valore Γ_0 del peso normalizzato dell'opera che garantisce la condizione di equilibrio statica.

$$\Gamma_0 = K_a \cdot \left[\frac{\cos(\delta + \beta)}{\tan \varphi_b} - \sin(\delta + \beta) \right] \quad (4.41)$$

Per determinare l'inclinazione del piano di rottura in condizioni statiche è possibile utilizzare le soluzioni definite dalle eq. (4.27) considerando nullo in valore dell'accelerazione critica. ($\theta_c = 0$)

In particolare considerando nulli i valori di β , δ e i nelle eq. (4.12), (4.13) e (4.31) otteniamo:

$$A_1 = 0$$

$$B_1 = -1$$

$$C_1 = \tan \phi'$$

$$A_2 = -\tan \phi'$$

$$B_2 = -1$$

$$C_2 = 0$$

$$K_a = \frac{\cos^2 \phi'}{(1 + \sin \phi')^2}$$

Per cui il valore dell'angolo α_c che rappresenta l'inclinazione del piano di rottura risulta:

$$\tan \alpha_c = \frac{B_1 - B_2 \cdot K_a}{2 \cdot (A_2 \cdot K_a - A_1)} = \frac{-1 + \frac{\cos^2 \phi'}{(1 + \sin \phi')^2}}{-2 \tan \phi' \cdot \frac{\cos^2 \phi'}{(1 + \sin \phi')^2}} = \dots = \dots = \frac{1 + \sin \phi'}{\cos \phi'} \quad (4.42)$$

Ricorrendo alle regole trigonometriche di somma, sottrazione e bisezione il valore definito dalla (4.42) dopo assume la nota forma

$$\frac{1 + \sin \phi'}{\cos \phi'} = \frac{\left(\sin \frac{\phi'}{2} + \cos \frac{\phi'}{2} \right)^2}{\cos^2 \frac{\phi'}{2} - \sin^2 \frac{\phi'}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \frac{\phi'}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \frac{\phi'}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos \frac{\phi'}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin \frac{\phi'}{2}} = \tan \left(45^\circ + \frac{\phi'}{2} \right) \quad (4.43)$$

4.4 Determinazione del coefficiente sismico equivalente

Sempre con riferimento allo schema mostrato in Figura 4.1, indicando con F il margine di sicurezza del muro nei confronti del collasso per traslazione, nella valutazione delle condizioni di equilibrio bisogna prendere in esame il peso proprio W_w e le corrispondenti azioni inerziali $k_h \cdot W_w$ e $k_v \cdot W_w$, l'azione mutua $S_{ae}(\alpha)$ e, infine, le azioni N_b e T_b mobilitate alla base del muro.

Facendo riferimento allo schema di Figura 4.2, nella condizione ($k_h = k_{h,eq}$, $k_v = k_{v,eq}$), la resistenza al taglio del terreno a tergo del muro è interamente mobilitata

$$T_s = T_{s,lim} \quad (4.44)$$

mentre la resistenza allo scorrimento lungo il piano di posa della fondazione non è interamente mobilitata

$$T_w \neq T_{w,lim} \quad (4.45)$$

Definendo il fattore di sicurezza allo scorrimento come:

$$F = \frac{T_{w,lim}}{T_w} \quad (4.46)$$

il valore della resistenza mobilitata alla base del muro è:

$$T_w = \frac{T_{w,lim}}{F} = \frac{N_w \cdot \tan \phi_b}{F} \quad (4.47)$$

In definitiva l'equilibrio del muro è descritto dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} N_w = W_w \cdot (1 - k_v) + S_{ae}(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) \\ T_w = W_w \cdot k_h + S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) \\ T_w = \frac{T_{w,lim}}{F} = \frac{N_w \cdot \tan \varphi_b}{F} \end{cases} \quad (4.48)$$

Introducendo il valore equivalente dell'angolo di attrito base fondazione – terreno definito dalla relazione:

$$\varphi_{b,eq} = \arctan\left(\frac{\tan \varphi_b}{F}\right) \quad (4.49)$$

il sistema che governa l'equilibrio del muro si può riscrivere nella forma:

$$\begin{cases} N_w = W_w \cdot (1 - k_v) + S_{ae}(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) \\ T_w = W_w \cdot k_h + S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) \\ T_w = N_w \cdot \tan \varphi_{b,eq} \end{cases} \quad (4.50)$$

Come si può notare il sistema di equazioni è del tutto analogo a quello mostrato nell'eq. (4.14), a meno di sostituire φ_b con $\varphi_{b,eq}$ con gli stessi ragionamenti descritti nel paragrafo 4.3 si perviene alla seguente espressione in forma chiusa del coefficiente sismico equivalente definito dalla seguente relazione:

$$\tan \theta_{eq} = \frac{-2C_3A_4 + B_3B_4 - 2A_3C_4 + \sqrt{(2C_3A_4 - B_3B_4 + 2A_3C_4)^2 - (B_3^2 - 4A_3C_3) \cdot (B_4^2 - 4A_4C_4)}}{B_4^2 - 4A_4C_4} \quad (4.51)$$

in cui i coefficienti $A_3, A_4, \dots, C_3$ e C_4 sono funzioni dell'angolo $\varphi_{b,eq}$ definito dall'eq. (4.49)

$$\begin{cases} A_3 = -\frac{\cos(\varphi_{b,eq} + \beta + \delta)}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot [-\tan \beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)] - \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \tan \varphi_{b,eq} \cdot \Gamma \\ B_3 = \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_{b,eq})}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot (1 - \tan \beta \cdot \tan \phi') \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta) - \frac{\cos(i + \beta + \delta + \phi')}{\cos i \cdot \cos \phi'} \cdot \Gamma \cdot \tan \varphi_{b,eq} \\ C_3 = -\frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_{b,eq})}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot [1 + \tan i \cdot \tan \beta] \cdot \tan \phi' + \frac{\cos(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \tan i \cdot \Gamma \cdot \tan \varphi_{b,eq} \end{cases} \quad (4.52)$$

$$\begin{cases} A_4 = \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_{b,eq})}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot [-\tan \beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)] \cdot \tan \phi' - \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \Gamma \\ B_4 = \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_{b,eq})}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot [-(\tan \beta + \tan \phi') \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)] - \frac{\cos(i + \beta + \delta + \phi')}{\cos i \cdot \cos \phi'} \cdot \Gamma \\ C_4 = -\frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_{b,eq})}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot [1 + \tan i \cdot \tan \beta] + \frac{\cos(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \tan i \cdot \Gamma \end{cases} \quad (4.53)$$

4.5 Analisi parametrica

In questo paragrafo, note le espressioni del coefficiente sismico critico (eq. 4.30) e dell'angolo critico di rottura del cuneo (eq. 4.27), è stata effettuata un'analisi parametrica per analizzare gli effetti di alcuni fattori geometrici e di alcuni parametri geotecnici sulle soluzioni determinate.

Le analisi sono state realizzate facendo variare il valore del peso normalizzato

$$\Gamma = \frac{2 \cdot W_w}{\gamma \cdot H^2} \quad (4.54)$$

da un valore minimo pari a 0,6 ad un valore massimo pari a 1,6

Dove si è indicato con:

- W_w peso dell'opera di sostegno;
- γ peso dell'unità di volume di terreno;
- H altezza dell'opera di sostegno;

Le analisi sono state condotte:

- per $\phi' = 30^\circ, 35^\circ$ e 40° assumendo sempre $\delta/\phi' = \phi_b/\phi' = 2/3$ e $i=\beta=0$;
- per $\phi' = 30^\circ$, $\phi_b/\phi' = 1, 2/3$ e $1/2$ assumendo sempre $\delta/\phi' = 2/3$ $i=\beta=0$.

Infine in tutti i casi si è assunto $\Omega=0$ e $\Omega=\pm 1/2$.

È stata analizzata contemporaneamente sia la variazione del coefficiente sismico critico che il valore del corrispondente angolo che individua il cuneo di rottura ad esso associato.

I risultati ottenuti dall'analisi sono mostrati nelle Fig. da 4.4 a 4.7.

Come si osserva dalle Figure da 4.4 a 4.7 all'aumentare del peso normalizzato del muro si evince:

- un aumento del valore del coefficiente sismico critico;
- una diminuzione del valore dell'angolo del cuneo ad esso associato.

Ciò indica un aumento del volume di terreno coinvolto nel cinematisma di collasso in accordo con il crescente valore di $k_{h,c}$. In tutti i casi l'effetto del parametro Ω si risente maggiormente per elevati valori di $k_{h,c}$ ovvero per sistemi molto stabili.

Infine nella Figura 4.7 si è redatto un diagramma riepilogativo che tiene conto dei precedenti diagrammi realizzati, osservando che sia all'aumentare dell'angolo di attrito interno del

terreno (ϕ') che l'angolo di attrito alla base della fondazione (ϕ_b) si ottengono coefficienti sismici critici più elevati e quindi muri più stabili.

La Figura 4.7 mostra un confronto tra i valori di $k_{h,c}$ determinati per i tre valori di ϕ' presi in esame nell'analisi insieme ad un confronto dei corrispondenti valori dell'angolo α che definisce il cuneo critico.

I diagrammi evidenziano il valore di Γ_0 del peso normalizzato del muro in corrispondenza del quale il sistema è in equilibrio limite statico. I valori di Γ_0 individuano il punto di nullo del diagramma che fornisce i valori di $k_{h,c}$ e contestualmente il valore di α_0 dell'angolo che individua la condizione di collasso statico per un sistema avente peso normalizzato pari a Γ_0 .

Appendice 4A - Dimostrazione analitica delle proprietà delle funzioni Φ_3 e Ψ_3

4A.1 – Proprietà della funzione Φ_3

Si considerino i coefficienti A_1 e A_2 forniti dalle eqq. (4.12) e (4.13):

$$\begin{aligned} A_1 &= -\tan \beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta) \cdot (1 + \tan \theta \cdot \tan \phi') \\ A_2 &= -\frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \end{aligned} \quad (4A1.55)$$

Deve certamente risultare $K_{ae} > 0$ perché altrimenti la soluzione non avrebbe significato.

L'eq. (4.21) fornisce:

$$\Phi_3(\alpha, K_{ae}) = \tan^2 \alpha \cdot (A_2 \cdot K_{ae} - A_1) + \tan \alpha \cdot (B_2 \cdot K_{ae} - B_1) + (C_2 \cdot K_{ae} - C_1) = 0 \quad (4A1.56)$$

che descrive l'equazione, parametrica in K_{ae} , di una parabola nella variabile $\tan \alpha$.

Tale parabola ha sempre una concavità rivolta verso il basso, infatti risulta sempre:

$$(A_2 \cdot K_{ae} - A_1) < 0 \quad (4A1.57)$$

La condizione descritta dall'eq. (4A1.57) può essere dimostrata ragionando per assurdo.

Ipotizziamo per assurdo che risulti:

$$(A_2 \cdot K_{ae} - A_1) > 0 \quad (4A1.58)$$

per il caso:

$$\begin{aligned} \beta = \delta = 0 \quad \text{risulta:} \quad A_1 &= 0 \\ A_2 &= -\tan \phi' < 0 \end{aligned} \quad (4A1.59)$$

Quindi la (4A1.58) fornirebbe:

$$-\tan \phi' \cdot K_{ae} > 0 \quad (4A1.60)$$

quest'ultima disequaglianza è un assurdo perché:

- K_{ae} è sempre positivo per ipotesi;
- $(-\tan \phi')$ è sempre negativo perché per ipotesi è sempre $\phi' > 0$.

Considerando il fatto che il paramento interno del muro è quasi sempre verticale ipotizziamo che:

$$\beta = 0 \quad (4A1.61)$$

mentre i valori di dell'angolo di attrito muro terreno, dell'estradosso del terrapieno e dell'angolo θ siano diversi da zero.

$$\delta \neq i \neq \theta \neq 0 \quad (4A1.62)$$

In particolare il valore dell'angolo interfaccia muro terreno al massimo può valere:

$$\delta = \phi' \quad (4A1.63)$$

Sotto queste ipotesi i coefficienti A_1 e A_2 risultano:

$$\begin{aligned} A_1 &= 0 \\ A_2 &= -\frac{\sin 2\phi'}{\cos \phi'} \end{aligned} \quad (4A1.64)$$

Il termine A_2 fornisce sempre valori negativi quindi la (4A1.58) fornirebbe:

$$-K_{ae} > 0$$

quest'ultima disuguaglianza è un assurdo perche:

– K_{ae} è sempre positivo per ipotesi;

Quindi resta dimostrato che è sempre:

$$(A_2 \cdot K_{ae} - A_1) < 0 \quad (4A1.65)$$

4A.2 – Proprietà della funzione Ψ_3

Per un sistema stabile staticamente si considerino i coefficienti A_3 e A_4 forniti dalle eqq. (4.16) e (4.17):

$$\begin{aligned} A_3 &= -\frac{\cos(\varphi_b + \beta + \delta)}{\cos \varphi_b} \cdot [-\tan \beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)] - \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \tan \varphi_b \cdot \Gamma \\ A_4 &= \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} \cdot [-\tan \beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)] \cdot \tan \phi' - \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \Gamma \end{aligned} \quad (4A2.66)$$

Deve certamente risultare $\tan \theta_c > 0$ perché altrimenti la soluzione non avrebbe significato.

L'eq. (4.21) fornisce:

$$\Psi_3(\alpha, \tan \theta_c) = \tan^2 \alpha \cdot (A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3) + \tan \alpha \cdot (B_4 \cdot \tan \theta_c - B_3) + (C_4 \cdot \tan \theta_c - C_3) = 0 \quad (4B.67)$$

che descrive l'equazione parametrica in $\tan \theta_c$ di una parabola nella variabile $\tan \alpha$.

Tale parabola ha sempre una concavità verso l'alto, infatti risulta sempre:

$$(A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3) > 0 \quad (4A2.68)$$

La condizione descritta dall'eq. (4A2.68) può essere dimostrata ragionando per assurdo.

Ipotizzando, per assurdo, che risulti:

$$(A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3) < 0 \quad (4A2.69)$$

per il caso:

$$\begin{array}{ll} \beta = \delta = 0 & \text{risulta:} \\ & A_3 = -\tan \phi' \cdot \tan \varphi_b \cdot \Gamma \\ & A_4 = -\tan \phi' \cdot \Gamma \end{array} \quad (4A2.70)$$

Per cui la condizione (4A.69) fornisce:

$$-\tan \phi' \cdot \Gamma \cdot \tan \theta_c + \tan \phi' \cdot \tan \varphi_b \cdot \Gamma < 0 \quad (4A2.71)$$

ovvero:

$$\tan \phi' \cdot \Gamma \cdot (\tan \varphi_b - \tan \theta_c) < 0 \quad (4A2.72)$$

Il termine $\tan \phi' \cdot \Gamma$ è sempre positivo perché prodotto di quantità positive; deve risultare quindi:

$$\tan \varphi_b < \tan \theta_c \quad (4A2.73)$$

Questa disuguaglianza è un assurdo.

Infatti considerando il valore del coefficiente sismico critico fornito dall'approccio RE (eq. 3.9):

$$\tan \theta = \frac{k_{h,c}}{1 - \Omega \cdot k_{h,c}} = \tan \varphi_b + \frac{K_{ae}}{\Gamma} \cdot [\tan \varphi_b \cdot \sin(\delta + \beta) - \cos(\delta + \beta)] \quad (4A2.74)$$

e assumendo nulli i valori di δ e β risulta:

$$\tan \theta = \tan \varphi_b - \frac{K_{ae}}{\Gamma} \quad (4A2.75)$$

Poiché:

- K_{ae} è sempre positivo per ipotesi;
- Γ è sempre positivo per ipotesi;

risulta:

$$\tan \varphi_b - \frac{K_{ae}}{\Gamma} < \tan \varphi_b \quad (4A2.76)$$

quindi risulta:

$$\tan \theta < \tan \varphi_b \quad (4A2.77)$$

Resta quindi dimostrato che la relazione fornita dalla 4A2.69 è un assurdo; analogo discorso se ipotizziamo $\beta=0$ e $\delta=\phi'=\varphi_b$. Vedasi dimostrazioni capitolo quinto, appendice 5A2.

Considerando il fatto che il paramento interno del muro è quasi sempre verticale ipotizziamo:

$$\beta = 0 \quad (4A2.78)$$

mentre assumiamo che i valori di dell'angolo di interfaccia muro terreno e dell'estradosso del terrapieno siano diversi da zero.

$$\delta \neq i \neq 0 \quad (4A2.79)$$

Sotto queste ipotesi i coefficienti A_3 e A_4 risultano:

$$\begin{aligned} A_3 &= -\frac{\sin 2 \cdot \varphi_b}{\cos \varphi_b} \cdot \tan \varphi_b \cdot \Gamma \\ A_4 &= -\frac{\sin 2 \varphi_b}{\cos \varphi_b} \cdot \Gamma \end{aligned} \quad (4A2.80)$$

Poiché:

$$\frac{\sin 2 \varphi_b}{\cos \varphi_b} \quad (4A2.81)$$

fornisce sempre un valore positivo risulta ancora:

$$\begin{aligned} A_3 &= -\tan \varphi_b \cdot \Gamma \\ A_4 &= -\Gamma \end{aligned} \quad (4A2.82)$$

Quindi:

$$-\Gamma \cdot \tan \theta + \Gamma \cdot \tan \varphi_b < 0 \quad (4A2.83)$$

Semplificando si ottiene:

$$\tan \varphi_b - \tan \theta < 0 \quad (4A2.84)$$

ovvero:

$$\tan \varphi_b < \tan \theta \quad (4A2.85)$$

Questa disuguaglianza è un assurdo in riferimento alle considerazioni sopra esposte (eq. 4A2.77) in merito alla relazione ricavata da RE riguardo al coefficiente sismico critico.

Quindi resta dimostrato che è sempre:

$$(A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3) > 0 \quad (4A2.86)$$

Appendice 4B – Determinazione analitica della relazione di Mononobe - Okabe

L'equazione (4.31):

$$K_{ae} = \frac{-2C_1A_2 + B_1B_2 - 2A_1C_2 - \sqrt{(2C_1A_2 - B_1B_2 + 2A_1C_2)^2 - (B_1^2 - 4A_1C_1) \cdot (B_2^2 - 4A_2C_2)}}{B_2^2 - 4A_2C_2} \quad (4B.87)$$

può essere riscritta nella seguente forma:

$$K_{ae} = \frac{a - \sqrt{b}}{c} \quad (4B.88)$$

dove:

$$\begin{aligned} a &= -2C_1A_2 + B_1B_2 - 2A_1C_2 \\ b &= (2C_1A_2 - B_1B_2 + 2A_1C_2)^2 - (B_1^2 - 4A_1C_1) \cdot (B_2^2 - 4A_2C_2) \\ c &= B_2^2 - 4A_2C_2 \end{aligned} \quad (4B.89)$$

Utilizzando le espressioni dei coefficienti A_1 , B_1 , C_1 e A_2 , B_2 , C_2 forniti dalle eqq. (4.12) e (4.13) si ottiene:

$$a = \cos(i - \beta) \cdot [\cos(i - 2 \cdot \beta - \delta - \theta) + 2 \cdot \cos(i + \delta + \theta) - \cos(i - \delta + \theta - 2 \cdot \phi)] \cdot \sec^2 i \cdot \sec^2 \beta \cdot \sec \theta \cdot \sec^2 \phi \quad (4B.90)$$

$$b = -16 \cdot \cos^3(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \sec^4 i \cdot \sec^4 \beta \cdot \sec^2 \theta \cdot \sec^4 \phi \cdot \sin(i + \theta - \phi) \cdot \sin(\delta + \phi) \quad (4B.91)$$

$$c = 2 \cdot \cos^2(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \sec^2 i \cdot \sec^2 \phi \quad (4B.92)$$

Utilizzando l'eq. (4B.88) risulta anche:

$$\sqrt{b} = [4 \cdot \cos(i - \beta) \cdot \sec^2 i \cdot \sec^2 \beta \cdot \sec \theta \cdot \sec^2 \phi] \cdot \sqrt{-\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \sin(i + \theta - \phi) \cdot \sin(\delta + \phi)} \quad (4B.93)$$

L'equazione (4B.80) assume, quindi, la forma

$$K_{ae} = \frac{\left[\cos(i - \beta) \cdot \sec^2 i \cdot \sec^2 \beta \cdot \sec \theta \cdot \sec^2 \phi \right] \cdot \left\{ \left[\cos(i - 2 \cdot \beta - \delta - \theta) + 2 \cdot \cos(i + \delta + \theta) - \cos(i - \delta + \theta - 2 \cdot \phi) \right] - 4 \cdot \sqrt{\frac{-\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)}{\sin(i + \theta - \phi) \cdot \sin(\delta + \phi)}} \right\}}{2 \cdot \cos^2(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \sec^2 i \cdot \sec^2 \phi} \quad (4B.94)$$

Utilizzando le formule di addizione si può scrivere:

$$\begin{aligned} \cos(i - 2 \cdot \beta - \delta - \theta) + \cos(i + \delta + \theta) &= 2 \cdot \cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \\ \cos(i + \delta + \theta) - \cos(i - \delta + \theta - 2 \cdot \phi) &= -2 \cdot \sin(\delta + \phi) \cdot \sin(i + \theta - \phi) \end{aligned} \quad (4B.95)$$

quindi, sostituendo e semplificando, si ottiene:

$$K_{ae} = \frac{\cos(i - \beta) \cdot \sec^2 \beta \cdot \sec \theta \cdot \left[\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) - \sin(\delta + \phi) \cdot \sin(i + \theta - \phi) \right] - 2 \cdot \sqrt{-\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \sin(i + \theta - \phi) \cdot \sin(\delta + \phi)}}{\cos^2(i - \beta - \delta - \phi)} \quad (4B.96)$$

Poiché:

$$-\sin(i + \theta - \phi) = \sin(\phi - i - \theta) \quad (4B.97)$$

possiamo scrivere che:

$$\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) - \sin(\delta + \phi) \cdot \sin(i + \theta - \phi) = \cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) + \sin(\delta + \phi) \cdot \sin(\phi - i - \theta) \quad (4B.98)$$

$$\sqrt{-\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \sin(i + \theta - \phi) \cdot \sin(\delta + \phi)} = \sqrt{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \sin(\phi - i - \theta) \cdot \sin(\delta + \phi)} \quad (4B.99)$$

quindi il valore del coefficiente di spinta si può esprimere come:

$$K_{ae} = \frac{\cos(i - \beta)}{\cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos^2(i - \beta - \delta - \phi)} \cdot \left[\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) + \sin(\delta + \phi) \cdot \sin(\phi - i - \theta) - 2 \cdot \sqrt{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \sin(\phi - i - \theta) \cdot \sin(\delta + \phi)} \right] \quad (4B.100)$$

Ricordando che:

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} - 2 \cdot \sqrt{a \cdot b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \quad (4B.101)$$

si può scrivere:

$$K_{ae} = \frac{\cos(i - \beta)}{\cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos^2(i - \beta - \delta - \phi)} \cdot \left[\sqrt{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)} - \sqrt{\sin(\delta + \phi) \cdot \sin(\phi - i - \theta)} \right]^2 \quad (4B.102)$$

Dividendo tutto per:

$$\sqrt{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)} \quad (4B.103)$$

si ottiene:

$$K_{ae} = \frac{\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)}{\cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos^2(i - \beta - \delta - \phi)} \cdot \left[1 - \sqrt{\frac{\sin(\delta + \phi) \cdot \sin(\phi - i - \theta)}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)}} \right]^2 \quad (4B.104)$$

Al fine di avere il termine sotto radice al denominatore, in accordo con l'espressione di Mononobe & Okabe, si moltiplica tutto per:

$$\sqrt{\frac{\sin(\delta + \phi) \cdot \sin(\phi - i - \theta)}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)}} \quad (4B.105)$$

Si ottiene così:

$$K_{ae} = \frac{\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \left[1 - \frac{\sin(\delta + \phi) \cdot \sin(\phi - i - \theta)}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)} \right]^2}{\cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos^2(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\delta + \phi) \cdot \sin(\phi - i - \theta)}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)}} \right]^2} \quad (4B.106)$$

dopo semplici passaggi si ottiene la seguente espressione:

$$K_{ae} = \frac{[\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) - \sin(\delta + \phi) \cdot \sin(\phi - i - \theta)]^2}{\cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos^2(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\delta + \phi) \cdot \sin(\phi - i - \theta)}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)}} \right]^2} \quad (4B.107)$$

analizzando attentamente il termine seguente:

$$\frac{[\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) - \sin(\delta + \phi) \cdot \sin(\phi - i - \theta)]^2}{\cos^2(i - \beta - \delta - \phi)^2} \quad (4B.108)$$

con l'ausilio del software Mathematica 6.0 si è potuto semplificare tale termine nella seguente espressione

$$\frac{[\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) - \sin(\delta + \phi) \cdot \sin(\phi - i - \theta)]^2}{\cos^2(i - \beta - \delta - \phi)^2} = \cos^2(\beta + \delta - \phi) \quad (4B.109)$$

e quindi in definitiva si ottiene la classica espressione del coefficiente di spinta attiva in presenza di forze sismiche assimilate ad un'azione inerziale di massa, comunemente nota come coefficiente di Mononobe&Okabe:

$$K_{ae}^{MO} = \frac{\cos^2(\beta + \delta - \phi)}{\cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\delta + \phi) \cdot \sin(\phi - i - \theta)}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)}} \right]^2} \quad (4B.110)$$

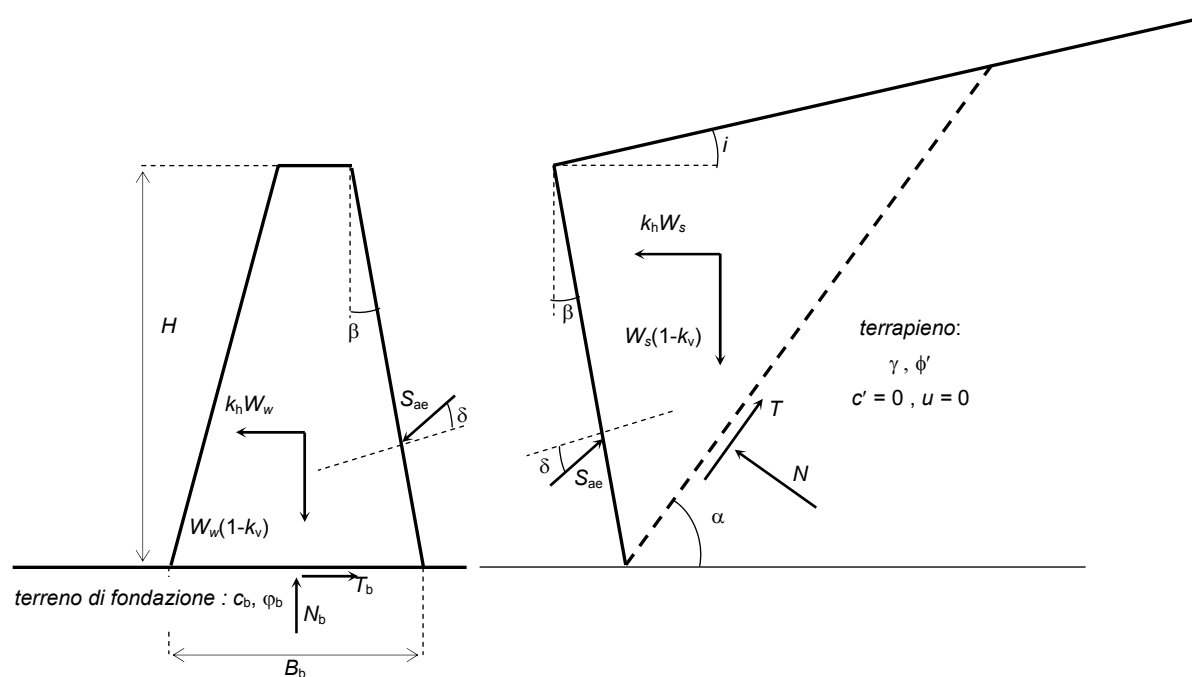


Figura 4.1 – Schema di riferimento adottato per l'analisi MB

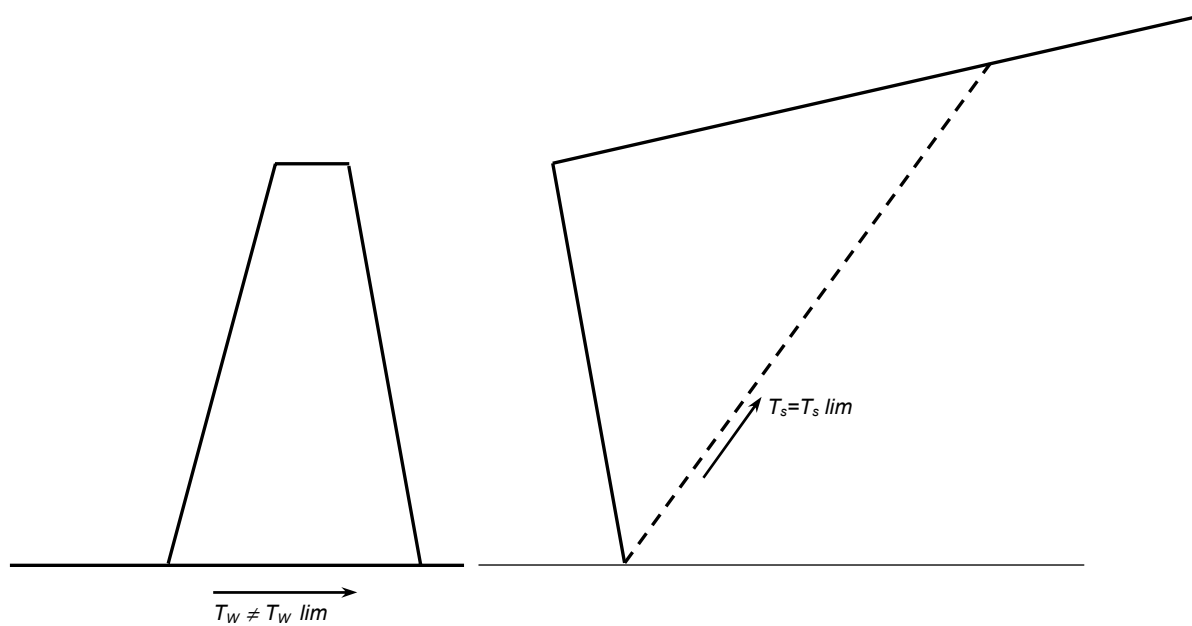
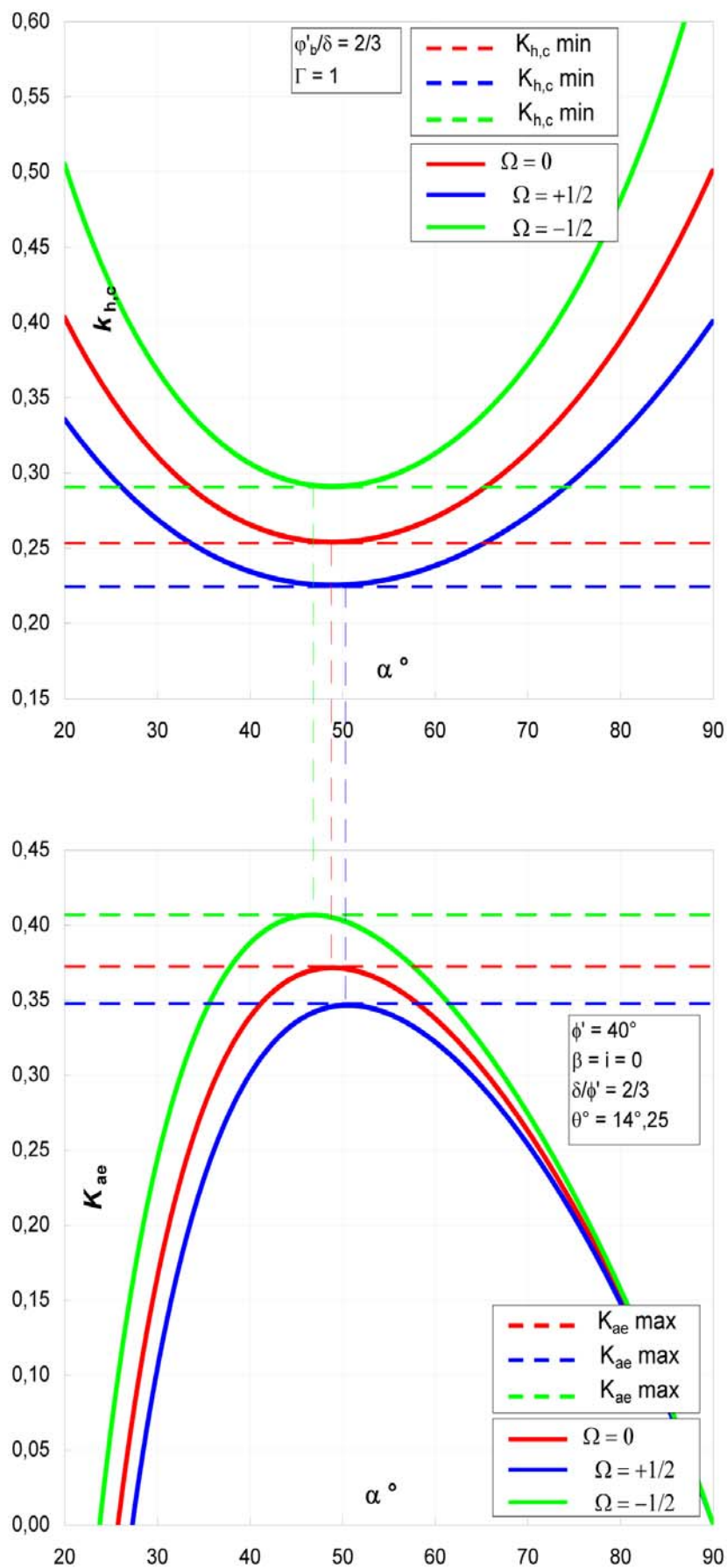


Figura 4.2 – Schema di riferimento per la determinazione del coefficiente sismico equivalente

Figura 4.3 – Variazione di K_{ae} e di $k_{h,c}$ con l'angolo α

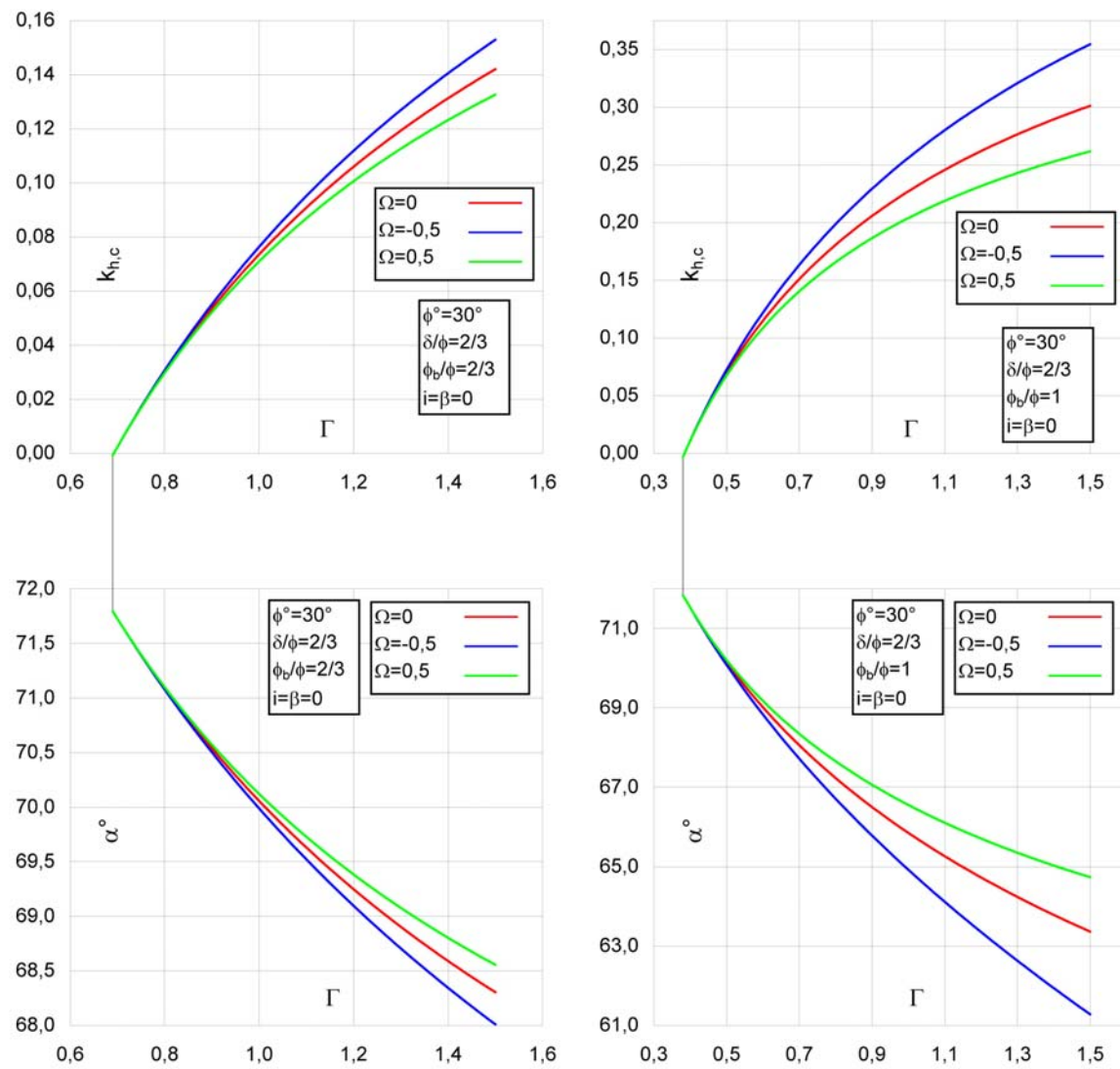


Figura 4.4 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi' = 30^\circ$

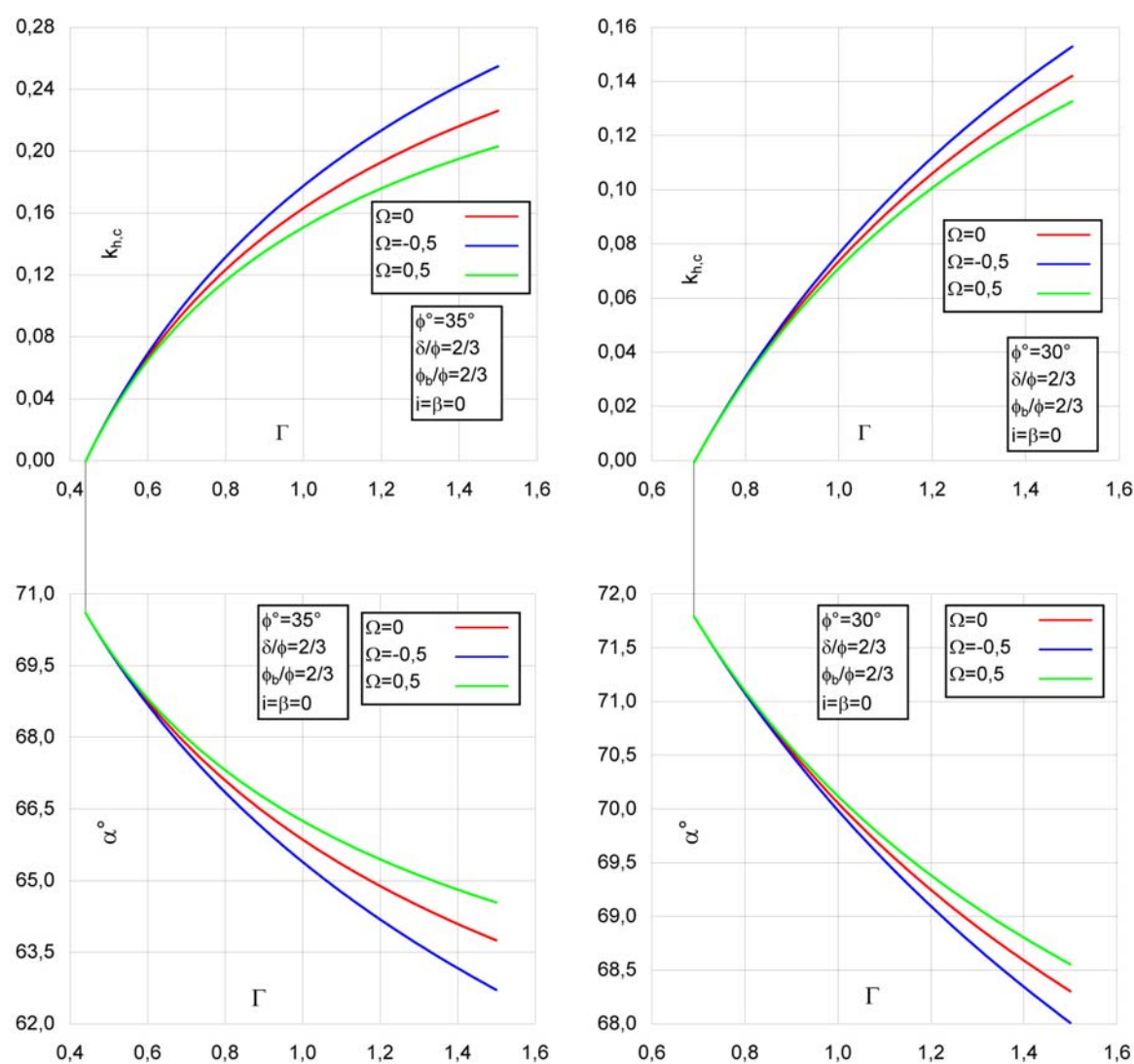


Figura 4.5 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi' = 35^\circ$

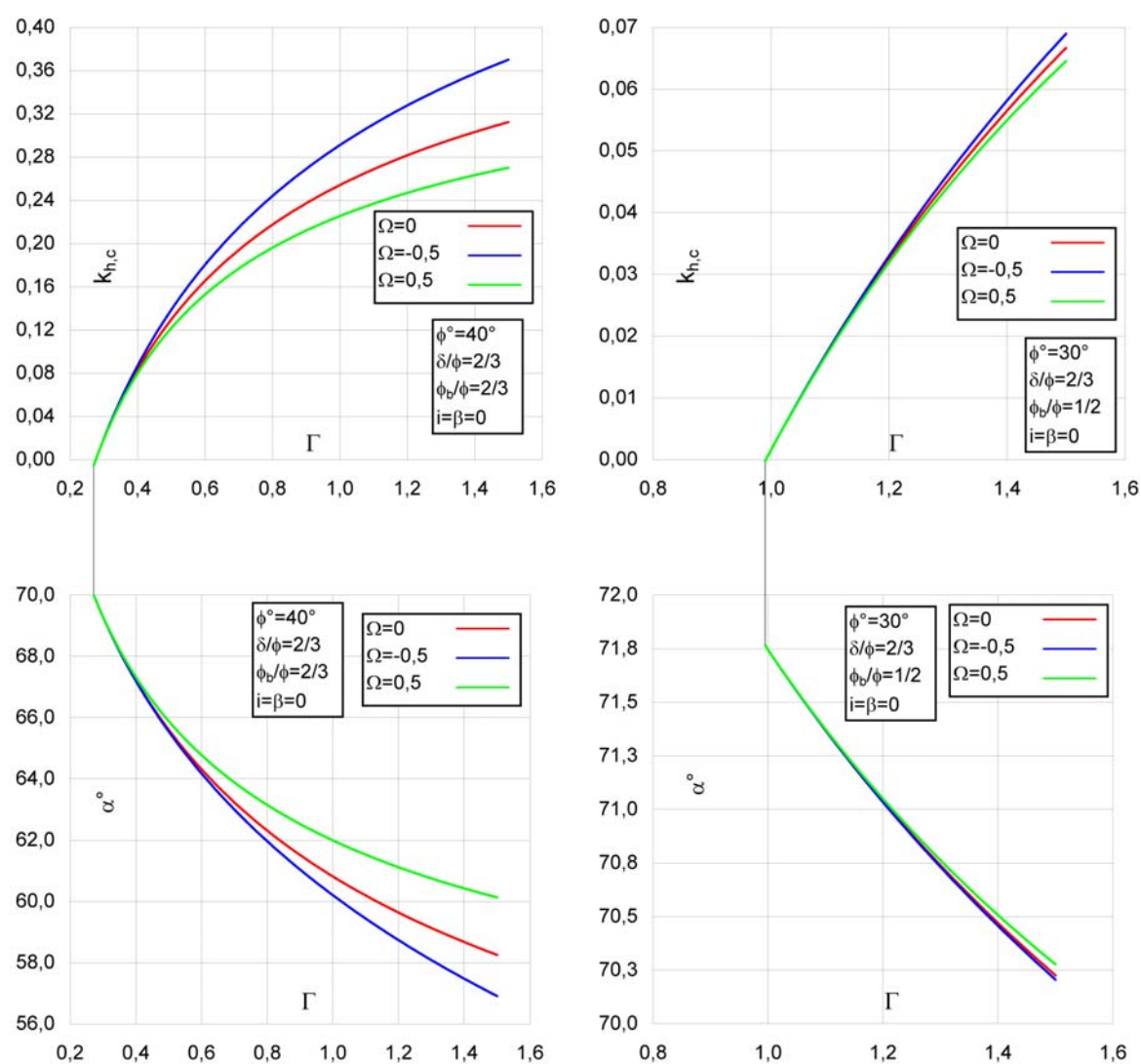
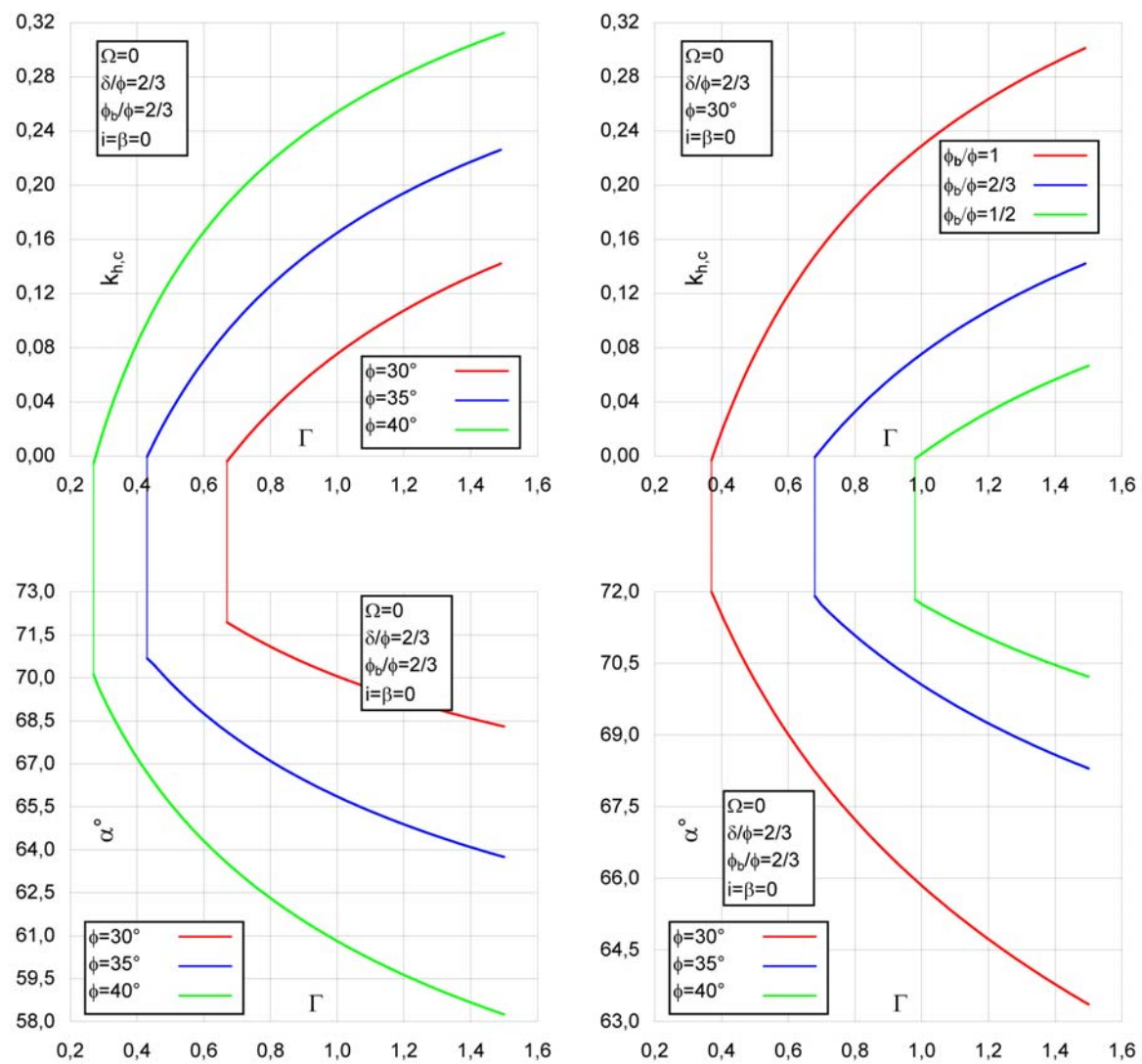


Figura 4.6 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi=40^\circ$


 Figura 4.7 – Confronto tra i valori di $k_{h,c}$ e α forniti dagli abachi di Fig. 4.4, 4.5 e 4.6 per il caso $\Omega=0$

CAPITOLO QUINTO

SCHEMA DI MURO DI SOSTEGNO IN PRESENZA DI UN SOVRACCARICO DISTANZIATO ED ESTESO INDEFINITAMENTE

5.1 Generalità

In questo capitolo sarà esaminato lo schema di muro di sostegno soggetto ad un sovraccarico posto sull'estradosso del terrapieno ad una generica distanza dalla testa del muro. Per tale schema l'approccio multi blocco sarà applicato con riferimento alle notazioni mostrate in Figura 5.1.

La configurazione del sistema, o più genericamente le condizioni al contorno, influiscono sullo schema di equilibrio limite e quindi influenzano le grandezze che individuano le condizioni critiche per l'opera di sostegno, ovvero il coefficiente sismico critico $k_{h,c}$ del sistema e l'inclinazione del piano di rottura all'interno del terrapieno α_c .

5.2 Schema di riferimento

Analogamente a quanto descritto nel capitolo quarto, la procedura proposta in questa sede per la determinazione di $k_{h,c}$ è inquadrabile nell'ambito degli approcci multi blocco (di seguito MB) e fa utilizzo del metodo dell'equilibrio limite. Il sistema muro-terreno preso in esame è mostrato nella Figura 5.1 insieme alle notazioni utilizzate per descrivere le variabili prese in esame nell'analisi. Il terrapieno è supposto asciutto ($u = 0$) e dotato di sola resistenza attritiva ($c' = 0$). La resistenza allo scorrimento alla base del muro è descritta dai parametri c_b e φ_b .

Lo schema prevede la possibile presenza di un sovraccarico q indefinitamente esteso, agente sull'estradosso del terrapieno, a distanza d_q dalla testa del muro. Nell'analisi il sovraccarico q e la distanza d_q sono descritti dai parametri adimensionali n_q e λ , definiti come:

$$n_q = \frac{2 \cdot q}{\gamma \cdot H} \quad (5.1)$$

$$\lambda = \frac{d_q}{H} \quad (5.2)$$

L'azione sismica è considerata agente sul terrapieno, sul sovraccarico su esso agente e sul muro ed è descritta dalle componenti orizzontali k_h e verticale k_v del coefficiente sismico e dai parametri θ e Ω definiti dalle seguenti relazioni:

$$\tan \theta = \frac{k_h}{1 - k_v} \quad (5.3)$$

$$\Omega = \frac{k_v}{k_h} \quad (5.4)$$

θ è correlato ad Ω mediante la relazione:

$$\Omega = \frac{1}{k_h} - \frac{1}{\tan \theta} \quad (5.5)$$

La stabilità del sistema, sia in campo statico che dinamico è affidata esclusivamente al muro di sostegno. La resistenza offerta dall'opera di contenimento ha origine lungo la superficie di contatto suolo – fondazione, ed è diretta costantemente in opposizione al moto generato dalle eccitazioni dinamiche esterne. Tale azione è genericamente indicata come taglio alla base T_b , ed il suo modulo non è costante ma influenzato dall'equilibrio del sistema. Esiste comunque per essa un limite superiore, dipendente sia dal peso del manufatto, che dal coefficiente di attrito alla base del muro ($\tan \varphi_b$), definito a partire dall'angolo di attrito suolo – fondazione φ_b e rappresentativo del vincolo di aderenza osservato in corrispondenza al piano di contatto. Il valore massimo del taglio alla base, comunemente indicato come forza d'attrito, rimane definito dalla seguente relazione:

$$T_{\text{lim},b} = c_b \cdot B_b + W_w \cdot \tan \varphi_b \quad (5.6)$$

in cui B_b è la larghezza della base della fondazione e W_w è il peso del manufatto.

Nella 5.6 trascurando il contributo dovuto alla coesione alla base $c_b=0$ risulta:

$$T_b = T_{\text{lim},b} = W_w \cdot \tan \varphi_b \quad (5.7)$$

Infine l'azione laterale esercitata dal terrapieno sul manufatto è correlata al piano di scorrimento individuato in condizioni plastiche. Il suo modulo rappresenta la risultante orizzontale delle tensioni normali e tangenziali, mobilitate lungo la superficie di rottura. Una delle ipotesi fondamentali, per risolvere il problema, consiste nel supporre che, raggiunta la condizione di equilibrio limite, le tensioni tangenziali, mobilitate lungo la presunta superficie di scorrimento, rispettino la nota relazione:

$$\tau_{\text{lim}} = \sigma_{\text{lim}} \cdot \tan \phi' \quad (5.8)$$

che integrata all'intero piano di rottura diventa:

$$T = N \cdot \tan \phi' \quad (5.9)$$

5.3 Determinazione del coefficiente di spinta attiva e del coefficiente sismico critico

Nello spirito dell'approccio *MB* la soluzione del problema (ovvero i valori di $k_{h,c}$ e di K_{ae}) è ricercata risolvendo simultaneamente le equazioni che descrivono le condizioni di equilibrio del cuneo di spinta (supposto in stato limite attivo) e le equazioni che descrivono le condizioni di equilibrio limite del muro ipotizzando che, per effetto delle azioni instabilizzanti di natura sismica, esso possa traslare lungo il piano di posa della fondazione. Nell'analisi si prende in esame una superficie di potenziale scorrimento del terrapieno piana individuata dall'angolo α che essa forma con l'orizzontale (Fig. 5.1).

Il cuneo di terreno individuato da tale generica superficie è in equilibrio sotto l'azione del proprio peso W_s , delle corrispondenti azioni inerziali $k_h \cdot W_s$ e $k_v \cdot W_s$, della risultante del sovraccarico q (che agisce sulla porzione di terrapieno di estensione l_q) e delle corrispondenti azioni inerziali $k_h \cdot q$ e $k_v \cdot q$, dell'azione mutua $S_{ae}(\alpha)$ che muro e terrapieno si scambiano e, infine, delle azioni N e T risultanti delle tensioni normali e tangenziali mobilitate lungo la superficie di potenziale scorrimento (Fig. 5.1).

Le condizioni di equilibrio limite ($k_h = k_{h,c}$, $k_v = k_{v,c}$) del cuneo di terreno sono descritte dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} W_s \cdot (1 \pm \Omega \cdot k_{h,c}) = S_{ae}(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) + T \cdot \sin(\alpha) + N \cdot \cos(\alpha) - q \cdot l_q \cdot (1 \pm \Omega \cdot k_{h,c}) \\ W_s \cdot k_{h,c} = S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) + T \cdot \cos(\alpha) - N \cdot \sin(\alpha) - q \cdot l_q \cdot k_{h,c} \\ T = T_{\text{lim}} = N \cdot \tan \phi' \end{cases} \quad (5.10)$$

con:

$$W_s = \frac{\gamma \cdot H^2}{2} \cot \alpha \cdot \left(1 + \frac{\cot \alpha \cdot \tan i}{1 - \cot \alpha \cdot \tan i} \right) \quad (5.11)$$

$$S_{ae}(\alpha) = \frac{\gamma \cdot H^2}{2} K_{ae}(\alpha) \cdot (1 \pm \Omega \cdot k_{h,c}) \quad (5.12)$$

Esplicitando tutto in funzione di $\tan \alpha$, dopo le opportune semplificazioni e sostituzioni, il sistema di equazioni descritto dalla (5.10), può essere riscritto con la seguente equazione:

$$K_{ae}(\alpha) = \frac{A_1 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_1 \cdot \tan \alpha + C_1}{A_2 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_2 \cdot \tan \alpha + C_2} = \frac{\Phi_1(\alpha)}{\Phi_2(\alpha)} \quad (5.13)$$

che descrive in forma adimensionale, la condizione di equilibrio limite del cuneo di terreno;

I coefficienti A_1 , B_1 , C_1 e A_2 , B_2 , C_2 , relativi al coefficiente di spinta K_{ae} (5.13), sono definiti dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} A_1 = [n_q \cdot (\lambda - \tan \beta) - \tan \beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)] \cdot (1 + \tan \theta \cdot \tan \phi') \\ B_1 = -n_q \cdot \left[\lambda \cdot \frac{\sin(i - \theta + \phi')}{\cos i \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi'} + \frac{\cos(\beta - \theta + \phi')}{\cos \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi'} \right] - \frac{\cos(\beta - \theta + \phi')}{\cos \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi'} \cdot (1 + \tan \beta \cdot \tan i) \\ C_1 = -[1 + n_q + \tan i \cdot (n_q \cdot \lambda + \tan \beta)] \cdot (\tan \theta - \tan \phi') \end{cases} \quad (5.14)$$

$$\begin{cases} A_2 = -\frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \\ B_2 = \frac{-\cos(i + \beta + \delta + \phi')}{\cos i \cdot \cos \phi'} \\ C_2 = \frac{\cos(\beta + \delta + \phi') \cdot \tan i}{\cos \phi'} \end{cases} \quad (5.15)$$

Essi si riferiscono alle condizioni di equilibrio del cuneo di terreno e dipendono esclusivamente dalla geometria del terrapieno (i , β), dall'angolo di resistenza al taglio ϕ' del terreno che lo costituisce, dall'angolo di attrito muro-terreno δ , dal parametro θ definito dalla (5.3) e dalla particolare condizione di carico n_q e λ definiti dalle eqq. (5.1) e (5.2).

Il muro è in equilibrio sotto l'azione del proprio peso W_w e delle corrispondenti azioni inerziali $k_h \cdot W_w$ e $k_v \cdot W_w$, dell'azione mutua $S_{ae}(\alpha)$ e, infine, delle azioni N_b e T_b che si mobilitano alla base della fondazione del muro (Fig. 5.1). In condizioni di equilibrio limite ($k_h = k_{h,c}$, $k_v = k_{v,c}$), la resistenza allo scorrimento lungo il piano di posa della fondazione è interamente mobilitata e l'equilibrio del muro è descritto dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} N_b = W_w \cdot (1 \pm k_v) + S_{ae}(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) \\ T_b = W_w \cdot k_h + S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) \\ T_b = T_{lim,b} = N_b \cdot \tan \phi_b \end{cases} \quad (5.16)$$

Dove $S_{ae}(\alpha)$ è già stata definita dalle equazioni 5.12 e 5.13, mentre W_w rappresenta il peso dell'opera.

Esplicitando tutto in funzione di $\tan \alpha$, dopo le opportune semplificazioni e sostituzioni, il sistema di equazioni descritto dalla (5.16), può essere riscritto nella forma:

$$\tan \theta_c(\alpha) = \frac{k_{h,c}(\alpha)}{1 \pm \Omega \cdot k_{h,c}(\alpha)} = \frac{A_3 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_3 \cdot \tan \alpha + C_3}{A_4 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_4 \cdot \tan \alpha + C_4} = \frac{\Psi_1(\alpha)}{\Psi_2(\alpha)} \quad (5.17)$$

che descrive in forma adimensionale, la condizione di equilibrio limite del muro.

I coefficienti A_3 , B_3 , C_3 e A_4 , B_4 , C_4 , relativi al parametro θ_c , sono definiti dalle seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} A_3 &= -\frac{\cos(\varphi_b + \beta + \delta)}{\cos \varphi_b} \cdot [n_q \cdot (\lambda - \tan \beta) - \tan \beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)] + \dots \\ &\dots - \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \tan \varphi_b \cdot \Gamma \\ B_3 &= -\frac{\tan \varphi_b \cdot \cos(i + \beta + \delta + \phi') \cdot \Gamma}{\cos i \cdot \cos \phi'} + \frac{\cos(\varphi_b + \beta + \delta)}{\cos \varphi_b} \cdot \dots \\ &\dots \cdot \{n_q \cdot [(1 - \tan \beta \cdot \tan \phi') + \lambda \cdot (\tan \phi' + \tan i)] + (1 - \tan \beta \cdot \tan \phi') \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)\} \\ C_3 &= \frac{\cos(\beta + \delta + \phi') \cdot \tan i \cdot \tan \varphi_b \cdot \Gamma}{\cos \phi'} - \frac{\cos(\varphi_b + \beta + \delta)}{\cos \varphi_b} \cdot \dots \\ &\dots \cdot [1 + n_q \cdot (1 + \lambda \cdot \tan i) + \tan i \cdot \tan \beta] \cdot \tan \phi' \end{aligned} \right. \quad (5.18)$$

$$\left\{ \begin{aligned} A_4 &= -\frac{\cos(\varphi_b + \beta + \delta)}{\cos \varphi_b} \cdot [n_q \cdot (\tan \beta - \lambda) + \tan \beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)] \cdot \tan \phi' - \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \Gamma \\ B_4 &= -\frac{\cos(i + \beta + \delta + \phi') \cdot \Gamma}{\cos i \cdot \cos \phi'} - \frac{\cos(\varphi_b + \beta + \delta)}{\cos \varphi_b} \cdot \dots \\ &\dots \cdot \{n_q \cdot [\tan \beta + \tan \phi' + \lambda \cdot (\tan i \cdot \tan \phi' - 1)] + (\tan \beta + \tan \phi') \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)\} \\ C_4 &= \tan i \cdot \left[\frac{\cos(\beta + \delta + \phi') \cdot \Gamma}{\cos \phi'} - \frac{\cos(\varphi_b + \beta + \delta)}{\cos \varphi_b} \cdot \tan \beta \right] - \frac{\cos(\varphi_b + \beta + \delta)}{\cos \varphi_b} \cdot \dots \\ &\dots \cdot [1 + n_q \cdot (1 + \lambda \cdot \tan i)] \end{aligned} \right. \quad (5.19)$$

Essi si riferiscono alle condizioni di equilibrio limite del muro e, oltre che da i , β , ϕ' , δ , θ , n_q e λ dipendono, anche, dal peso normalizzato Γ del muro, dal rapporto Ω e dall'angolo di attrito terreno-fondazione φ_b .

Le equazioni 5.10 e 5.16 costituiscono un sistema di sei equazioni nelle sei incognite N , T , N_b , T_b , S_{ae} e $k_{h,c}$. Procedendo per sostituzione è possibile mostrare che tale sistema può essere ricondotto al sistema costituito dalle 5.13 e 5.17 nelle due incognite $K_{ae}(\alpha)$ e $\tan \theta_c$:

$$\left\{ \begin{aligned} K_{ae}(\alpha) &= \frac{A_1 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_1 \cdot \tan \alpha + C_1}{A_2 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_2 \cdot \tan \alpha + C_2} = \frac{\Phi_1(\alpha)}{\Phi_2(\alpha)} \\ \tan \theta_c(\alpha) &= \frac{k_{h,c}(\alpha)}{1 \pm \Omega \cdot k_{h,c}(\alpha)} = \frac{A_3 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_3 \cdot \tan \alpha + C_3}{A_4 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_4 \cdot \tan \alpha + C_4} = \frac{\Psi_1(\alpha)}{\Psi_2(\alpha)} \end{aligned} \right. \quad (5.20)$$

In cui θ_c è il valore di θ calcolato per $k_h = k_{h,c}$ e $k_v = \Omega \cdot k_{h,c}$ mentre K_{ae} è un coefficiente di spinta attiva per le condizioni sismiche che definisce la spinta attiva S_{ae} dovuta sia al peso proprio del terreno che al sovraccarico q .

Ciascuna delle eq. 5.20 descrive, in forma adimensionale, le condizioni di equilibrio limite del cuneo di terreno e del muro, e pertanto la loro simultanea risoluzione individua la coppia θ_c , K_{ae} che descrive la soluzione cercata.

Al variare dei coefficienti K_{ae} e $\tan\theta_c$ esisteranno ∞^4 soluzioni che soddisfano il sistema descritto dalle equazioni 5.20; il problema in altri termini risulta indeterminato, sarà pertanto indispensabile determinare l'ulteriore condizione complementare che consente di giungere ad una soluzione univoca.

Introducendo le posizioni:

$$\begin{aligned}\Phi_1(\alpha) &= A_1 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_1 \cdot \tan \alpha + C_1 \\ \Phi_2(\alpha) &= A_2 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_2 \cdot \tan \alpha + C_2\end{aligned}\tag{5.21}$$

$$\begin{aligned}\Psi_1(\alpha) &= A_3 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_3 \cdot \tan \alpha + C_3 \\ \Psi_2(\alpha) &= A_4 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_4 \cdot \tan \alpha + C_4\end{aligned}\tag{5.22}$$

che definiscono, tutte, funzioni paraboliche della variabile $\tan\alpha$ il sistema di eq. 5.20 può essere riscritto nella forma sintetica:

$$\begin{cases} \Phi_3(\alpha, K_{ae}) = \Phi_2(\alpha) \cdot K_{ae}(\alpha) - \Phi_1(\alpha) = 0 \\ \Psi_3(\alpha, \theta_c) = \Psi_2(\alpha) \cdot \tan \theta_c(\alpha) - \Psi_1(\alpha) = 0 \\ \tan^2 \alpha \cdot (A_2 \cdot K_{ae} - A_1) + \tan \alpha \cdot (B_2 \cdot K_{ae} - B_1) + (C_2 \cdot K_{ae} - C_1) = 0 \\ \tan^2 \alpha \cdot (A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3) + \tan \alpha \cdot (B_4 \cdot \tan \theta_c - B_3) + (C_4 \cdot \tan \theta_c - C_3) = 0 \end{cases}\tag{5.23}$$

Il sistema di equazioni 5.23 introduce le funzioni Φ_3 e Ψ_3 per le quali il luogo dei punti di nullo descrive, rispettivamente, le condizioni di equilibrio limite del cuneo di terreno ($\Phi_3=0$) e del muro ($\Psi_3=0$). Le funzioni Φ_3 e Ψ_3 in quanto combinazioni lineari delle funzioni Φ_1 , Φ_2 e Ψ_1 , Ψ_2 , sono anch'esse parabole nella variabile $\tan\alpha$ e risultano funzioni parametriche, rispettivamente, in K_{ae} e $\tan\theta_c$.

La ricerca della soluzione può essere condotta facendo variare l'angolo α e ricercandone il valore per cui K_{ae} attinge ad un massimo e θ_c attinge ad un minimo.

La Figura 5.3 mostra schematicamente questo procedimento con riferimento al caso descritto dai parametri mostrati nei seguenti prospetti:

parametri geotecnici:

$$\phi' = 40^\circ, \quad \delta/\phi' = 2/3, \quad \varphi_b/\phi' = 2/3 \quad (5.24)$$

parametri sismici:

$$\theta = 11^\circ, 20, \quad \Omega = 0, \quad \Omega = -1/2, \quad \Omega = +1/2 \quad (5.25)$$

parametri geometrici:

$$\beta = i = 0^\circ, \quad \Gamma = 1 \quad (5.26)$$

parametri del sovraccarico:

$$n_q = 0,4 \text{ e } \lambda = 0 \quad (5.27)$$

Per la determinazione della soluzione si procede con il seguente schema:

- si fissano le condizioni geometriche geotecniche e del sovraccarico del sistema preso in esame;
- facendo variare l'angolo α si determina il valore che minimizza il coefficiente di accelerazione critica $k_{h,c}$;
- si determina il corrispondente valore di θ con utilizzando l'equazione 5.3;
- determinato il valore di θ , si fa variare l'angolo α in modo da ottenere il massimo valore di K_{ae} associato al minimo valore di $k_{h,c}$.

Così facendo si determina il massimo valore del coefficiente di spinta attiva associato al minimo valore del coefficiente di accelerazione critica del sistema.

Ciascuna delle curve mostrate in Figura 5.3 presenta concavità verso l'alto, nel caso della funzione $K_{ae}(\alpha)$, e verso il basso, nel caso della funzione $k_{h,c}(\alpha)$; in corrispondenza di un particolare valore α_c dell'angolo α , per ogni coppia di curve rappresentate può essere individuato un punto di massimo, nel caso della funzione K_{ae} , e un punto di minimo, nel caso della funzione $k_{h,c}(\alpha)$.

Le proprietà analitiche delle funzioni $K_{ae}(\alpha)$ e $k_{h,c}(\alpha)$, appena descritte con riferimento ad un caso particolare, possono, in realtà, essere generalizzate. Utilizzando, infatti, le eqq. (5.14), (5.15), (5.18) e (5.19) è possibile mostrare che le condizioni di equilibrio limite del cuneo e del muro (descritte rispettivamente dalle condizioni $\Phi_3=0$ e $\Psi_3=0$), descrivono coniche

parametriche che rappresentano, sempre, parabole con concavità verso il basso, nel caso della funzione Φ_3 e verso l'alto nel caso della funzione Ψ_3 .

Una dettagliata dimostrazione di tali proprietà è riportata dell'appendice 5A di questo capitolo.

Tale risultato è in accordo con l'obiettivo del problema in esame, che, nello spirito del metodo dell'equilibrio limite, consiste nella ricerca di un valore di massimo (la spinta attiva S_{ae} , ovvero il coefficiente di spinta attiva K_{ae}) relativo alle condizioni di equilibrio limite del cuneo di terreno (condizione $\Phi_3=0$) e nella ricerca di un valore di minimo (la componente orizzontale del coefficiente sismico critico $k_{h,c}$ ovvero il parametro θ_c) relativo alle condizioni di equilibrio limite del muro (condizione $\Psi_3=0$).

Il procedimento descritto in Figura 5.3 fornisce l'ulteriore condizione a cui deve sottostare la soluzione del problema: l'angolo di rottura effettivamente mobilitato è quello a cui corrisponde il minor valore del coefficiente di accelerazione e dunque la minima accelerazione di soglia. Da un punto di vista analitico tutto ciò si traduce nel determinare dal sistema di eq. 5.20 l'angolo α che minimizza il coefficiente di accelerazione critica e massimizza quello relativo alla spinta attiva.

Individuate le proprietà delle funzioni Φ_3 e Ψ_3 , la determinazione della coppia K_{ae} , θ_c , che rappresenta la soluzione del problema, può ottenersi considerando che la condizione di massimo, relativa al calcolo della spinta attiva, e la condizione di minimo, relativa al calcolo del coefficiente sismico critico, corrispondono, rispettivamente, all'annullamento dei discriminanti Δ_Φ e Δ_Ψ delle funzioni Φ_3 e Ψ_3 descritte dalle eq.(5.23).

La soluzione ricercata, ovvero la coppia $K_{ae(\gamma,q)}$, θ_c , è quindi la soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \Delta_\Phi = \Delta[\Phi_3(\alpha_c, K_{ae})] = 0 \\ \Delta_\Psi = \Delta[\Psi_3(\alpha_c, \theta_c)] = 0 \end{cases} \quad (5.28)$$

Che, utilizzando le eq. 5.21, eq. 5.22, eq. 5.23 può essere scritto nella forma:

$$\begin{aligned} [B_2 \cdot K_{ae} - B_1]^2 - 4 \cdot [A_2 \cdot K_{ae} - A_1] \cdot [C_2 \cdot K_{ae} - C_1] &= 0 \\ [B_4 \cdot \tan \theta_c - B_3]^2 - 4 \cdot [A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3] \cdot [C_4 \cdot \tan \theta_c - C_3] &= 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

Il particolare valore α_c che individua il cuneo critico, può, invece, essere determinato considerando che, nella rappresentazione di Figura 5.3, il valore $\tan \alpha_c$ rappresenta l'ascissa dei vertici delle parabole descritte dalle eq.(5.23); l'angolo α_c è, quindi, definito dalle relazioni:

$$\tan \alpha_c = \frac{B_3 - B_4 \cdot \tan \theta_c}{2 \cdot (A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3)} \quad (5.30)$$

$$\tan \alpha_c = \frac{B_1 - B_2 \cdot K_{ae}}{2 \cdot (A_2 \cdot K_{ae} - A_1)} \quad (5.31)$$

La dipendenza di α_c da θ_c (eq.5.30) è dovuta alla particolare condizione critica, infatti il valore di α_c calcolato con la 5.30 è identico al valore di α_c calcolato con la 5.31, solo perché si fa riferimento alla condizione critica, e quindi il valore di K_{ae} presente nella 5.31 è determinato per la particolare condizione di $\theta = \theta_c$. In tutti gli altri casi il valore dell'angolo determinato con la 5.30 non coincide con quello determinato con la 5.31.

Ciascuna delle eq. (5.29) rappresenta un'equazione di secondo grado nelle variabili K_{ae} o $\tan \theta_c$ di facile risoluzione.

Le eq. (5.29) possono essere riscritte nella forma:

$$\begin{aligned} K_{ae}^2 \cdot (B_2^2 - 4A_2C_2) + 2 \cdot K_{ae} \cdot (2C_1A_2 - B_1B_2 + 2A_1C_2) + (B_1^2 - 4A_1C_1) &= 0 \\ \tan^2 \theta_c \cdot (B_4^2 - 4A_4C_4) + 2 \cdot \tan \theta_c \cdot (2C_3A_4 - B_3B_4 + 2A_3C_4) + (B_3^2 - 4A_3C_3) &= 0 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Scartando le soluzioni prive di significato fisico ed effettuando semplici, ma laboriosi, passaggi, è possibile risolvere le eq. (5.29) ottenendo le seguenti espressioni di $\tan \theta_c$ e K_{ae} :

$$\tan \theta_c = \frac{-2C_3A_4 + B_3B_4 - 2A_3C_4 + \sqrt{(2C_3A_4 - B_3B_4 + 2A_3C_4)^2 - (B_3^2 - 4A_3C_3) \cdot (B_4^2 - 4A_4C_4)}}{B_4^2 - 4A_4C_4} \quad (5.33)$$

$$K_{ae} = \frac{-2C_1A_2 + B_1B_2 - 2A_1C_2 - \sqrt{(2C_1A_2 - B_1B_2 + 2A_1C_2)^2 - (B_1^2 - 4A_1C_1) \cdot (B_2^2 - 4A_2C_2)}}{B_2^2 - 4A_2C_2} \quad (5.34)$$

dove i coefficienti $A_1, A_2, \dots, C_3, C_4$, sono stati già esplicitati dalle eq. (5.14), (5.15), (5.18) e (5.19).

In particolare per l'eq. (5.34) sostituendo i coefficienti da $A_1, A_2, \dots, C_1$ e C_2 , con le espressioni (5.14) e (5.15) e utilizzando il procedimento descritto in dettaglio nell'appendice 5B di questo capitolo, è possibile ottenere un'espressione analitica del coefficiente di spinta attiva del tuto simile alla espressione nota come soluzione di Mononobe & Okabe:

$$\begin{aligned} K_{ae}^{\gamma, q} &= \frac{\cos^2(\beta + \theta - \phi)}{\cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos(\delta + \beta + \theta) \cdot \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi - i - \theta) \cdot \sin(\delta + \phi)}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)} \cdot \frac{1 + n_q^* \cdot (1 + \lambda_2)}{1 + n_q^*}} \right]^2 \cdot \dots} \\ &\dots \cdot \frac{[1 + n_q^* \cdot (1 - \lambda_1)]^2}{(1 + n_q^*)} \end{aligned} \quad (5.35)$$

con:

$$\begin{aligned}
 n_q^* &= n_q \cdot \frac{\cos \beta \cdot \cos i}{\cos(i - \beta)} \\
 \lambda_1 &= \lambda \cdot \frac{\cos \beta \cdot \cos(\phi' - i - \theta)}{\cos i \cdot \cos(\beta + \theta - \phi)} \\
 \lambda_2 &= \lambda \cdot \frac{\cos \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi')}{\cos i \cdot \cos(\delta + \phi')}
 \end{aligned} \tag{5.36}$$

L'eq.(5.33) insieme alle relazioni che legano k_h , θ e Ω eq.(5.3) (5.4) e (5.5), consente, per un dato valore di Ω , la determinazione della componente orizzontale $k_{h,c}$ del coefficiente sismico critico mediante una soluzione in forma chiusa:

$$k_{h,c} = \frac{\tan \theta_c}{1 + \Omega \cdot \tan \theta_c} \tag{5.37}$$

Le Figure 5.4 (a) e(b), per il caso $\phi'=35^\circ$, $i=\beta=0^\circ$, $\delta=2/3\phi'$, $k_h=0.25$ e $\Omega=0$, mostrano i valori di α_c (Fig.5.4a) e di $K_{ae(\gamma,q)}$ (Fig.5.4b) ottenuti mediante l'eq.(5.30) e (5.31) per differenti valori di λ e di n_q ; nella stessa figura (Fig.5.4c) sono mostrati i valori di $k_{h,c}$ ottenuti, utilizzando l'eq.(5.33) e (5.37), per il caso $\phi'=35^\circ$, $i=\beta=0$, $\delta=2/3\phi'$, $\Omega=0$, $\phi_b=30^\circ$ e $\Gamma=1$.

Le curve a tratto continuo riportate nelle Figure 5.4a) e 5.4b) mostrano che, qualunque sia il valore di n_q , per valori crescenti di λ la dimensione del cuneo critico aumenta (ovvero si riduce l'angolo α_c ; Fig.5.4a). Nel complesso, però, si riduce il contributo che la porzione di sovraccarico intercettata dal cuneo critico fornisce alla spinta attiva complessiva; di conseguenza per valori crescenti di λ si riduce $K_{ae(\gamma,q)}$ (Fig.5.4b).

Relativamente alla condizione $k_h = k_{h,c}$, rimangono valide le considerazioni già effettuate in merito all'effetto di un aumento di λ sui valori di α_c e $K_{ae(\gamma,q)}$ (che in tal caso sono entrambi valutati per $k_h = k_{h,c}$); pertanto, al crescere di λ , nonostante crescano le dimensioni del cuneo critico, si riduce l'effetto del sovraccarico sulla spinta attiva complessiva e, quindi, cresce il valore di θ_c e, essendo $\Omega = 0$, cresce il valore di $k_{h,c}$ (Fig.5.4c).

Per un prefissato valore di λ tutte le curve a tratto continuo in Figura 5.4 mostrano che per valori crescenti del sovraccarico q (valori crescenti di n_q), aumentano le dimensioni del cuneo critico (ovvero si riduce α_c) e, pertanto, cresce il valore di $K_{ae(\gamma,q)}$ e si riduce il valore di $k_{h,c}$.

Le curve a tratto continuo mostrate in Figura 5.4 sono interrotte in corrispondenza di un particolare valore di λ (che per il caso esaminato è pari a 1.071, 1.133 e 1.186 rispettivamente per $n_q = 0,2$, 0,4 e 0,6). Infatti, le soluzioni proposte per $K_{ae(\gamma,q)}$ (eq.5.35), α_c

(eqq.5.30 e 5.31) e $k_{h,c}$ (eqq.5.33 e 5.37) sono valide fin tanto che il cuneo critico (individuato dall'angolo α_c) intercetta il sovraccarico q agente sull'estradosso del terrapieno.

Esisterà, quindi, un valore limite d_q^* della distanza d_q , ovvero un valore limite $\lambda^* = d_q^*/H$ del parametro adimensionale λ , superato il quale il sovraccarico q non influenzerà più la soluzione del problema né in termini di geometria del cuneo critico, né in termini di coefficiente di spinta né, infine, in termini di componente orizzontale del coefficiente sismico critico. La condizione $0 \leq \lambda \leq \lambda^*$ rappresenta, quindi, il campo di validità delle soluzioni proposte per $K_{ae(\gamma,q)}$ (eq.5.35), per $k_{h,c}$ (eqq.5.33 e 5.37) e per α_c (eqq.5.30 e 5.31).

Per $\lambda > \lambda^*$ le soluzioni determinate con riferimento allo schema di Figura 5.1 perdono di significato (curve tratteggiate in Fig.5.4) e le soluzioni del problema devono essere ricercate con riferimento ad uno schema in cui il sovraccarico q è assente, ovvero è presente in una porzione della superficie del terrapieno esterna al cuneo critico. Il valore λ^* può, pertanto, essere ottenuto imponendo che il coefficiente $K_{ae(\gamma,q)}$ fornito dall'eq.(5.35) eguagli il coefficiente di spinta attiva K_{ae}^{MO} definito dalla relazione di Mononobe - Okabe; procedendo in tal modo si ottiene la seguente espressione di λ^* :

$$\lambda^* = \frac{\cos(\beta + \theta - \phi') \cdot \cos i}{\sin(\phi' - i - \theta) \cdot \cos \beta} \cdot \left[\frac{1 + n_q^*}{n_q^*} - \frac{2 \cdot \sqrt{1 + n_q^*}}{a \cdot n_q^*} + \frac{1}{b^2 \cdot n_q^*} \right] \quad (5.38)$$

in cui:

$$a = 1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi' - i - \theta) \cdot \sin(\delta + \phi')}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)}} \quad (5.39)$$

$$b = \frac{\sqrt{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)} + \sqrt{\sin(\phi' - i - \theta) \cdot \sin(\delta + \phi')}}{\sqrt{\cos(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \cos(\beta + \theta - \phi')}}$$

Per $\lambda > \lambda^*$ le soluzioni del problema sono indipendenti da λ e possono essere determinate imponendo $n_q = \lambda = 0$ nelle eqq. (5.30), (5.31), (5.33) e (5.35). In tal caso è facile verificare che la soluzione proposta per $K_{ae(\gamma,q)}$ (eq.5.35) coincide con l'espressione di Mononobe - Okabe e fornisce il valore K_{ae}^{MO} del coefficiente di spinta attiva mostrato in Figura 5.4b per $\lambda > \lambda^*$; nelle stesse condizioni ($n_q = \lambda = 0$), inoltre, la soluzione proposta per α_c (eqq.5.30 e 5.31) restituisce il valore α_c fornito dalla relazione di nella eq. 4.27 del capitolo quarto del presente lavoro di tesi e mostrato in Figura 5.4a per $\lambda > \lambda^*$.

In corrispondenza del valore λ^* della distanza normalizzata λ , sia α_c (Fig. 5.4a) che $k_{h,c}$ (Fig. 5.4c) presentano una discontinuità che delimita il campo di validità ($\lambda < \lambda^*$) delle soluzioni proposte eqq. (5.30), (5.31), (5.33) e (5.35) per lo schema di Figura 5.1 dal campo ($\lambda > \lambda^*$) in

cui possono essere applicate le relazioni di Mononobe - Okabe e di il valore α_c fornito dalla relazione di nella eq. 4.27 del capitolo quarto del presente lavoro di tesi rispettivamente, per la determinazione di K_{ae}^{MO} e di α_c .

Nel caso, infine, in cui il sovraccarico sia presente immediatamente a ridosso dell'opera ($q \neq 0$, $d_q=0$, $\lambda = 0$) si ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (eq. 5.36) e l'eq. (5.35) si riduce a:

$$K_{ae}^{\gamma,q} = K_{ae}^{MO} \cdot \left[1 + n_q \cdot \frac{\cos \beta \cdot \cos i}{\cos(i - \beta)} \right] = K_{ae}^{MO} \cdot (1 + n_q^*) \quad (5.40)$$

Le soluzioni ricavate sono applicabili solo in condizioni dinamiche; diversamente per determinare i requisiti minimi del sistema affinché si assista al raggiungimento delle condizioni limite anche in campo statico, è necessario considerare il sistema di eq (5.16) considerando però nullo il valore di $k_{h,c}$.

In tal modo si ottiene:

$$\begin{cases} N_b = W_w + S_a(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) \\ T_b = S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) \\ T_b = T_{lim,b} = N_b \cdot \tan \varphi_b \end{cases} \quad (5.41)$$

in cui:

$$S_a = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot K_a \quad (5.42)$$

S_a è il modulo della spinta attiva in condizioni statiche;

W_w è il valore del peso dell'opera.

5.4 Determinazione del coefficiente sismico equivalente

Sempre con riferimento allo schema mostrato in Figura 5.1, indicando con F il margine di sicurezza del muro nei confronti del collasso per traslazione, nella valutazione delle condizioni di equilibrio bisogna prendere in esame il peso proprio W_w e le corrispondenti azioni inerziali $k_h \cdot W_w$ e $k_v \cdot W_w$, l'azione mutua $S_{ae}(\alpha)$ e, infine, le azioni N_b e T_b mobilitate alla base del muro.

Facendo riferimento allo schema di Figura 5.2, nella condizione ($k_h=k_{h,eq}$, $k_v=k_{v,eq}$), la resistenza al taglio del terreno a tergo del muro è interamente mobilitata

$$T_s = T_{s,lim} \quad (5.43)$$

mentre la resistenza allo scorrimento lungo il piano di posa della fondazione non lo è:

$$T_w \neq T_{w,lim} \quad (5.44)$$

Definendo il fattore di sicurezza allo scorrimento come:

$$F = \frac{T_{w,lim}}{T_w} \quad (5.45)$$

il valore della resistenza mobilitata alla base del muro è:

$$T_w = \frac{T_{w,lim}}{F} = \frac{N_w \cdot \tan \varphi_b}{F} \quad (5.46)$$

In definitiva l'equilibrio del muro è descritto dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} N_w = W_w \cdot (1 - k_v) + S_{ae}(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) \\ T_w = W_w \cdot k_h + S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) \\ T_w = \frac{T_{w,lim}}{F} = \frac{N_w \cdot \tan \varphi_b}{F} \end{cases} \quad (5.47)$$

Introducendo il valore equivalente dell'angolo di attrito base fondazione – terreno definito dalla relazione:

$$\varphi_{b,eq} = \arctan\left(\frac{\tan \varphi_b}{F}\right) \quad (5.48)$$

il sistema che governa l'equilibrio del muro si può riscrivere nella forma:

$$\begin{cases} N_w = W_w \cdot (1 - k_v) + S_{ae}(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) \\ T_w = W_w \cdot k_h + S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) \\ T_w = N_w \cdot \tan \varphi_{b,eq} \end{cases} \quad (5.49)$$

Come si può notare il sistema di equazioni è del tutto analogo a quello mostrato nell'eq. (5.16), a meno di sostituire φ_b con $\varphi_{b,eq}$ con gli stessi ragionamenti descritti nel paragrafo 5.3 si perviene alla seguente espressione in forma chiusa del coefficiente sismico equivalente definito dalla seguente relazione:

$$\tan \theta_{eq} = \frac{-2C_3A_4 + B_3B_4 - 2A_3C_4 + \sqrt{(2C_3A_4 - B_3B_4 + 2A_3C_4)^2 - (B_3^2 - 4A_3C_3) \cdot (B_4^2 - 4A_4C_4)}}{B_4^2 - 4A_4C_4} \quad (5.50)$$

in cui i coefficienti $A_3, A_4, \dots, C_3$ e C_4 sono funzioni dell'angolo $\varphi_{b,eq}$ definito dall'eq. (5.48)

$$\begin{cases}
A_3 = -\frac{\cos(\varphi_{b,eq} + \beta + \delta)}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot [n_q \cdot (\lambda - \tan \beta) - \tan \beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)] + \dots \\
\dots - \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \tan \varphi_b \cdot \Gamma \\
B_3 = -\frac{\tan \varphi_{b,eq} \cdot \cos(i + \beta + \delta + \phi') \cdot \Gamma}{\cos i \cdot \cos \phi'} + \frac{\cos(\varphi_{b,eq} + \beta + \delta)}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot \dots \\
\dots \cdot \{n_q \cdot [(1 - \tan \beta \cdot \tan \phi') + \lambda \cdot (\tan \phi' + \tan i)] + (1 - \tan \beta \cdot \tan \phi') \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)\} \\
C_3 = \frac{\cos(\beta + \delta + \phi') \cdot \tan i \cdot \tan \varphi_{b,eq} \cdot \Gamma}{\cos \phi'} - \frac{\cos(\varphi_{b,eq} + \beta + \delta)}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot \dots \\
\dots \cdot [1 + n_q \cdot (1 + \lambda \cdot \tan i) + \tan i \cdot \tan \beta] \cdot \tan \phi'
\end{cases} \quad (5.51)$$

$$\begin{cases}
A_4 = -\frac{\cos(\varphi_{b,eq} + \beta + \delta)}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot [n_q \cdot (\tan \beta - \lambda) + \tan \beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)] \cdot \tan \phi' - \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \Gamma \\
B_4 = -\frac{\cos(i + \beta + \delta + \phi') \cdot \Gamma}{\cos i \cdot \cos \phi'} - \frac{\cos(\varphi_{b,eq} + \beta + \delta)}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot \dots \\
\dots \cdot \{n_q \cdot [\tan \beta + \tan \phi' + \lambda \cdot (\tan i \cdot \tan \phi' - 1)] + (\tan \beta + \tan \phi') \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)\} \\
C_4 = \tan i \cdot \left[\frac{\cos(\beta + \delta + \phi') \cdot \Gamma}{\cos \phi'} - \frac{\cos(\varphi_{b,eq} + \beta + \delta)}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot \tan \beta \right] - \frac{\cos(\varphi_{b,eq} + \beta + \delta)}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot \dots \\
\dots \cdot [1 + n_q \cdot (1 + \lambda \cdot \tan i)]
\end{cases} \quad (5.52)$$

5.5 Analisi parametrica

In questo paragrafo, note le espressioni del coefficiente sismico critico (eq. 5.33) e dell'angolo critico di rottura del cuneo (eq. 5.30), è stata effettuata un'analisi parametrica per analizzare gli effetti di alcuni fattori geometrici e di alcuni parametri geotecnici sulle soluzioni determinate.

Le analisi sono state realizzate facendo variare il valore del peso normalizzato

$$\Gamma = \frac{2 \cdot W_w}{\gamma \cdot H^2} \quad (5.53)$$

da un valore minimo pari a 0,6 ad un valore massimo pari a 1,6

Le analisi sono state condotte:

- per $\phi' = 30^\circ, 35^\circ$ e 40° assumendo sempre $\delta/\phi' = \varphi_b/\phi' = 2/3$ e $i=\beta=0$;
- per $\phi' = 30^\circ$, $\varphi_b/\phi' = 1, 2/3$ e $1/2$ assumendo sempre $\delta/\phi' = 2/3$ $i=\beta=0$.

Per quanto riguarda il sovraccarico si sono considerati i valori di $n_q=0,2$ e $\lambda=0,48$.

Infine in tutti i casi si è assunto $\Omega=0$ e $\Omega=\pm 1/2$.

È stata analizzata contemporaneamente sia la variazione del coefficiente sismico critico che il valore del corrispondente angolo che individua il cuneo di rottura ad esso associato.

I risultati ottenuti dall'analisi sono mostrati nelle Fig. da 5.5 a 5.8.

Come si osserva dalle Figure da 5.5 a 5.8 all'aumentare del peso normalizzato del muro si evince:

- un aumento del valore del coefficiente sismico critico;
- una diminuzione del valore dell'angolo del cuneo ad esso associato.

Ciò indica un aumento del volume di terreno coinvolto nel cinematisma di collasso in accordo con il crescente valore di $k_{h,c}$. In tutti i casi l'effetto del parametro Ω si risente maggiormente per elevati valori di $k_{h,c}$ ovvero per sistemi molto stabili.

Infine nella Figura 5.8 si è redatto un diagramma riepilogativo che tiene conto dei precedenti diagrammi realizzati, osservando che sia all'aumentare dell'angolo di attrito interno del terreno (ϕ') che l'angolo di attrito alla base della fondazione (ϕ_b) si ottengono coefficienti sismici critici più elevati e quindi muri più stabili.

La Figura 5.8 mostra un confronto tra i valori di $k_{h,c}$ determinati per i tre valori di ϕ' presi in esame nell'analisi insieme ad un confronto dei corrispondenti valori dell'angolo α che definisce il cuneo critico.

I diagrammi evidenziano il valore di Γ_0 del peso normalizzato del muro in corrispondenza del quale il sistema è in equilibrio limite statico. I valori di Γ_0 individuano il punto di nullo del diagramma che fornisce i valori di $k_{h,c}$ e contestualmente il valore di α_0 dell'angolo che individua la condizione di collasso statico per un sistema avente peso normalizzato pari a Γ_0 .

Tutti diagrammi in corrispondenza di un particolare valore dell'angolo che individua il cuneo di rottura, pari ad α_1 , Figura 5.1, presentano una discontinuità.

Questa discontinuità è in accordo con la considerazione che non appena il potenziale cuneo di rottura intercetta il sovraccarico posto sull'estradosso del terrapieno, sia il valore del coefficiente sismico critico che il relativo angolo α che definisce il cuneo critico, sono determinati con le relazioni esplicitate nel presente capitolo, mentre prima della discontinuità il potenziale cuneo critico non intercetta il carico e quindi le soluzioni non sono influenzate da quest'ultimo e si determinano con le espressioni già mostrate nel capitolo quarto del presente lavoro di tesi.

Appendice 5A - Dimostrazione analitica delle proprietà delle funzioni Φ_3 e Ψ_3

5A.1 – Proprietà della funzione Φ_3

Si considerino i coefficienti A_1 e A_2 forniti dalle eqq. (5.14) e (5.15):

$$\begin{aligned} A_1 &= [n_q \cdot (\lambda - \tan \beta) - \tan \beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)] \cdot (1 + \tan \theta \cdot \tan \phi') \\ A_2 &= -\frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \end{aligned} \quad (5A1.54)$$

Deve certamente risultare $K_{ae} > 0$ perché altrimenti la soluzione non avrebbe significato.

L'eq. (5.23) fornisce:

$$\Phi_3(\alpha, K_{ae}) = \tan^2 \alpha \cdot (A_2 \cdot K_{ae} - A_1) + \tan \alpha \cdot (B_2 \cdot K_{ae} - B_1) + (C_2 \cdot K_{ae} - C_1) = 0 \quad (5A1.55)$$

che descrive l'equazione, parametrica in K_{ae} , di una parabola nella variabile $\tan \alpha$.

Tale parabola ha sempre una concavità rivolta verso il basso, infatti risulta sempre:

$$(A_2 \cdot K_{ae} - A_1) < 0 \quad (5A1.56)$$

La condizione descritta dall'eq. (5A1.56) può essere dimostrata ragionando per assurdo.

Ipotizziamo per assurdo che risulti:

$$(A_2 \cdot K_{ae} - A_1) > 0 \quad (5A1.57)$$

se:

$$n_q = \delta = \beta = 0$$

allora la dimostrazione è analoga a quella riportata nel capitolo quarto nell'appendice 4A.1

se:

$$n_q = 0$$

$$\delta = \phi'$$

$$\beta \cong 0$$

allora la dimostrazione è analoga a quella riportata nel capitolo quarto nell'appendice 4A.1

se invece:

$$n_q \neq 0 (> 0)$$

$$n_q \neq 0 (> 0)$$

$$\delta = \phi'$$

$$\beta \cong 0$$

allora risulta:

$$\begin{aligned} A_1 &= n_q \cdot \lambda \cdot (1 + \tan \theta \cdot \tan \phi') \\ A_2 &= -\frac{\sin 2\phi'}{\cos \phi'} \end{aligned} \quad (5A1.58)$$

il coefficiente A_1 sarà sempre una quantità positiva mentre il coefficiente A_2 sarà sempre una quantità negativa.

Quindi la (5A1.57) fornirebbe:

$$-\frac{\sin 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot K_{ae} - n_q \cdot \lambda \cdot (1 + \tan \theta \cdot \tan \phi') > 0 \quad (5A1.59)$$

quest'ultima disequaglianza è un assurdo perchè:

– K_{ae} è sempre positivo per ipotesi;

e quindi somma algebrica di quantità in modulo tutte positive.

5A.2 – Proprietà della funzione Ψ_3

Per un sistema stabile staticamente si considerino i coefficienti A_3 e A_4 forniti dalle eqq. (5.18) e (5.19):

$$\begin{aligned} A_3 &= -\frac{\cos(\varphi_b + \beta + \delta)}{\cos \varphi_b} \cdot [n_q \cdot (\lambda - \tan \beta) - \tan \beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)] + \dots \\ &\dots - \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \tan \varphi_b \cdot \Gamma \\ A_4 &= -\frac{\cos(\varphi_b + \beta + \delta)}{\cos \varphi_b} \cdot [n_q \cdot (\tan \beta - \lambda) + \tan \beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)] \cdot \tan \phi' - \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \Gamma \end{aligned} \quad (5A2.60)$$

Deve certamente risultare $\tan \theta_c > 0$ perché altrimenti la soluzione non avrebbe significato.

L'eq. (5.23) fornisce:

$$\Psi_3(\alpha, \tan \theta_c) = \tan^2 \alpha \cdot (A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3) + \tan \alpha \cdot (B_4 \cdot \tan \theta_c - B_3) + (C_4 \cdot \tan \theta_c - C_3) = 0 \quad (5A2.61)$$

che descrive l'equazione parametrica in $\tan \theta_c$ di una parabola nella variabile $\tan \alpha$;

Tale parabola ha sempre una concavità verso l'alto, infatti risulta sempre:

$$(A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3) > 0 \quad (5A2.62)$$

La condizione descritta dall'eq. (5A2.62) può essere dimostrata ragionando per assurdo.

Ipotizzando, per assurdo, che risulti:

$$(A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3) < 0 \quad (5A2.63)$$

se:

$$n_q = \delta = \beta = 0$$

allora la dimostrazione è analoga a quella riportata nel capitolo quarto nell'appendice 4A.1

se:

$$n_q = 0$$

$$\delta = \phi'$$

$$\beta \cong 0$$

allora la dimostrazione è analoga a quella riportata nel capitolo quarto nell'appendice 4A.1

se invece:

$$n_q \neq 0 (> 0)$$

$$n_q \neq 0 (> 0)$$

$$\delta = \varphi_b = \phi'$$

$$\beta \cong 0$$

$$(5A2.64)$$

allora risulta:

$$A_3 = -\frac{\cos 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot n_q \cdot \lambda - \frac{\sin 2\phi'}{\cos \phi'} \tan \varphi_b \cdot \Gamma$$

$$A_4 = \frac{\cos 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot n_q \cdot \lambda \cdot \tan \phi' - \frac{\sin 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot \Gamma$$

Per cui la condizione (5A2.62) fornisce:

$$\left(\frac{\cos 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot n_q \cdot \lambda \cdot \tan \phi' - \Gamma \right) \cdot \tan \theta + \left(\frac{\cos 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot n_q \cdot \lambda - \Gamma \cdot \tan \phi' \right) < 0 \quad (5A2.65)$$

ovvero:

$$\frac{\cos 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot n_q \cdot \lambda (\tan \theta \cdot \tan \phi' + 1) < \Gamma \cdot (\tan \theta - \tan \phi') < 0 \quad (5A2.66)$$

poiché il termine a sinistra della disuguaglianza e il valore del peso normalizzato del muro, Γ , sono sempre positivi, si può scrivere ancora:

$$(\tan \theta - \tan \phi') > \frac{\cos 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot \frac{n_q \cdot \lambda}{\Gamma} \cdot (\tan \theta \cdot \tan \phi' + 1) > 0 \quad (5A2.67)$$

e quindi ancora:

$$(\tan \theta - \tan \phi') > 0$$

ricordando la posizione fatta nella eq. 5A2.63 risulta:

$$\tan \theta > \tan \varphi_b$$

Questa disuguaglianza è un assurdo. Infatti considerando il valore del coefficiente sismico critico fornito dall'approccio di RE (eq. 3.9) di seguito riportata

$$\tan \theta = \frac{k_{h,c}}{1 - \Omega \cdot k_{h,c}} = \tan \varphi_b + \frac{K_{ae}}{\Gamma} \cdot [\tan \varphi_b \cdot \sin(\delta + \beta) - \cos(\delta + \beta)] \quad (5A2.68)$$

e assumendo per i seguenti valori:

$$\begin{aligned} \delta &= \varphi_b = \phi' \\ \beta &\cong 0 \end{aligned} \quad (5A2.69)$$

risulta:

$$\tan \theta = \tan \varphi_b - \frac{K_{ae}}{\Gamma} \cdot (\cos \phi' - \sin \phi' \cdot \tan \phi') \quad (5A2.70)$$

e quindi ancora:

$$\tan \theta = \tan \varphi_b - \frac{K_{ae}}{\Gamma} \cdot \frac{\cos 2\phi'}{\cos \phi'} \quad (5A2.71)$$

Poiché:

- K_{ae} è sempre positivo per ipotesi;
- Γ è sempre positivo per ipotesi;
- $\frac{\cos 2\phi'}{\cos \phi'}$ sempre positivo;

risulta:

$$\tan \theta < \tan \varphi_b \quad (5A2.72)$$

Appendice 5B – Determinazione dell'espressione analitica della relazione per la valutazione del coefficiente di spinta attiva

L'equazione (5.34):

$$K_{ae} = \frac{-2C_1A_2 + B_1B_2 - 2A_1C_2 - \sqrt{(2C_1A_2 - B_1B_2 + 2A_1C_2)^2 - (B_1^2 - 4A_1C_1) \cdot (B_2^2 - 4A_2C_2)}}{B_2^2 - 4A_2C_2} \quad (5B.73)$$

può essere riscritta nella seguente forma:

$$K_{ae} = \frac{a - \sqrt{b}}{c} \quad (5B.74)$$

dove:

$$\begin{aligned} a &= -2C_1A_2 + B_1B_2 - 2A_1C_2 \\ b &= (2C_1A_2 - B_1B_2 + 2A_1C_2)^2 - (B_1^2 - 4A_1C_1) \cdot (B_2^2 - 4A_2C_2) \\ c &= B_2^2 - 4A_2C_2 \end{aligned} \quad (5B.75)$$

Utilizzando le espressioni dei coefficienti A_1 , B_1 , C_1 e A_2 , B_2 , C_2 forniti dalle eqq. (5.14) e (5.15) si ottiene:

$$a = \frac{1}{4} \cdot \sec^4 i \cdot \sec^2 \beta \cdot \sec \theta \cdot \sec^2 \phi' \cdot \left[\begin{aligned} &2 \cdot \cos(2i - 3\beta - \delta - \theta) + n_q \cdot \cos(2i - 3\beta - \delta - \theta) + n_q \cdot (2i - \beta - \delta - \theta) + 4 \cdot \cos(2i - \beta + \delta + \theta) + \dots \\ &\dots + 6 \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) - 4 \cdot \cos(i - \beta) \cdot \cos(i - \delta + \theta - 2\phi') + 2 \cdot n_q \cdot \cos \beta \cdot \dots \\ &\dots \cdot \left[\begin{aligned} &2 \cdot \cos(\delta + \theta) + 2 \cdot \cos(2i + \delta + \theta) + \cos(2\beta + \delta + \theta) - 2 \cdot \cos i \cdot \cos(i - \delta + \theta - 2\phi') - 4 \cdot \lambda \cdot \cos \beta \cdot \dots \\ &\dots \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \sin(i + \theta - \phi') \end{aligned} \right] \end{aligned} \right] \quad (5B.76)$$

$$b = \left\{ \begin{aligned} &-16 \cdot \cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \sec^4 i \cdot \sec^4 \beta \cdot \sec^2 \theta \cdot \sec^4 \phi' [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta] \cdot \sin(i + \theta - \phi') \cdot \dots \\ &[n_q \cdot \lambda \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') + [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta] \cdot \sin(\delta + \phi')] \end{aligned} \right\} \quad (5B.77)$$

$$c = 2 \cdot \cos^2(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \sec^2 i \cdot \sec^2 \phi \quad (5B.78)$$

Consideriamo adesso il coefficiente a esplicitato nella eq. (5B.75), ed utilizzando le formule di addizione si ottiene:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \cos(2i - 3\beta - \delta - \theta) + 2 \cdot \cos(2i - \beta + \delta + \theta) &= 4 \cdot \cos[2(i - \beta)] \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \\ 2 \cdot \cos(2i - \beta + \delta + \theta) + 2 \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) &= 4 \cdot \cos(i - \beta) \cdot \cos(i + \delta + \theta) \\ n_q \cdot \cos(2i - 3\beta - \delta - \theta) + n_q \cdot (2i - \beta - \delta - \theta) &= 2 \cdot n_q \cdot \cos \beta \cdot \cos(2i - 2\beta - \delta - \theta) \\ 2 \cdot n_q \cdot \cos \beta \cdot \cos(2i - 2\beta - \delta - \theta) + 2 \cdot n_q \cdot \cos \beta \cdot \cos(2\beta + \delta + \theta) &= 4 \cdot n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta \cdot \cos(i - 2\beta - \delta - \theta) \end{aligned} \quad (5B.79)$$

quindi il coefficiente a si può esprimere nella forma:

$$a = \sec^4 i \cdot \sec^2 \beta \cdot \sec \theta \cdot \sec^2 \phi' \cdot \left[\begin{aligned} &\cos[2(i - \beta)] \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) + \cos(i - \beta) \cdot \cos(i + \delta + \theta) + 4 \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) - \cos(i - \beta) \cdot \cos(i - \delta + \theta - 2\phi') + \dots \\ &\dots + n_q \cdot \cos \beta \cdot \cos(\delta + \theta) + n_q \cdot \cos \beta \cdot \cos(2i + \delta + \theta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta \cdot \cos(i - 2\beta - \delta - \theta) - n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta \cdot \dots \\ &\dots \cdot \cos(i - \delta + \theta - 2\phi') - 2 \cdot n_q \cdot \lambda \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \sin(i + \theta - \phi') \end{aligned} \right] \quad (5B.80)$$

utilizzando ancora le formule di addizione si può scrivere:

$$\begin{aligned} \cos[2(i - \beta)] \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) + \cos(\beta + \delta + \theta) &= 2 \cdot \cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \\ \cos(i - \beta) \cdot \cos(i + \delta + \theta) - \cos(i - \beta) \cdot \cos(i - \delta + \theta - 2\phi') &= -2 \cdot \cos(i - \beta) \cdot \sin(i + \theta - \phi') \cdot \sin(\delta + \phi') \\ n_q \cdot \cos \beta \cdot \cos(\delta + \theta) + n_q \cdot \cos \beta \cdot \cos(2i + \delta + \theta) &= 2 \cdot n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta \cdot \cos(i + \delta + \theta) \\ n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta \cdot \cos(i - 2\beta - \delta - \theta) - n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta \cdot \cos(i - \delta + \theta - 2\phi') &= 2 \cdot n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta \cdot \sin(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \sin(\beta + \theta - \phi') \end{aligned} \quad (5B.81)$$

quindi il coefficiente a si può esprimere ancora nella forma:

$$a = \sec^4 i \cdot \sec^2 \beta \cdot \sec \theta \cdot \sec^2 \phi' \cdot \left[\begin{aligned} &2 \cdot \cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) - 2 \cdot \cos(i - \beta) \cdot \sin(i + \theta - \phi') \cdot \sin(\delta + \phi') + 2 \cdot n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta \cdot \cos(i + \delta + \theta) + \dots \\ &\dots + 2 \cdot n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta \cdot \sin(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \sin(\beta + \theta - \phi') - 2 \cdot n_q \cdot \lambda \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \sin(i + \theta - \phi') \end{aligned} \right] \quad (5B.82)$$

mettiamo in evidenza il seguente fattore:

$$\begin{aligned}
 & -2 \cdot \cos(i - \beta) \cdot \sin(i + \theta - \phi') \cdot \sin(\delta + \phi') - 2 \cdot n_q \cdot \lambda \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \sin(i + \theta - \phi') = \\
 & -2 \cdot \sin(i + \theta - \phi') \cdot [n_q \cdot \lambda \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') + \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi')]
 \end{aligned} \tag{5B.83}$$

quindi all'interno della parentesi quadra del coefficiente a abbiamo i seguenti 4 termini:

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot \cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \\
 & -2 \cdot \sin(i + \theta - \phi') \cdot [n_q \cdot \lambda \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') + \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi')] \\
 & 2 \cdot n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta \cdot \cos(i + \delta + \theta) \\
 & 2 \cdot n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta \cdot \sin(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \sin(\beta + \theta - \phi')
 \end{aligned} \tag{5B.84}$$

aggiungendo e sottraendo le seguenti quantità:

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot \cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot n_q \cos i \cdot \cos \beta \\
 & -2 \cdot \cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot n_q \cos i \cdot \cos \beta \\
 & 2 \cdot \sin(i + \theta - \phi') \cdot [n_q \cos i \cdot \cos \beta \cdot \sin(\delta + \phi')] \\
 & -2 \cdot \sin(i + \theta - \phi') \cdot [n_q \cos i \cdot \cos \beta \cdot \sin(\delta + \phi')]
 \end{aligned} \tag{5B.85}$$

utilizzando le formule di addizione e sottrazione si ottiene:

$$\begin{aligned}
 & 2 \cdot \cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) + 2 \cdot \cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot n_q \cos i \cdot \cos \beta = 2 \cdot \cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta] \\
 & -2 \cdot \sin(i + \theta - \phi') \cdot [n_q \cdot \lambda \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') + \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi')] - 2 \cdot \sin(i + \theta - \phi') \cdot [n_q \cos i \cdot \cos \beta \cdot \sin(\delta + \phi')] = \dots \\
 & \dots - 2 \cdot \sin(i + \theta - \phi') \cdot \{n_q \cdot \lambda \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') + [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta] \cdot \sin(\delta + \phi')\} \\
 & 2 \cdot n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta \cdot \cos(i + \delta + \theta) - 2 \cdot \cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot n_q \cos i \cdot \cos \beta = -2 \cdot n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta \cdot \sin(i - \beta) \cdot \sin(\beta + \delta + \theta) \\
 & 2 \cdot n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta \cdot \sin(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \sin(\beta + \theta - \phi') + 2 \cdot \sin(i + \theta - \phi') \cdot [n_q \cos i \cdot \cos \beta \cdot \sin(\delta + \phi')] = +2 \cdot n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta \cdot \sin(i - \beta) \cdot \sin(\beta + \delta + \theta)
 \end{aligned} \tag{5B.86}$$

quindi in definitiva il coefficiente a riportato nella eq. (5B.75) si potrà scrivere come:

$$a = 2 \cdot \sec^4 i \cdot \sec^2 \beta \cdot \sec \theta \cdot \sec^2 \phi' \cdot \left\{ \begin{aligned} &\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta] + \dots \\ &\dots - \sin(i + \theta - \phi') \cdot \{n_q \cdot \lambda \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') + [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta] \cdot \sin(\delta + \phi')\} \end{aligned} \right\} \quad (5B.87)$$

Analizzando attentamente il numeratore dell'eq. (5B.73) e ricordando la che

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} - 2 \cdot \sqrt{a \cdot b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

si può scrivere:

$$K_{ae} = \frac{\left\{ \sqrt{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta]} - \sqrt{\sin(\phi' - i - \theta) \cdot \{n_q \cdot \lambda \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') + [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta] \cdot \sin(\delta + \phi')\}} \right\}^2}{\cos^2(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \theta} \quad (5B.88)$$

dividendo tutto per:

$$\sqrt{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta]} \quad (5B.89)$$

si ottiene:

$$K_{ae} = \frac{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta] \cdot \left\{ 1 - \sqrt{\frac{\sin(\phi' - i - \theta) \cdot \{n_q \cdot \lambda \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') + [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta] \cdot \sin(\delta + \phi')\}}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta]}} \right\}^2}{\cos^2(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \theta} \quad (5B.90)$$

al fine di avere il termine sotto radice al denominatore si moltiplica tutto per:

$$\sqrt{\frac{\sin(\phi' - i - \theta) \cdot \{n_q \cdot \lambda \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') + [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta] \cdot \sin(\delta + \phi')\}}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta]}} \quad (5B.91)$$

dopo semplici passaggi si ottiene:

$$K_{ae} = \frac{\left\{ \cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta] - \sin(\phi' - i - \theta) \cdot \left\{ n_q \cdot \lambda \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') + [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta] \cdot \sin(\delta + \phi') \right\} \right\}^2}{\cos^2(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta] \cdot \dots}$$

$$\dots \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi' - i - \theta) \cdot \left\{ n_q \cdot \lambda \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') + [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta] \cdot \sin(\delta + \phi') \right\}}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot [\cos(i - \beta) + n_q \cdot \cos i \cdot \cos \beta]}} \right\}^2$$
(5B.92)

introducendo le seguenti posizioni:

$$A_q = n_q \cdot \cos \beta \cdot \cos i \cdot \cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)$$

$$B_q = n_q \cdot \sin(\phi - i - \theta) \cdot [\lambda \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \cos^2 \beta + \cos i \cdot \cos \beta \cdot \sin(\delta + \phi)]$$

$$B_q = B_{q0} + \lambda \cdot B_{q\lambda}$$

$$B_{q0} = n_q \cdot \sin(\phi - i - \theta) \cdot \cos i \cdot \cos \beta \cdot \sin(\delta + \phi)$$

$$B_{q\lambda} = n_q \cdot \sin(\phi - i - \theta) \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \cos^2 \beta$$
(5B.93)

il coefficiente di spinta attiva si può esprimere come:

$$K_{ae} = \frac{[A_q - B_q + \cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) - \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi) \cdot \sin(\phi - i - \theta)]^2}{[A_q + \cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)] \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos^2(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi - i - \theta) \cdot \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi) + B_q}{A_q + \cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)}} \right)^2}$$
(5B.94)

utilizzando le formule di addizione si può scrivere ancora:

$$\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) - \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi) \cdot \sin(\phi - i - \theta) = \cos(i - \beta) \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \cos(\beta + \theta - \phi)$$
(5B.95)

quindi l'eq. (5B.73) diventa:

$$K_{ae} = \frac{[A_q - B_q + \cos(i - \beta) \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \cos(\beta + \theta - \phi)]^2}{[A_q + \cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)] \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos^2(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi - i - \theta) \cdot \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi) + B_q}{A_q + \cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)}}\right)^2} \quad (5B.96)$$

Analizziamo adesso solo il radicando dell'eq. (5B.96)

$$\frac{\sin(\phi - i - \theta) \cdot \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi) + B_q}{A_q + \cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)} = \frac{\sin(\phi - i - \theta) \cdot \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi) \cdot \left[1 + \frac{B_q}{\sin(\phi - i - \theta) \cdot \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi)}\right]}{\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \left[1 + \frac{A_q}{\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)}\right]} \quad (5B.97)$$

ponendo:

$$n_q^* = n_q \cdot \frac{\cos i \cdot \cos \beta}{\cos(i - \beta)} \quad (5B.98)$$

e

$$\lambda_2 = \lambda \cdot \frac{\cos \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi')}{\cos i \cdot \sin(\delta + \phi')} \quad (5B.99)$$

il termine $\frac{A_q}{\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)}$

dopo semplici passaggi risulta pari a:

$$\frac{A_q}{\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)} = n_q^* \quad (5B.100)$$

mentre il termine:

$$\frac{B_q}{\sin(\phi - i - \theta) \cdot \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi)} \quad (5B.101)$$

dopo semplici passaggi risulta pari a:

$$\frac{B_q}{\sin(\phi - i - \theta) \cdot \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi)} = n_q^* \cdot (1 + \lambda_2) \quad (5B.102)$$

quindi il termine sotto radice esplicitato dall'eq. (5B.96)

si può scrivere come:

$$\frac{\sin(\phi - i - \theta) \cdot \sin(\delta + \phi) \cdot [1 + n_q^* \cdot (1 + \lambda_2)]}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot (1 + n_q^*)} \quad (5B.103)$$

quindi l'eq. (5B.73) che esprime il coefficiente di spinta attiva si scrive come:

$$K_{ae} = \frac{[A_q - B_q + \cos(i - \beta) \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \cos(\beta + \theta - \phi)]^2}{[A_q + \cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)] \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos^2(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi - i - \theta) \cdot \sin(\delta + \phi) \cdot [1 + n_q^* \cdot (1 + \lambda_2)]}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot (1 + n_q^*)}}\right)^2} \quad (5B.104)$$

analizziamo adesso il denominatore dell'eq. (5B.104)

$$\begin{aligned} & [A_q + \cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)] \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos^2(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi - i - \theta) \cdot \sin(\delta + \phi) \cdot [1 + n_q^* \cdot (1 + \lambda_2)]}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot (1 + n_q^*)}}\right)^2 = \dots \\ & \dots = \cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \left[1 + \frac{A_q}{\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)}\right] \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos^2(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi - i - \theta) \cdot \sin(\delta + \phi) \cdot [1 + n_q^* \cdot (1 + \lambda_2)]}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot (1 + n_q^*)}}\right)^2 \end{aligned} \quad (5B.105)$$

poiché :

$$\frac{A_q}{\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)} = n_q^* \quad (5B.106)$$

il denominatore si può scrivere ancora:

$$\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot [1 + n_q^*] \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos^2(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi - i - \theta) \cdot \sin(\delta + \phi) \cdot [1 + n_q^* \cdot (1 + \lambda_2)]}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot (1 + n_q^*)}} \right)^2 \quad (5B.107)$$

quindi l'espressione (5B.73) diventa:

$$K_{ae} = \frac{\cos^2(i - \beta) \cdot \cos^2(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \cos^2(\beta + \theta - \phi) \cdot \left[1 + \frac{A_q - B_q}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \cos(\beta + \theta - \phi')} \right]^2}{\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot [1 + n_q^*] \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos^2(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi - i - \theta) \cdot \sin(\delta + \phi) \cdot [1 + n_q^* \cdot (1 + \lambda_2)]}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot (1 + n_q^*)}} \right)^2} \quad (5B.108)$$

dopo le opportune semplificazioni individua:

$$K_{ae} = \frac{\cos^2(\beta + \theta - \phi) \cdot \left[1 + \frac{A_q - B_q}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \cos(\beta + \theta - \phi')} \right]^2}{\cos(\beta + \delta + \theta) \cdot [1 + n_q^*] \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \left(1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi - i - \theta) \cdot \sin(\delta + \phi) \cdot [1 + n_q^* \cdot (1 + \lambda_2)]}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot (1 + n_q^*)}} \right)^2} \quad (5B.109)$$

analizzando il termine:

$$\frac{A_q - B_q}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \cos(\beta + \theta - \phi')} \quad (5B.110)$$

ponendo:

$$\lambda_1 = \lambda \cdot \frac{\cos \beta \cdot \sin(\phi' - i - \theta)}{\cos i \cdot \cos(\beta + \theta + \phi')} \quad (5B.111)$$

si ottiene:

$$\frac{A_q - B_q}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \cos(\beta + \theta - \phi')} = \dots \text{dopo semplici passaggi si ottiene} \dots = [1 + n_q^* \cdot (1 - \lambda_1)]^2 \quad (5B.112)$$

quindi in definitiva l'espressione del coefficiente di spinta attiva assume la seguente forma:

$$K_{ae} = \frac{\cos^2(\beta + \theta - \phi)}{\cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos(\delta + \beta + \theta) \cdot \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi - i - \theta) \cdot \sin(\delta + \phi)}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)} \cdot \frac{1 + n_q^* \cdot (1 + \lambda_2)}{1 + n_q^*}} \right]^2} \cdot \frac{[1 + n_q^* \cdot (1 - \lambda_1)]^2}{(1 + n_q^*)} \quad (5B.113)$$

con le seguenti posizioni:

$$\begin{aligned} n_q^* &= n_q \cdot \frac{\cos \beta \cdot \cos i}{\cos(i - \beta)} \\ \lambda_1 &= \lambda \cdot \frac{\cos \beta \cdot \cos(\phi' - i - \theta)}{\cos i \cdot \cos(\beta + \theta - \phi)} \\ \lambda_2 &= \lambda \cdot \frac{\cos \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi')}{\cos i \cdot \cos(\delta + \phi')} \end{aligned} \quad (5B.114)$$

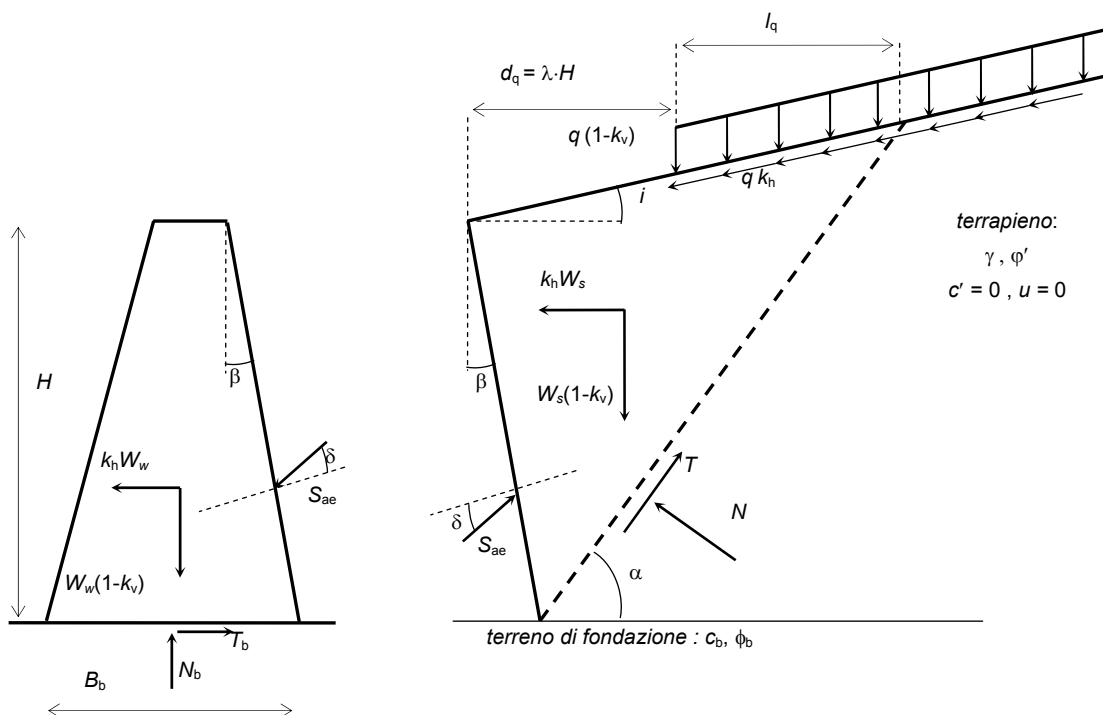


Figura 5.1 – Schema di riferimento adottato per l'analisi MB

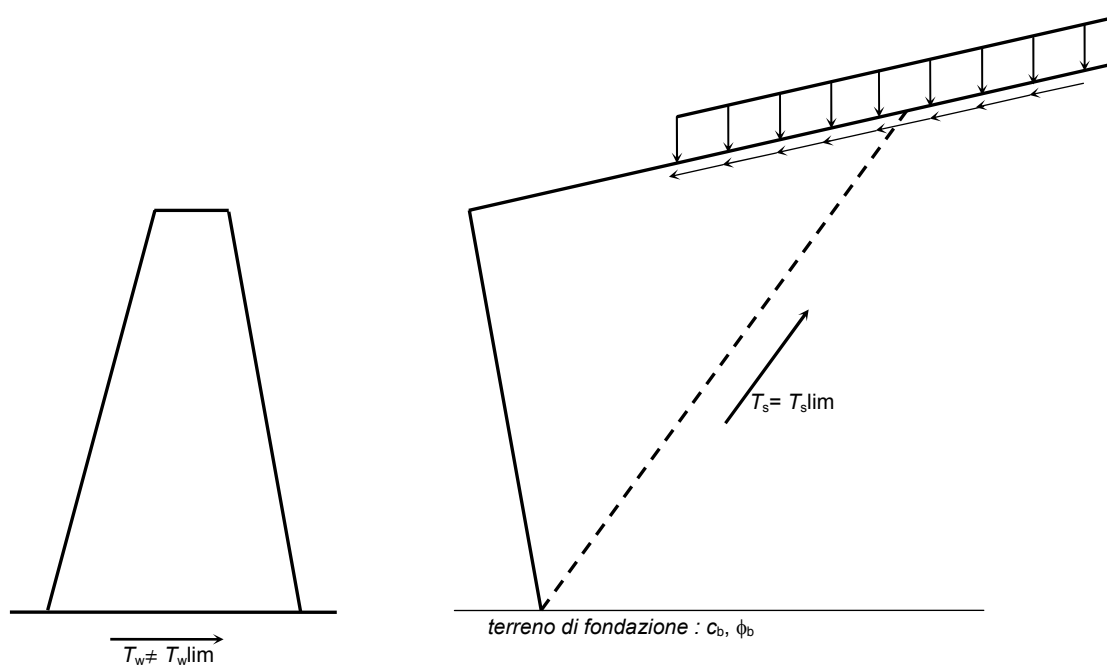
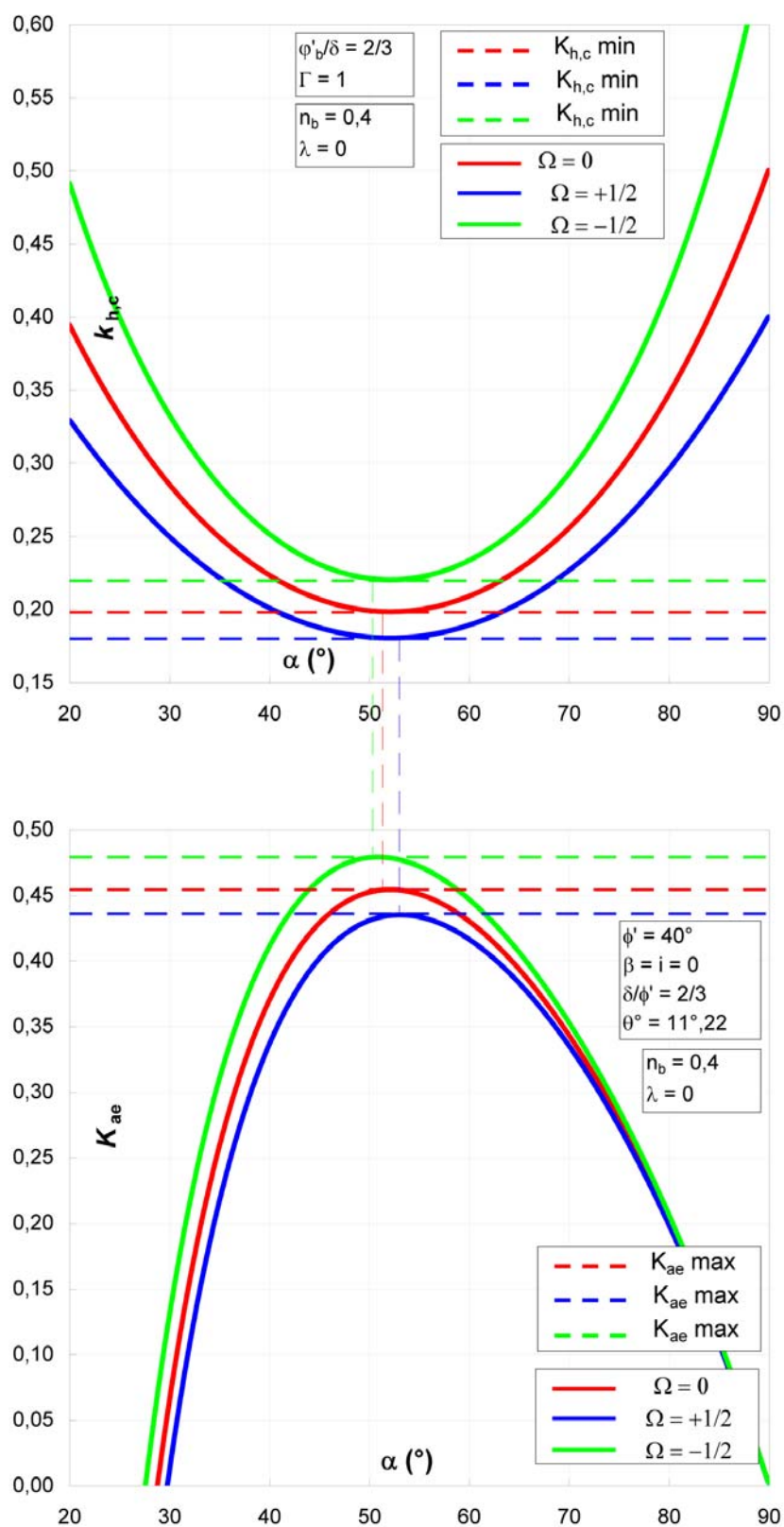


Figura 5.2 – Schema di riferimento per la determinazione del coefficiente sismico equivalente

Figura 5.3 – Variazione di K_{ae} e di $K_{h,c}$ con l'angolo α

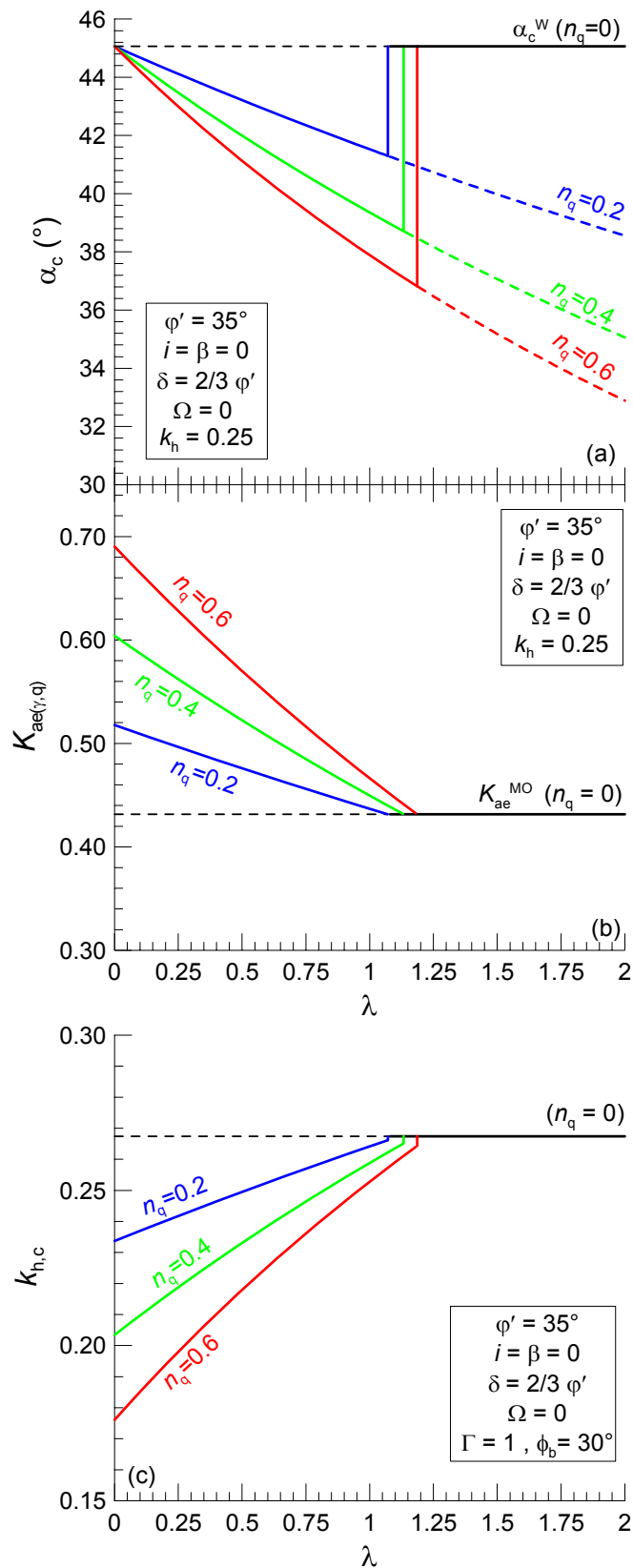


Figura 5.4 – Effetto della distanza normalizzata λ e del coefficiente n_q su $K_{ae(g,q)}$, su α_c e su $k_{h,c}$

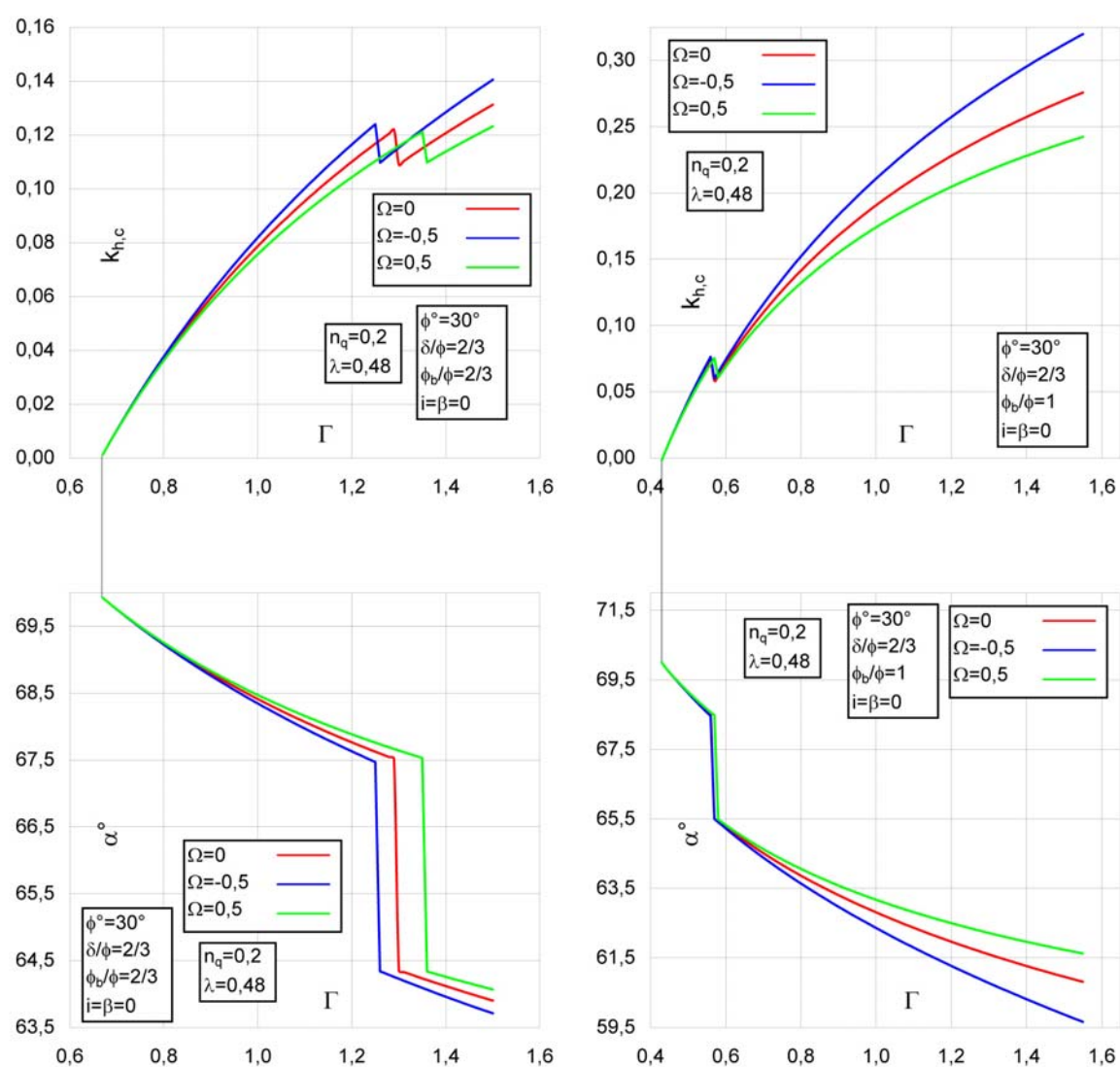


Figura 5.5 – Variazione di $k_{n,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi'=30^\circ$

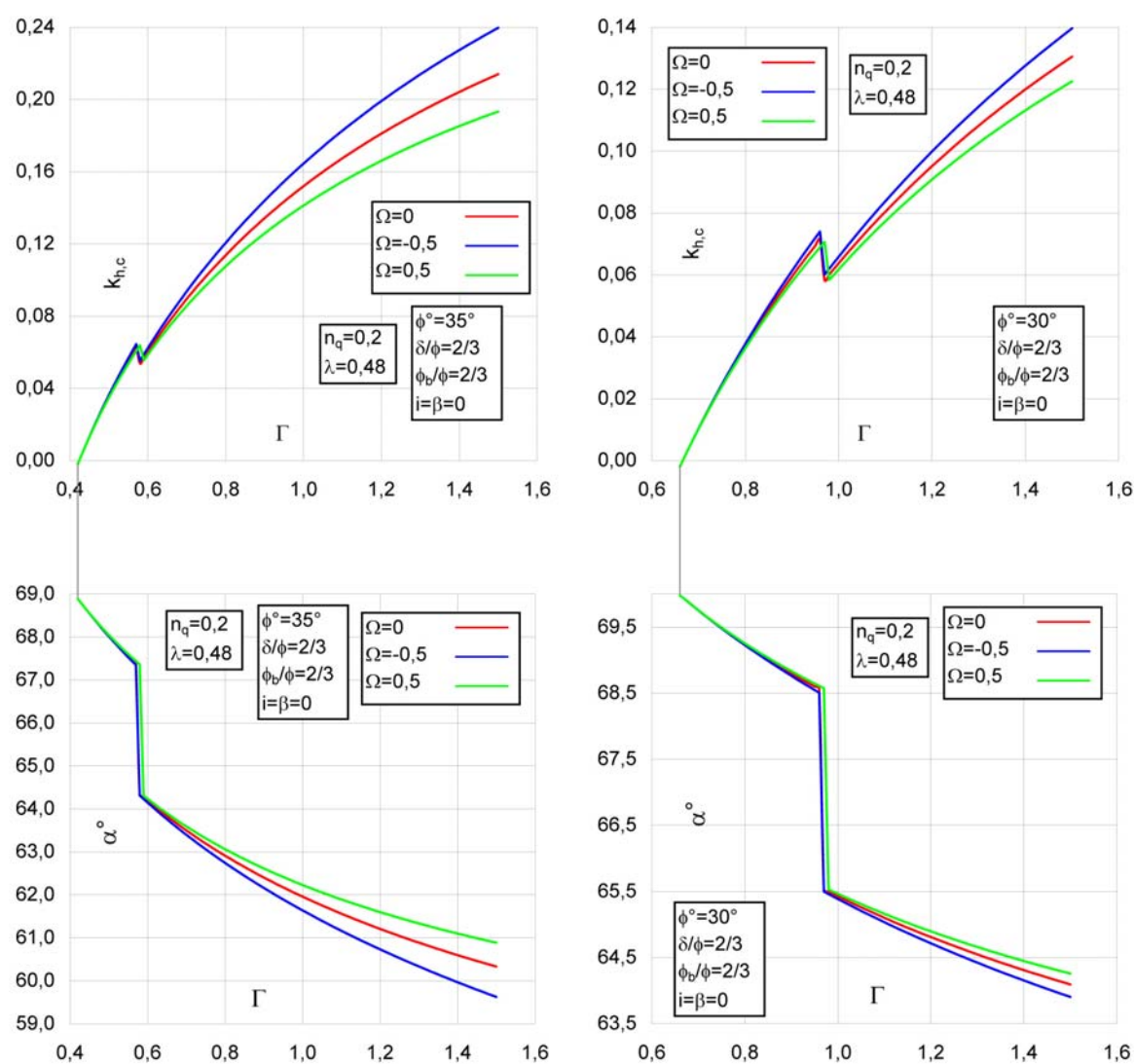


Figura 5.6 – Variazione di $k_{n,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi = 35^\circ$

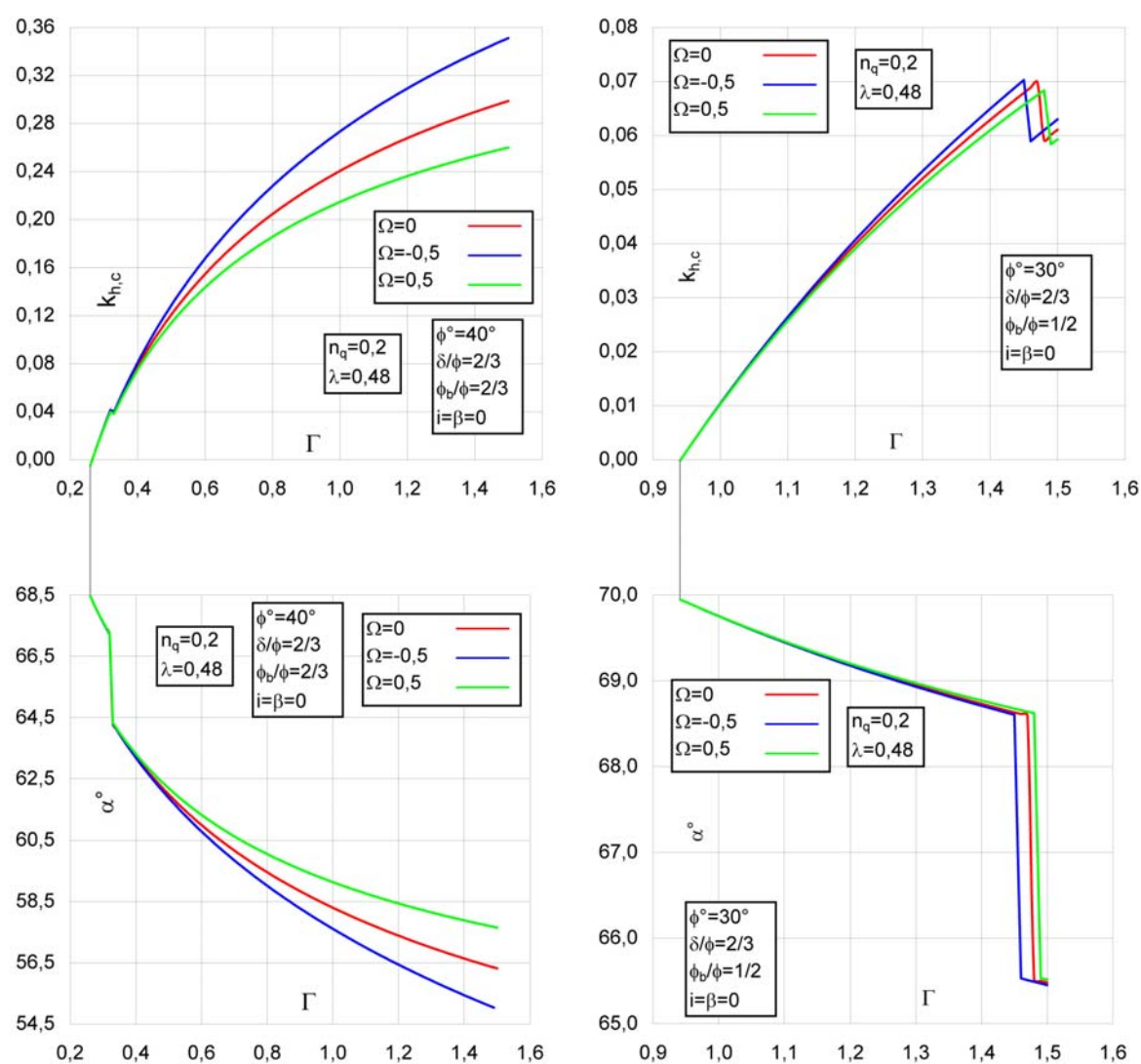


Figura 5.7 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi=40^\circ$

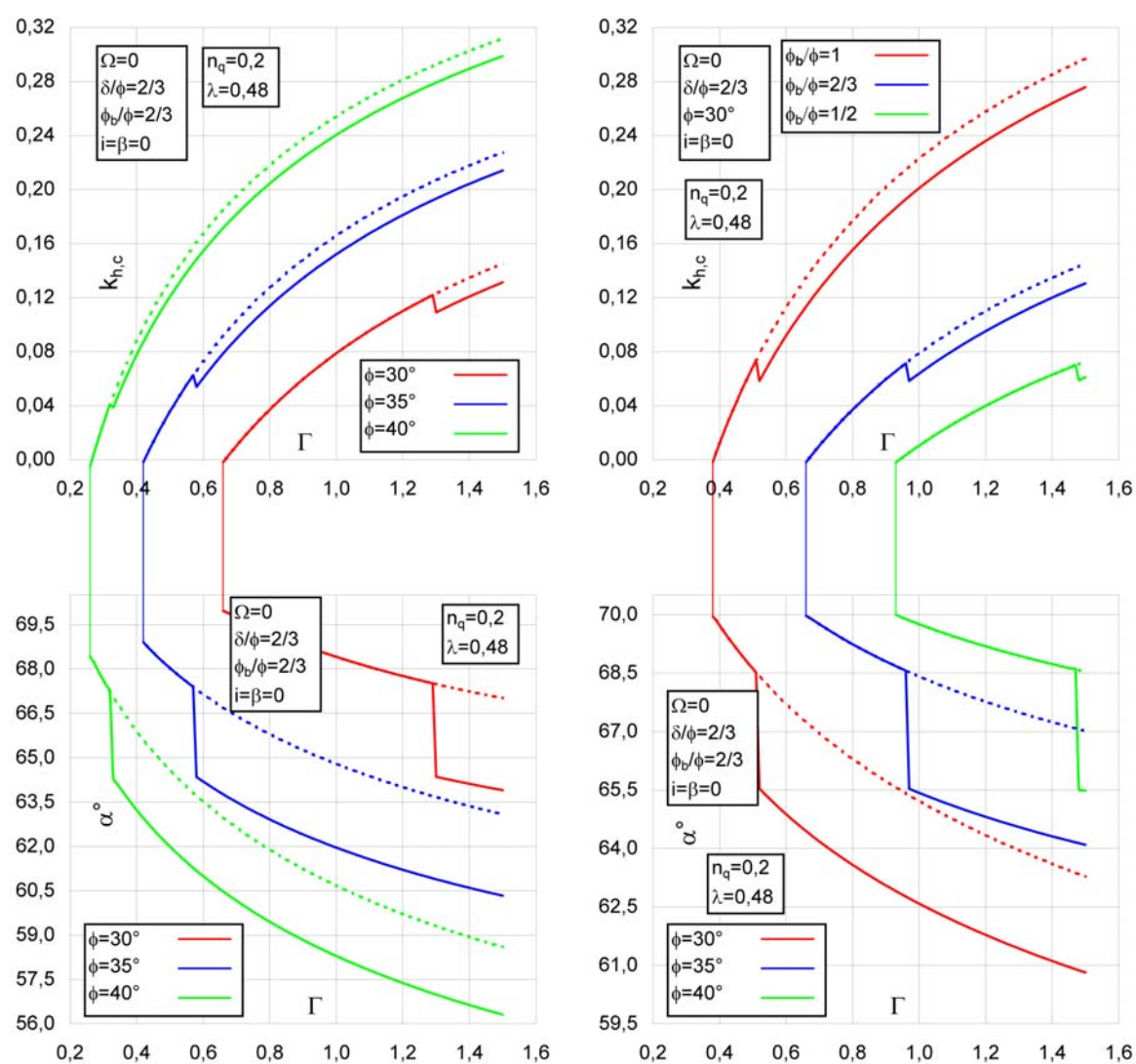


Figura 5.8 – Confronto tra i valori di $k_{h,c}$ e α forniti dagli abachi di Fig. 5.5, 5.6 e 5.7 per il caso $\Omega=0$

CAPITOLO SESTO

SCHEMA DI MURO CON TERRAPIENO DI ALTEZZA FINITA IN PRESENZA DI SOVRACCARICO

6.1 Generalità

In questo capitolo sarà esaminato lo schema di muro che sostiene un terrapieno di altezza finita soggetto ad un sovraccarico. Per tale schema l'approccio multi blocco sarà applicato con riferimento alle notazioni mostrate in Figura 6.1.

La configurazione del sistema, o più genericamente le condizioni al contorno, influiscono sullo schema di equilibrio limite e quindi influenzano le grandezze che individuano le condizioni critiche per l'opera di sostegno, ovvero il coefficiente sismico critico $k_{h,c}$ del sistema e l'inclinazione del piano di rottura all'interno del terrapieno α_c .

6.2 Schema di riferimento

La procedura proposta per la risoluzione del problema è inquadrabile nell'ambito degli approcci multi blocco (di seguito MB) e fa utilizzo del metodo dell'equilibrio limite. Il sistema muro-terreno preso in esame è mostrato nella Figura 6.1 insieme alle notazioni utilizzate per descrivere le variabili prese in esame nell'analisi. Il terrapieno è supposto asciutto ($u = 0$) e dotato di sola resistenza attritiva ($c' = 0$). La resistenza allo scorrimento alla base del muro è descritta dai parametri c_b e φ_b .

Lo schema prevede la possibile presenza di un sovraccarico q indefinitamente esteso, agente sulla porzione orizzontale dell'estradosso del terrapieno.

In particolare il sovraccarico è posto ad una distanza d_q dalla testa del muro. La distanza d_q è legata all'altezza finita del terrapieno dalla relazione:

$$d_q = \lambda \cdot H \quad (6.1)$$

con

$$\lambda = t \cdot \cot i \quad (6.2)$$

Nell'analisi il sovraccarico q e la distanza d_q sono descritti dai parametri adimensionali n_q e t , definiti come:

$$n_q = \frac{2 \cdot q}{\gamma \cdot H} \quad (6.3)$$

$$t = \frac{h}{H} \quad (6.4)$$

L'azione sismica è considerata agente sul terrapieno, sul sovraccarico su esso agente e sul muro ed è descritta dalle componenti orizzontali k_h e verticale k_v del coefficiente sismico e dai parametri θ e Ω definiti dalle seguenti relazioni:

$$\tan \theta = \frac{k_h}{1 - k_v} \quad (6.5)$$

$$\Omega = \frac{k_v}{k_h} \quad (6.6)$$

θ è correlato ad Ω mediante la relazione:

$$\Omega = \frac{1}{k_h} - \frac{1}{\tan \theta} \quad (6.7)$$

La stabilità del sistema, sia in campo statico che dinamico è affidata esclusivamente al muro di sostegno. La resistenza offerta dall'opera di contenimento ha origine lungo la superficie di contatto suolo – fondazione, ed è diretta costantemente in opposizione al moto generato dalle eccitazioni dinamiche esterne. Tale azione è genericamente indicata come taglio alla base T_b , ed il suo modulo non è costante ma influenzato dall'equilibrio del sistema. Esiste comunque per essa un limite superiore, dipendente sia dal peso del manufatto, che dal coefficiente di attrito alla base del muro ($\tan \varphi_b$), definito a partire dall'angolo di attrito suolo – fondazione φ_b e rappresentativo del vincolo di aderenza osservato in corrispondenza al piano di contatto. Il valore massimo del taglio alla base, comunemente indicato come forza d'attrito, rimane definito dalla seguente relazione:

$$T_{lim,b} = c_b \cdot B_b + W_w \cdot \tan \varphi_b \quad (6.8)$$

in cui B_b è la larghezza della base della fondazione e W_w è il peso del manufatto.

Nella 6.8 trascurando il contributo dovuto alla coesione alla base $c_b=0$ risulta:

$$T_b = T_{lim,b} = W_w \cdot \tan \varphi_b \quad (6.9)$$

Infine l'azione laterale esercitata dal terrapieno sul manufatto è correlata al piano di scorrimento individuato in condizioni plastiche. Il suo modulo rappresenta la risultante

orizzontale delle tensioni normali e tangenziali, mobilitate lungo la superficie di rottura. Una delle ipotesi fondamentali, per risolvere il problema, consiste nel supporre che, raggiunta la condizione di equilibrio limite, le tensioni tangenziali, mobilitate lungo la presunta superficie di scorrimento, rispettino la nota relazione:

$$\tau_{\text{lim}} = \sigma_{\text{lim}} \cdot \tan \phi' \quad (6.10)$$

che integrata all'intero piano di rottura diventa:

$$T = N \cdot \tan \phi' \quad (6.11)$$

6.3 Determinazione del coefficiente di spinta attiva e del coefficiente sismico critico

Nello spirito dell'approccio *MB* la soluzione del problema (ovvero i valori di $k_{h,c}$ e di K_{ae}) è ricercata risolvendo simultaneamente le equazioni che descrivono le condizioni di equilibrio del cuneo di spinta (supposto in stato limite attivo) e le equazioni che descrivono le condizioni di equilibrio limite del muro ipotizzando che, per effetto delle azioni instabilizzanti di natura sismica, esso possa traslare lungo il piano di posa della fondazione. Nell'analisi si prende in esame una superficie di potenziale scorrimento del terrapieno piana individuata dall'angolo α che essa forma con l'orizzontale (Fig. 6.1).

Il cuneo di terreno individuato da tale generica superficie è in equilibrio sotto l'azione del proprio peso W_s , delle corrispondenti azioni inerziali $k_h \cdot W_s$ e $k_v \cdot W_s$, della risultante del sovraccarico q (che agisce sulla porzione di terrapieno di estensione l_q) e delle corrispondenti azioni inerziali ($k_h \cdot q$, $k_v \cdot q$), dell'azione mutua $S_{ae}(\alpha)$ che muro e terrapieno si scambiano e, infine, delle azioni N e T risultanti delle tensioni normali e tangenziali mobilitate lungo la superficie di potenziale scorrimento (Fig. 6.1).

Le condizioni di equilibrio limite ($k_h = k_{h,c}$, $k_v = k_{v,c}$) del cuneo di terreno sono descritte dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} W_s \cdot (1 \pm \Omega \cdot k_{h,c}) = S_{ae}(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) + T \cdot \sin(\alpha) + N \cdot \cos(\alpha) - q \cdot l_q \cdot (1 \pm \Omega \cdot k_{h,c}) \\ W_s \cdot k_{h,c} = S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) + T \cdot \cos(\alpha) - N \cdot \sin(\alpha) - q \cdot l_q \cdot k_{h,c} \\ T = T_{\text{lim}} = N \cdot \tan \phi' \end{cases} \quad (6.12)$$

con:

$$W_s = \frac{\gamma \cdot H^2}{2} \cot \alpha \cdot [(\cot \alpha + \tan \beta) \cdot (1 + 2t) + t^2 \cdot (\cot \alpha - \cot i)] \quad (6.13)$$

$$S_{ae}(\alpha) = \frac{\gamma \cdot H^2}{2} K_{ae}(\alpha) \cdot (1 \pm \Omega \cdot k_{h,c}) \quad (6.14)$$

Esplicitando tutto in funzione di $\tan \alpha$, dopo le opportune semplificazioni e sostituzioni, il sistema di equazioni descritto dalla (6.12), può essere riscritto con la seguente equazione:

$$K_{ae}(\alpha) = \frac{A_1 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_1 \cdot \tan \alpha + C_1}{A_2 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_2 \cdot \tan \alpha + C_2} = \frac{\Phi_1(\alpha)}{\Phi_2(\alpha)} \quad (6.15)$$

che descrive in forma adimensionale, la condizione di equilibrio limite del cuneo di terreno;

I coefficienti A_1 , B_1 , C_1 e A_2 , B_2 , C_2 , relativi al coefficiente di spinta K_{ae} (6.15), sono definiti dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} A_1 = [\lambda \cdot (n_q + t) - (1 + n_q + 2t) \cdot \tan \beta] \cdot (1 + \tan \theta \cdot \tan \phi') \\ B_1 = -\frac{1}{\cos \theta \cdot \cos \phi'} \cdot \left[t \cdot (n_q + t) \cdot \frac{\sin(i - \theta + \phi')}{\sin i} + (1 + n_q + 2t) \cdot \frac{\cos(\beta - \theta + \phi')}{\cos \beta} \right] \\ C_1 = -(1 + t) \cdot (1 + n_q + t) \cdot (\tan \theta - \tan \phi') \end{cases} \quad (6.16)$$

$$\begin{cases} A_2 = -\frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi} \\ B_2 = -\frac{\cos(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \\ C_2 = 0 \end{cases} \quad (6.17)$$

Essi si riferiscono alle condizioni di equilibrio del cuneo di terreno e dipendono esclusivamente dalla geometria del terrapieno (i , β), dall'angolo di resistenza al taglio ϕ' del terreno che lo costituisce, dall'angolo di attrito muro-terreno δ , dal parametro θ definito dalla (6.5) e dalla particolare condizione di carico n_q definiti dalle eqq. (6.3) e (6.4).

Il muro è in equilibrio sotto l'azione del proprio peso W_w e delle corrispondenti azioni inerziali $k_h \cdot W_w$ e $k_v \cdot W_w$, dell'azione mutua $S_{ae}(\alpha)$ e, infine, delle azioni N_b e T_b che si mobilitano alla base della fondazione del muro (Fig. 6.1). In condizioni di equilibrio limite ($k_h = k_{h,c}$, $k_v = k_{v,c}$), la resistenza allo scorrimento lungo il piano di posa della fondazione è interamente mobilitata e l'equilibrio del muro è descritto dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} N_b = W_w \cdot (1 \pm k_v) + S_{ae}(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) \\ T_b = W_w \cdot k_h + S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) \\ T_b = T_{lim,b} = N_b \cdot \tan \phi_b \end{cases} \quad (6.18)$$

Dove $S_{ae}(\alpha)$ è già stata definita dalle equazioni 6.14 e 6.15, mentre W_w rappresenta il peso dell'opera.

Esplicitando tutto in funzione di $\tan \alpha$, dopo le opportune semplificazioni e sostituzioni, il sistema di equazioni descritto dalla (6.18), può essere riscritto con la seguente equazione:

$$\tan \theta_c(\alpha) = \frac{k_{h,c}(\alpha)}{1 \pm \Omega \cdot k_{h,c}(\alpha)} = \frac{A_3 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_3 \cdot \tan \alpha + C_3}{A_4 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_4 \cdot \tan \alpha + C_4} = \frac{\Psi_1(\alpha)}{\Psi_2(\alpha)} \quad (6.19)$$

che descrive in forma adimensionale, la condizione di equilibrio limite del muro;

I coefficienti A_3, B_3, C_3 e A_4, B_4, C_4 , relativi al parametro θ_c , sono definiti dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} A_3 = \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} \cdot [-(n_q + t) \cdot \lambda + (1 + n_q + 2t) \cdot \tan \beta] - \Gamma \cdot \tan \varphi_b \cdot \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \\ B_3 = -\Gamma \cdot \tan \varphi_b \cdot \frac{\cos(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} + \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} \cdot \dots \\ \dots \cdot [1 + ((n_q + t) \cdot \lambda - (1 + n_q + 2t) \cdot \tan \beta) \cdot \tan \phi' + (n_q + (2 + n_q) \cdot t + t^2)] \\ C_3 = -\frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} \cdot (1 + t) \cdot (1 + n_q + t) \cdot \tan \phi' \end{cases} \quad (6.20)$$

$$\begin{cases} A_4 = -\Gamma \cdot \frac{\sin(\beta + \delta + \phi)}{\cos \phi} - \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} \cdot [-(n_q + t) \cdot \lambda + (1 + n_q + 2t) \cdot \tan \beta] \cdot \tan \phi' \\ B_4 = -\Gamma \cdot \frac{\cos(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} + \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} \cdot \dots \\ \dots \cdot [-\tan \phi + ((n_q + t) \cdot \lambda - (1 + n_q + 2t) \cdot \tan \beta) - (n_q + (2 + n_q) \cdot t + t^2) \cdot \tan \phi'] \\ C_4 = -\frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} (1 + t) \cdot (1 + n_q + t) \end{cases} \quad (6.21)$$

Essi si riferiscono alle condizioni di equilibrio limite del muro e, oltre che da $i, \beta, \phi', \delta, \theta, n_q$ e t dipendono, anche, dal peso normalizzato Γ del muro, dal rapporto Ω e dall'angolo di attrito terreno-fondazione φ_b .

Le equazioni 6.12 e 6.18 costituiscono un sistema di sei equazioni nelle sei incognite N, T, N_b, T_b, S_{ae} e $k_{h,c}$. Procedendo per sostituzione è possibile mostrare che tale sistema può essere ricondotto al sistema costituito dalle 6.15 e 6.19 nelle due incognite $K_{ae}(\alpha)$ e $\tan \theta_c$:

$$\begin{cases} K_{ae}(\alpha) = \frac{A_1 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_1 \cdot \tan \alpha + C_1}{A_2 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_2 \cdot \tan \alpha + C_2} = \frac{\Phi_1(\alpha)}{\Phi_2(\alpha)} \\ \tan \theta_c(\alpha) = \frac{k_{h,c}(\alpha)}{1 \pm \Omega \cdot k_{h,c}(\alpha)} = \frac{A_3 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_3 \cdot \tan \alpha + C_3}{A_4 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_4 \cdot \tan \alpha + C_4} = \frac{\Psi_1(\alpha)}{\Psi_2(\alpha)} \end{cases} \quad (6.22)$$

In cui θ_c è il valore di θ calcolato per $k_h = k_{h,c}$ e $k_v = \Omega \cdot k_{h,c}$ mentre K_{ae} è un coefficiente di spinta attiva per le condizioni sismiche che definisce la spinta attiva S_{ae} dovuta sia al peso proprio del terreno che al sovraccarico q .

Ciascuna delle eq. 6.22 descrive, in forma adimensionale, le condizioni di equilibrio limite del cuneo di terreno e del muro, e pertanto la loro simultanea risoluzione individua la coppia θ_c , K_{ae} che descrive la soluzione cercata.

Al variare dei coefficienti K_{ae} e $\tan\theta_c$ esisteranno ∞^4 soluzioni che soddisfano il sistema descritto dalle equazioni 6.22; il problema in altri termini risulta indeterminato, sarà pertanto indispensabile determinare l'ulteriore condizione complementare che consente di giungere ad una soluzione univoca.

Introducendo le posizioni:

$$\begin{aligned}\Phi_1(\alpha) &= A_1 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_1 \cdot \tan \alpha + C_1 \\ \Phi_2(\alpha) &= A_2 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_2 \cdot \tan \alpha + C_2\end{aligned}\tag{6.23}$$

$$\begin{aligned}\Psi_1(\alpha) &= A_3 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_3 \cdot \tan \alpha + C_3 \\ \Psi_2(\alpha) &= A_4 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_4 \cdot \tan \alpha + C_4\end{aligned}\tag{6.24}$$

che definiscono, tutte, funzioni paraboliche della variabile $\tan\alpha$ il sistema di eq. 6.22 può essere riscritto nella forma sintetica:

$$\begin{cases} \Phi_3(\alpha, K_{ae}) = \Phi_2(\alpha) \cdot K_{ae} - \Phi_1(\alpha) = 0 \\ \Psi_3(\alpha, \theta_c) = \Psi_2(\alpha) \cdot \tan \theta_c - \Psi_1(\alpha) = 0 \\ \tan^2 \alpha \cdot (A_2 \cdot K_{ae} - A_1) + \tan \alpha \cdot (B_2 \cdot K_{ae} - B_1) + (C_2 \cdot K_{ae} - C_1) = 0 \\ \tan^2 \alpha \cdot (A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3) + \tan \alpha \cdot (B_4 \cdot \tan \theta_c - B_3) + (C_4 \cdot \tan \theta_c - C_3) = 0 \end{cases}\tag{6.25}$$

Il sistema di equazioni 6.25 introduce le funzioni Φ_3 e Ψ_3 per le quali il luogo dei punti di nullo descrive, rispettivamente, le condizioni di equilibrio limite del cuneo di terreno ($\Phi_3=0$) e del muro ($\Psi_3=0$). Le funzioni Φ_3 e Ψ_3 in quanto combinazioni lineari delle funzioni Φ_1 , Φ_2 e Ψ_1 , Ψ_2 , sono anch'esse parabole nella variabile $\tan\alpha$ e risultano funzioni parametriche, rispettivamente, in K_{ae} e $\tan\theta_c$.

La ricerca della soluzione può essere condotta facendo variare l'angolo α e ricercandone il valore per cui K_{ae} attinge ad un massimo e θ_c attinge ad un minimo.

La Figura 6.3 mostra schematicamente questo procedimento con riferimento al caso descritto dai parametri mostrati nei seguenti prospetti:

parametri geotecnici:

$$\phi' = 40^\circ, \quad \delta/\phi' = 2/3, \quad \varphi_b/\phi' = 2/3\tag{6.26}$$

parametri sismici:

$$\theta = 11^{\circ},87, \quad \Omega = 0, \quad \Omega = -\frac{1}{2}, \quad \Omega = +\frac{1}{2} \quad (6.27)$$

parametri geometrici:

$$\beta = 0^{\circ}, \quad i = 15^{\circ}, \quad \Gamma = 1 \quad (6.28)$$

parametri del sovraccarico:

$$n_q = 0,6 \text{ e } t = 0,4 \quad (6.29)$$

Per la determinazione della soluzione si procede con il seguente schema:

- si fissano le condizioni geometriche geotecniche e del sovraccarico del sistema preso in esame;
- facendo variare l'angolo α si determina il valore che minimizza il coefficiente di accelerazione critica $k_{h,c}$;
- si determina il corrispondente valore di θ con utilizzando l'equazione 6.5;
- determinato il valore di θ , si fa variare l'angolo α in modo da ottenere il massimo valore di K_{ae} associato al minimo valore di $k_{h,c}$.

Così facendo si determina il massimo valore del coefficiente di spinta attiva associato al minimo valore del coefficiente di accelerazione critica del sistema.

Ciascuna delle curve mostrate in Figura 6.3 presenta concavità verso l'alto, nel caso della funzione $K_{ae}(\alpha)$, e verso il basso, nel caso della funzione $k_{h,c}(\alpha)$; in corrispondenza di un particolare valore α_c dell'angolo α , per ogni coppia di curve rappresentate può essere individuato un punto di massimo, nel caso della funzione K_{ae} , e un punto di minimo, nel caso della funzione $k_{h,c}(\alpha)$.

Le proprietà analitiche delle funzioni $K_{ae}(\alpha)$ e $k_{h,c}(\alpha)$, appena descritte con riferimento ad un caso particolare, possono, in realtà, essere generalizzate. Utilizzando, infatti, le eqq. (6.16), (6.27), (6.20) e (6.21) è possibile mostrare che le condizioni di equilibrio limite del cuneo e del muro (descritte rispettivamente dalle condizioni $\Phi_3=0$ e $\Psi_3=0$), descrivono coniche parametriche che rappresentano, sempre, parabole con concavità verso il basso, nel caso della funzione Φ_3 e verso l'alto nel caso della funzione Ψ_3 .

Una dettagliata dimostrazione di tali proprietà è riportata dell'appendice 6A di questo capitolo.

Tale risultato è in accordo con l'obiettivo del problema in esame, che, nello spirito del metodo dell'equilibrio limite, consiste nella ricerca di un valore di massimo (la spinta attiva S_{ae} , ovvero il coefficiente di spinta attiva K_{ae}) relativo alle condizioni di equilibrio limite del cuneo di terreno (condizione $\Phi_3=0$) e nella ricerca di un valore di minimo (la componente orizzontale del coefficiente sismico critico $k_{h,c}$ ovvero il parametro θ_c) relativo alle condizioni di equilibrio limite del muro (condizione $\Psi_3=0$).

Il procedimento descritto in Figura 6.3 fornisce l'ulteriore condizione a cui deve sottostare la soluzione del problema: l'angolo di rottura effettivamente mobilitato è quello a cui corrisponde il minor valore del coefficiente di accelerazione e dunque la minima accelerazione di soglia. Da un punto di vista analitico tutto ciò si traduce nel determinare dal sistema di eq. 6.22 l'angolo α che minimizza il coefficiente di accelerazione critica e massimizza quello relativo alla spinta attiva.

Individuate le proprietà delle funzioni Φ_3 e Ψ_3 , la determinazione della coppia K_{ae} , θ_c , che rappresenta la soluzione del problema, può ottenersi considerando che la condizione di massimo, relativa al calcolo della spinta attiva, e la condizione di minimo, relativa al calcolo del coefficiente sismico critico, corrispondono, rispettivamente, all'annullamento dei discriminanti Δ_Φ e Δ_Ψ delle funzioni Φ_3 e Ψ_3 descritte dalle eq.(6.25).

La soluzione ricercata, ovvero la coppia $K_{ae(\gamma,q)}$, θ_c , è quindi la soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \Delta_\Phi = \Delta[\Phi_3(\alpha_c, K_{ae})] = 0 \\ \Delta_\Psi = \Delta[\Psi_3(\alpha_c, \theta_c)] = 0 \end{cases} \quad (6.30)$$

Che, utilizzando le eq. 6.23, eq. 6.24, eq. 6.25 può essere scritto nella forma:

$$\begin{aligned} [B_2 \cdot K_{ae} - B_1]^2 - 4 \cdot [A_2 \cdot K_{ae} - A_1] \cdot [C_2 \cdot K_{ae} - C_1] &= 0 \\ [B_4 \cdot \tan \theta_c - B_3]^2 - 4 \cdot [A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3] \cdot [C_4 \cdot \tan \theta_c - C_3] &= 0 \end{aligned} \quad (6.31)$$

Il particolare valore α_c che individua il cuneo critico, può, invece, essere determinato considerando che, nella rappresentazione di Figura 6.3, il valore $\tan \alpha_c$ rappresenta l'ascissa dei vertici delle parabole descritte dalle eq.(6.25); l'angolo α_c è, quindi, definito dalle relazioni:

$$\tan \alpha_c = \frac{B_3 - B_4 \cdot \tan \theta_c}{2 \cdot (A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3)} \quad (6.32)$$

$$\tan \alpha_c = \frac{B_1 - B_2 \cdot K_{ae}}{2 \cdot (A_2 \cdot K_{ae} - A_1)} \quad (6.33)$$

La dipendenza di α_c da θ_c (eq.6.32) è dovuta alla particolare condizione critica, infatti il valore di α_c calcolato con la 6.32 è identico al valore di α_c calcolato con la 6.33, solo perché si fa riferimento alla condizione critica, e quindi il valore di K_{ae} presente nella 6.33 è determinato per la particolare condizione di $\theta = \theta_c$. In tutti gli altri casi il valore dell'angolo determinato con la 6.32 non coincide con quello determinato con la 6.33.

Ciascuna delle eq. (6.31) rappresenta un'equazione di secondo grado nelle variabili K_{ae} o $\tan \theta_c$ di facile risoluzione.

Le eq. (6.31) possono essere riscritte nella forma:

$$\begin{aligned} K_{ae}^2 \cdot (B_2^2 - 4A_2C_2) + 2 \cdot K_{ae} \cdot (2C_1A_2 - B_1B_2 + 2A_1C_2) + (B_1^2 - 4A_1C_1) &= 0 \\ \tan^2 \theta_c \cdot (B_4^2 - 4A_4C_4) + 2 \cdot \tan \theta_c \cdot (2C_3A_4 - B_3B_4 + 2A_3C_4) + (B_3^2 - 4A_3C_3) &= 0 \end{aligned} \quad (6.34)$$

Scartando le soluzioni prive di significato fisico ed effettuando semplici, ma laboriosi, passaggi, è possibile risolvere le eq. (6.31) ottenendo le seguenti espressioni di $\tan \theta_c$ e K_{ae} :

$$\tan \theta_c = \frac{-2C_3A_4 + B_3B_4 - 2A_3C_4 + \sqrt{(2C_3A_4 - B_3B_4 + 2A_3C_4)^2 - (B_3^2 - 4A_3C_3) \cdot (B_4^2 - 4A_4C_4)}}{B_4^2 - 4A_4C_4} \quad (6.35)$$

$$K_{ae} = \frac{-2C_1A_2 + B_1B_2 - 2A_1C_2 - \sqrt{(2C_1A_2 - B_1B_2 + 2A_1C_2)^2 - (B_1^2 - 4A_1C_1) \cdot (B_2^2 - 4A_2C_2)}}{B_2^2 - 4A_2C_2} \quad (6.36)$$

dove i coefficienti $A_1, A_2, \dots, C_3, C_4$, sono stati già esplicitati dalle eq. (6.16), (6.17), (6.20) e (6.21).

In particolare per l'eq. (6.36) sostituendo i coefficienti da $A_1, A_2, \dots, C_1$ e C_2 , con le espressioni (6.16) e (6.17) e utilizzando il procedimento descritto in dettaglio nell'appendice 6B di questo capitolo, è possibile ottenere un'espressione analitica del coefficiente di spinta attiva nella forma:

$$\begin{aligned} K_{ae}^{\gamma, q} &= \frac{t \cdot (n_q + t) \cdot \cos \beta \cdot (a + b) + (1 + n_q + 2t) \cdot \sin i \cdot (c + d)}{\cos \beta \cdot \cos \theta \cdot \sin i \cdot \cos^2(\beta + \delta + \phi)} + \dots \\ &\dots \frac{-2\sqrt{t \cdot (n_q + t) \cdot \cos^2 \beta \cdot (a \cdot b) + (1 + n_q + 2t) \cdot \sin^2 i \cdot (c \cdot d)} \cdot \sqrt{t \cdot (n_q + t) \cdot (1 + n_q + 2t)}}{\cos \beta \cdot \cos \theta \cdot \sin i \cdot \cos^2(\beta + \delta + \phi)} \end{aligned} \quad (6.37)$$

con:

$$\begin{aligned} a &= \sin i \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \\ b &= \cos(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \sin(\phi - \theta) \\ c &= \cos \beta \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \\ d &= \sin(\delta + \phi) \cdot \sin(\phi - \theta) \end{aligned} \quad (6.38)$$

L'eq.(6.35) insieme alle relazioni che legano k_h , θ e Ω eq.(6.5) (6.6) e (6.7), consente, per un dato valore di Ω , la determinazione della componente orizzontale $k_{h,c}$ del coefficiente sismico critico mediante una soluzione in forma chiusa:

$$k_{h,c} = \frac{\tan \theta_c}{1 \pm \Omega \cdot \tan \theta_c} \quad (6.39)$$

Affinché le soluzioni fornite dall'eqq. (6.32), (6.33), (6.35) e (6.37), siano congruenti con le ipotesi assunte nello schema di riferimento dell'analisi, deve essere:

$$\tan \alpha_c \leq \tan \alpha_1 \quad (6.40)$$

dove:

$$\tan \alpha_1 = \frac{1+t}{\lambda - \tan \beta} \quad (6.41)$$

con:

$$t = \frac{h}{H} \quad (6.42)$$

$$\lambda = t \cdot \cot i$$

Questo controllo va pertanto eseguito per verificare l'ammissibilità delle soluzioni trovate. Qualora l'eq (6.41) non risultasse verificata la soluzione va ricercata con le soluzioni già fornite nel capitolo quarto.

6.4 Determinazione del coefficiente sismico equivalente

Sempre con riferimento allo schema mostrato in Figura 6.1, indicando con F il margine di sicurezza del muro nei confronti del collasso per traslazione, nella valutazione delle condizioni di equilibrio bisogna prendere in esame il peso proprio W_w e le corrispondenti azioni inerziali $k_h \cdot W_w$ e $k_v \cdot W_w$, l'azione mutua $S_{ae}(\alpha)$ e, infine, le azioni N_b e T_b mobilitate alla base del muro.

Facendo riferimento allo schema di Figura 6.2, nella condizione ($k_h=k_{h,eq}$, $k_v=k_{v,eq}$), la resistenza al taglio del terreno a tergo del muro è interamente mobilitata

$$T_s = T_{s,lim} \quad (6.43)$$

mentre la resistenza allo scorrimento lungo il piano di posa della fondazione non lo è

$$T_w \neq T_{w,lim} \quad (6.44)$$

Definendo il fattore di sicurezza allo scorrimento come:

$$F = \frac{T_{w,lim}}{T_w} \quad (6.45)$$

il valore della resistenza mobilitata alla base del muro è:

$$T_w = \frac{T_{w,lim}}{F} = \frac{N_w \cdot \tan \varphi_b}{F} \quad (6.46)$$

In definitiva l'equilibrio del muro è descritto dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} N_w = W_w \cdot (1 - k_v) + S_{ae}(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) \\ T_w = W_w \cdot k_h + S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) \\ T_w = \frac{T_{w,lim}}{F} = \frac{N_w \cdot \tan \varphi_b}{F} \end{cases} \quad (6.47)$$

Introducendo il valore equivalente dell'angolo di attrito base fondazione – terreno definito dalla relazione:

$$\varphi_{b,eq} = \arctan\left(\frac{\tan \varphi_b}{F}\right) \quad (6.48)$$

il sistema che governa l'equilibrio del muro si può riscrivere nella forma:

$$\begin{cases} N_w = W_w \cdot (1 - k_v) + S_{ae}(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) \\ T_w = W_w \cdot k_h + S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) \\ T_w = N_w \cdot \tan \varphi_{b,eq} \end{cases} \quad (6.49)$$

Come si può notare il sistema di equazioni è del tutto analogo a quello mostrato nell'eq. (6.18), a meno di sostituire φ_b con $\varphi_{b,eq}$ con gli stessi ragionamenti descritti nel paragrafo 6.3 si perviene alla seguente espressione in forma chiusa del coefficiente sismico equivalente definito dalla seguente relazione:

$$\tan \theta_{eq} = \frac{-2C_3A_4 + B_3B_4 - 2A_3C_4 + \sqrt{(2C_3A_4 - B_3B_4 + 2A_3C_4)^2 - (B_3^2 - 4A_3C_3) \cdot (B_4^2 - 4A_4C_4)}}{B_4^2 - 4A_4C_4} \quad (6.50)$$

in cui i coefficienti $A_3, A_4, \dots, C_3$ e C_4 sono funzioni dell'angolo $\varphi_{b,eq}$ definito dall'eq. (6.48)

$$\begin{cases}
A_3 = \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_{b,eq})}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot [-(n_q + t) \cdot \lambda + (1 + n_q + 2t) \cdot \tan \beta] - \Gamma \cdot \tan \varphi_b \cdot \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \\
B_3 = -\Gamma \cdot \tan \varphi_{b,eq} \cdot \frac{\cos(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} + \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_{b,eq})}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot \dots \\
\dots \cdot [1 + ((n_q + t) \cdot \lambda - (1 + n_q + 2t) \cdot \tan \beta) \cdot \tan \phi' + (n_q + (2 + n_q) \cdot t + t^2)] \\
C_3 = -\frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_{b,eq})}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot (1 + t) \cdot (1 + n_q + t) \cdot \tan \phi'
\end{cases} \quad (6.51)$$

$$\begin{cases}
A_4 = -\Gamma \cdot \frac{\sin(\beta + \delta + \phi)}{\cos \phi} - \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_{b,eq})}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot [-(n_q + t) \cdot \lambda + (1 + n_q + 2t) \cdot \tan \beta] \cdot \tan \phi' \\
B_4 = -\Gamma \cdot \frac{\cos(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} + \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_{b,eq})}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot \dots \\
\dots \cdot [-\tan \phi + ((n_q + t) \cdot \lambda - (1 + n_q + 2t) \cdot \tan \beta) - (n_q + (2 + n_q) \cdot t + t^2) \cdot \tan \phi'] \\
C_4 = -\frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_{b,eq})}{\cos \varphi_{b,eq}} (1 + t) \cdot (1 + n_q + t)
\end{cases} \quad (6.52)$$

6.5 Analisi parametrica

In questo paragrafo, note le espressioni del coefficiente sismico critico (eq. 6.35) e dell'angolo critico di rottura del cuneo (eq. 6.32), è stata effettuata un'analisi parametrica per analizzare gli effetti di alcuni fattori geometrici e di alcuni parametri geotecnici sulle soluzioni determinate.

Le analisi sono state realizzate facendo variare il valore del peso normalizzato

$$\Gamma = \frac{2 \cdot W_w}{\gamma \cdot H^2} \quad (6.53)$$

da un valore minimo pari a 0,6 ad un valore massimo pari a 1,6.

Le analisi sono state condotte:

- per $\phi' = 30^\circ, 35^\circ$ e 40° assumendo sempre $\delta/\phi' = \varphi_b/\phi' = 2/3$, $\beta=0$ e $i=15^\circ$;
- per $\phi' = 30^\circ$, $\varphi_b/\phi' = 1, 2/3$ e $1/2$ assumendo sempre $\delta/\phi' = 2/3$, $\beta=0$ e $i=15^\circ$.

Per quanto riguarda il sovraccarico si sono considerati i valori di $n_q=0,2$ e $t=0,2$.

Infine in tutti i casi si è assunto $\Omega=0$ e $\Omega=\pm 1/2$.

È stata analizzata contemporaneamente sia la variazione del coefficiente sismico critico che il valore del corrispondente angolo che individua il cuneo di rottura ad esso associato.

I risultati ottenuti dall'analisi sono mostrati nelle Fig. da 6.4 a 6.7.

Come si osserva dalle Figure da 6.4 a 6.7 all'aumentare del peso normalizzato del muro si osserva:

- un aumento del valore del coefficiente sismico critico;
- una diminuzione del valore dell'angolo del cuneo ad esso associato.

Ciò indica un aumento del volume di terreno coinvolto nel cinematismo di collasso in accordo con il crescente valore di $k_{h,c}$. In tutti i casi l'effetto del parametro Ω si risente maggiormente per elevati valori di $k_{h,c}$ ovvero per sistemi molto stabili.

Infine nella Figura 6.7 si è redatto un diagramma riepilogativo che tiene conto dei precedenti diagrammi realizzati, osservando che sia all'aumentare dell'angolo di attrito interno del terreno (ϕ') che l'angolo di attrito alla base della fondazione (ϕ_b) si ottengono coefficienti sismici critici più elevati e quindi muri più stabili.

La Figura 6.7 mostra un confronto tra i valori di $k_{h,c}$ determinati per i tre valori di ϕ' presi in esame nell'analisi insieme ad un confronto dei corrispondenti valori dell'angolo α che definisce il cuneo critico.

I diagrammi evidenziano il valore di Γ_0 del peso normalizzato del muro in corrispondenza del quale il sistema è in equilibrio limite statico. I valori di Γ_0 individuano il punto di nullo del diagramma che fornisce i valori di $k_{h,c}$ e contestualmente il valore di α_0 dell'angolo che individua la condizione di collasso statico per un sistema avente peso normalizzato pari a Γ_0 .

Tutti diagrammi in corrispondenza di un particolare valore dell'angolo che individua il cuneo di rottura, pari ad α_1 , Figura 6.1, presentano una discontinuità.

Questa discontinuità è in accordo con la considerazione che non appena il potenziale cuneo di rottura intercetta il sovraccarico posto sull'estradosso del terrapieno, sia il valore del coefficiente sismico critico che il relativo angolo α che definisce il cuneo critico, sono determinati con le relazioni esplicitate nel presente capitolo, mentre prima della discontinuità il potenziale cuneo critico non intercetta il carico e quindi le soluzioni non sono influenzate da quest'ultimo e si determinano con le espressioni già mostrate nel capitolo quarto del presente lavoro di tesi.

Appendice 6A - Dimostrazione analitica delle proprietà delle funzioni Φ_3 e Ψ_3

6A.1 – Proprietà della funzione Φ_3

Si considerino i coefficienti A_1 e A_2 forniti dalle eqq. (6.16) e (6.17):

$$\begin{aligned} A_1 &= [\lambda \cdot (n_q + t) - (1 + n_q + 2t) \cdot \tan \beta] \cdot (1 + \tan \theta \cdot \tan \phi') \\ A_2 &= -\frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi} \end{aligned} \quad (6A1.54)$$

Deve certamente risultare $K_{ae} > 0$ perché altrimenti la soluzione non avrebbe significato.

L'eq. (6.25) fornisce:

$$\Phi_3(\alpha, K_{ae}) = \tan^2 \alpha \cdot (A_2 \cdot K_{ae} - A_1) + \tan \alpha \cdot (B_2 \cdot K_{ae} - B_1) + (C_2 \cdot K_{ae} - C_1) = 0 \quad (6A1.55)$$

che descrive l'equazione, parametrica in K_{ae} , di una parabola nella variabile $\tan \alpha$.

Tale parabola ha sempre una concavità rivolta verso il basso, infatti risulta sempre:

$$(A_2 \cdot K_{ae} - A_1) < 0 \quad (6A1.56)$$

La condizione descritta dall'eq. (6A1.56) può essere dimostrata ragionando per assurdo.

Ipotizziamo per assurdo che risulti:

$$(A_2 \cdot K_{ae} - A_1) > 0 \quad (6A1.57)$$

se:

$$n_q = \delta = \beta = t = 0$$

allora la dimostrazione è analoga a quella riportata nel capitolo quarto nell'appendice 4A.1

se:

$$n_q = t = 0$$

$$\delta = \phi'$$

$$\beta \cong 0$$

allora la dimostrazione è analoga a quella riportata nel capitolo quarto nell'appendice 4A.1

se invece:

$$n_q \neq 0 (> 0)$$

$$t \neq 0 (> 0)$$

$$\delta = \phi'$$

$$\beta \cong 0$$

allora risulta:

$$\begin{aligned} A_1 &= \lambda \cdot (n_q + t) \cdot (1 + \tan \theta \cdot \tan \phi') \\ A_2 &= -\frac{\sin 2\phi'}{\cos \phi'} \end{aligned} \quad (6A1.58)$$

il coefficiente A_1 sarà sempre una quantità positiva mentre il coefficiente A_2 sarà sempre una quantità negativa.

Quindi la (6A1.58) fornirebbe:

$$-\frac{\sin 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot K_{ae} - \lambda \cdot (n_q + t) \cdot (1 + \tan \theta \cdot \tan \phi') > 0 \quad (6A1.59)$$

quest'ultima disuguaglianza è un assurdo perché:

– K_{ae} è sempre positivo per ipotesi;

e quindi somma algebrica di quantità in modulo tutte positive

6A.2 – Proprietà della funzione Ψ_3

Per un sistema stabile staticamente si considerino i coefficienti A_3 e A_4 forniti dalle eqq. (6.20) e (6.21):

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} \cdot [-(n_q + t) \cdot \lambda + (1 + n_q + 2t) \cdot \tan \beta] - \Gamma \cdot \tan \varphi_b \cdot \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \\ A_4 &= -\Gamma \cdot \frac{\sin(\beta + \delta + \phi)}{\cos \phi} - \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} \cdot [-(n_q + t) \cdot \lambda + (1 + n_q + 2t) \cdot \tan \beta] \cdot \tan \phi' \end{aligned} \quad (6A2.60)$$

Deve certamente risultare $\tan \theta_c > 0$ perché altrimenti la soluzione non avrebbe significato.

L'eq. (6.25) fornisce:

$$\Psi_3(\alpha, \tan \theta_c) = \tan^2 \alpha \cdot (A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3) + \tan \alpha \cdot (B_4 \cdot \tan \theta_c - B_3) + (C_4 \cdot \tan \theta_c - C_3) = 0 \quad (6A2.61)$$

che descrive l'equazione parametrica in $\tan \theta_c$ di una parabola nella variabile $\tan \alpha$.

Tale parabola ha sempre una concavità verso l'alto, infatti risulta sempre:

$$(A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3) > 0 \quad (6A2.62)$$

La condizione descritta dall'eq. (6A2.62) può essere dimostrata ragionando per assurdo.

Ipotizzando, per assurdo, che risulti:

$$(A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3) < 0 \quad (6A2.63)$$

se:

$$n_q = t = \delta = \beta = 0$$

allora la dimostrazione è analoga a quella riportata nel capitolo quarto nell'appendice 4A.1

se:

$$n_q = t = 0$$

$$\delta = \phi'$$

$$\beta \cong 0$$

allora la dimostrazione è analoga a quella riportata nel capitolo quarto nell'appendice 4A.1

se invece:

$$n_q \neq 0 (> 0)$$

$$t \neq 0 (> 0)$$

$$\delta = \varphi_b = \phi'$$

$$\beta \cong 0$$

$$(6A2.64)$$

allora risulta:

$$\begin{aligned} A_3 &= -\frac{\cos 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot (n_q + t) \cdot \lambda - \frac{\sin 2\phi'}{\cos \phi'} \tan \varphi_b \cdot \Gamma \\ A_4 &= \frac{\cos 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot (n_q + t) \cdot \lambda \cdot \tan \phi' - \frac{\sin 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot \Gamma \end{aligned} \quad (6A2.65)$$

Per cui la condizione (6A2.63) fornisce:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\cos 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot (n_q + t) \cdot \lambda \cdot \tan \phi' - \frac{\sin 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot \Gamma \right) \cdot \tan \theta + \dots \\ &\dots + \left(-\frac{\cos 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot (n_q + t) \cdot \lambda - \frac{\sin 2\phi'}{\cos \phi'} \tan \varphi_b \cdot \Gamma \right) < 0 \end{aligned} \quad (6A2.66)$$

ovvero:

$$\frac{\cos 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot (n_q + t) \cdot \lambda \cdot (\tan \theta \cdot \tan \phi' + 1) < \Gamma \cdot (\tan \theta - \tan \phi') < 0 \quad (6A2.67)$$

poiché il termine a sinistra della disuguaglianza e il valore del peso normalizzato del muro, Γ , sono sempre positivi, si può scrivere ancora:

$$(\tan \theta - \tan \phi') > \frac{\cos 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot (n_q + t) \cdot \lambda \cdot (\tan \theta \cdot \tan \phi' + 1) > 0 \quad (6A2.68)$$

e quindi ancora:

$$(\tan \theta - \tan \phi') > 0 \quad (6A2.69)$$

ovvero:

$$\tan \theta > \tan \varphi_b \quad (6A2.70)$$

Questa disuguaglianza è un assurdo. Infatti considerando il valore del coefficiente sismico critico fornito dall'approccio di RE (eq. 3.9) di seguito riportata

$$\tan \theta = \frac{k_{h,c}}{1 - \Omega \cdot k_{h,c}} = \tan \varphi_b + \frac{K_{ae}}{\Gamma} \cdot [\tan \varphi_b \cdot \sin(\delta + \beta) - \cos(\delta + \beta)] \quad (6A2.71)$$

e assumendo nulli i valori i seguenti valori:

$$\begin{aligned} \delta &= \varphi_b = \phi' \\ \beta &\cong 0 \end{aligned} \quad (6A2.72)$$

risulta:

$$\tan \theta = \tan \varphi_b - \frac{K_{ae}}{\Gamma} \cdot (\cos \phi' - \sin \phi' \cdot \tan \phi') \quad (6A2.73)$$

e quindi ancora:

$$\tan \theta = \tan \varphi_b - \frac{K_{ae}}{\Gamma} \cdot \frac{\cos 2\phi'}{\cos \phi'} \quad (6A2.74)$$

Poiché:

- K_{ae} è sempre positivo per ipotesi;
- Γ è sempre positivo per ipotesi;
- $\frac{\cos 2\phi'}{\cos \phi'}$ sempre positivo;

risulta:

$$\tan \theta < \tan \varphi_b \quad (6A2.75)$$

Appendice 6B – Determinazione dell'espressione analitica della relazione per la valutazione del coefficiente di spinta attiva

L'equazione (6.36):

$$K_{ae} = \frac{-2C_1A_2 + B_1B_2 - 2A_1C_2 - \sqrt{(2C_1A_2 - B_1B_2 + 2A_1C_2)^2 - (B_1^2 - 4A_1C_1) \cdot (B_2^2 - 4A_2C_2)}}{B_2^2 - 4A_2C_2} \quad (6B.76)$$

può essere riscritta nella seguente forma:

$$K_{ae} = \frac{a - \sqrt{b}}{c} \quad (6B.77)$$

dove:

$$\begin{aligned} a &= -2C_1A_2 + B_1B_2 - 2A_1C_2 \\ b &= (2C_1A_2 - B_1B_2 + 2A_1C_2)^2 - (B_1^2 - 4A_1C_1) \cdot (B_2^2 - 4A_2C_2) \\ c &= B_2^2 - 4A_2C_2 \end{aligned} \quad (6B.78)$$

Utilizzando le espressioni dei coefficienti A_1 , B_1 , C_1 e A_2 , B_2 , C_2 forniti dalle eqq. (6.16) e (6.17) si ottiene:

$$K_{ae} = \frac{1}{8} \cdot \cos^2 \phi' \cdot \sec^2(\beta + \delta + \phi') \cdot (a - \sqrt{b}) \quad (6B.79)$$

con:

$$\begin{aligned} a &= 4 \cdot \sec \theta \cdot \sec^2 \phi' \cdot \dots \\ &\dots \left\{ \cos(\beta + \delta + \phi') \cdot [t \cdot (n_q + t) \cdot \cos(\beta + \theta - \phi') \cdot \sec \beta + (2 + n_q \cdot (2 + t) + t \cdot (4 + t)) \cdot \cos(\beta - \theta + \phi') \cdot \sec \beta - 2t \cdot (n_q + t) \cdot \cot i \cdot \sin(\theta - \phi')] + \dots \right\} \\ &\dots \left\{ \dots - 4 \cdot (1 + t) \cdot (1 + n_q + t) \cdot \sin(\theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi') \right\} \end{aligned} \quad (6B.80)$$

$$\begin{aligned} b &= -128 \cdot (1 + t) \cdot (1 + n_q + t) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot [(1 + t) \cdot (1 + n_q + t) \cdot \cos(i - \delta - \phi') + t \cdot (n_q + t) \cdot \cos(i - 2\beta - \delta - \phi') - (1 + n_q + 2t) \cdot \cos(i + \delta + \phi')] \cdot \dots \\ &\dots \cdot \csc i \cdot \sec \beta \cdot \sec^2 \theta \cdot \sec^4 \phi' \cdot \sin(\theta - \phi') \end{aligned} \quad (6B.81)$$

analizzando attentamente il termine:

$$[2 + n_q \cdot (2 + t) + t \cdot (4 + t)] \quad (6B.82)$$

dopo semplici passaggi è facile dimostrare che esso è pari a:

$$t \cdot (n_q + t) + 2 \cdot (1 + n_q + 2t) \quad (6B.83)$$

e anche il termine:

$$(1 + t) \cdot (1 + n_q + t) \quad (6B.84)$$

dopo semplici passaggi è facile dimostrare che risulta pari a:

$$t \cdot (n_q + t) + 2 \cdot (1 + n_q + 2t) \quad (6B.85)$$

inoltre la quantità:

$$128$$

si può scrivere come:

$$128 = 2^6 \cdot 2$$

fatte queste premesse sostituendo i termini a e b esplicitati nell'eqq. (6B.80 e 6B.81) dopo le opportune semplificazioni la (6B.79) si può riscrivere come:

$$K_{ae} = \frac{\cos \theta}{2 \cdot \cos^2(\beta + \delta + \phi')} \cdot \left\{ \cos(\beta + \delta + \phi') \cdot [t \cdot (n_q + t) \cdot \cos(\beta + \theta - \phi') \cdot \sec \beta + [t \cdot (n_q + t) + 2 \cdot (1 + n_q + 2t)] \cdot \cos(\beta - \theta + \phi') \cdot \sec \beta - 2t \cdot (n_q + t) \cot i \cdot \sin(\theta - \phi')] + \dots \right\} + \dots$$

$$\dots - 4 \cdot [t \cdot (n_q + t) + 2 \cdot (1 + n_q + 2t)] \cdot \sin(\theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi')$$

$$\dots - 2 \sqrt{-2 \cdot [t \cdot (n_q + t) + 2 \cdot (1 + n_q + 2t)] \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot [[t \cdot (n_q + t) + 2 \cdot (1 + n_q + 2t)] \cdot \cos(i - \delta - \phi') + t \cdot (n_q + t) \cdot \cos(i - 2\phi - \delta - \phi') - (1 + n_q + 2t) \cos(i + \delta + \phi)] \cdot \dots}$$

$$\dots \cdot \csc i \cdot \sec \beta \cdot \sin(\theta - \phi') \quad (6B.86)$$

esplicitando tutti i termini dentro la parentesi graffa dell'eq. (6B.86) e raccogliendo per fattore comune otteniamo:

$$t \cdot (n_q + t) \cdot \cos(\beta + \delta + \phi') \cdot \cos(\beta + \theta - \phi') \cdot \sec \beta + t \cdot (n_q + t) \cdot \cos(\beta + \delta + \phi') \cdot \cos(\beta - \theta + \phi') \cdot \sec \beta - 2t \cdot (n_q + t) \cdot \cos(\beta + \delta + \phi') \cdot \cot i \cdot \sin(\theta - \phi') + \dots$$

$$\dots - 4t \cdot (n_q + t) \cdot \sin(\theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi') = t \cdot (n_q + t) \cdot 2 \cdot \csc i \cdot [\sin(i - \beta - \delta - \theta) + \cos(i + \theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi')] \quad (6B.87)$$

$$2 \cdot (1 + n_q + 2t) \cdot \cos(\beta + \delta + \phi') \cdot \cos(\beta - \theta + \phi') \cdot \sec \beta - 4 \cdot (1 + n_q + 2t) \cdot \sin(\theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi') = (1 + n_q + 2t) \cdot 2 \cdot \sec \beta \cdot \dots$$

$$\dots [\cos(\delta + \theta) - \sin(\beta + \theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi')] \quad (6B.88)$$

quindi il termine dentro la parentesi graffa dell'eq. (6B.86) si può scrivere come:

$$2 \cdot \{t \cdot (n_q + t) \cdot \csc i \cdot [\sin(i - \beta - \delta - \theta) + \cos(i + \theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi')] + (1 + n_q + 2t) \cdot \sec \beta \cdot [\cos(\delta + \theta) - \sin(\beta + \theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi')]\} \quad (6B.89)$$

esplicitando tutti i termini sotto la radice dell'eq. (6B.86) e raccogliendo per fattore comune otteniamo:

$$t \cdot (n_q + t) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \cos(i - \delta - \phi') \cdot \sin(\theta - \phi') + t \cdot (n_q + t) \cdot \cos(i - \delta - \phi') \cdot \cos(i - 2\beta - \delta - \phi') \cdot \sin(\theta - \phi') = \dots$$

$$\dots = 2 \cdot \cos \beta \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \sin(\theta - \phi') \cdot t \cdot (n_q + t) \quad (6B.90)$$

$$(1 + n_q + 2t) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \cos(i - \delta - \phi') \cdot \sin(\theta - \phi') - (1 + n_q + 2t) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \cos(i + \delta + \phi') \cdot \sin(\theta - \phi') = \dots$$

$$\dots = 2 \cdot \sin i \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \sin(\delta + \phi') \cdot \sin(\theta - \phi') \cdot (1 + n_q + 2t) \quad (6B.91)$$

quindi il termine sotto radice dell'eq. (6B.86) si può scrivere come:

$$4 \cdot \{\cos \beta \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \sin(\theta - \phi') \cdot t \cdot (n_q + t) + \sin i \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \sin(\delta + \phi') \cdot \sin(\theta - \phi') \cdot (1 + n_q + 2t)\} \cdot \dots$$

$$[t \cdot (n_q + t) + 2 \cdot (1 + n_q + 2t)] \cdot \csc i \cdot \sec \beta \quad (6B.92)$$

quindi la (6B.86) si può scrivere come:

$$t \cdot (n_q + t) \cdot \csc i \cdot [\sin(i - \beta - \delta - \theta) + \cos(i + \theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi')] + (1 + n_q + 2t) \cdot \sec \beta \cdot [\cos(\delta + \theta) - \sin(\beta + \theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi')] + \dots$$

$$\dots - 2 \sqrt{\frac{\csc i \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \sin(\theta - \phi') \cdot t \cdot (n_q + t) + \sec \beta \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \sin(\delta + \phi') \cdot \sin(\theta - \phi') \cdot (1 + n_q + 2t)}{\cos^2(\beta + \delta + \phi') \cdot \cos \theta}} \cdot [t \cdot (n_q + t) + 2 \cdot (1 + n_q + 2t)] \quad (6B.93)$$

moltiplicando e dividendo tutto per $(\cos \beta \cdot \sin i)$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
& t \cdot (n_q + t) \cdot \cos \beta \cdot [\sin(i - \beta - \delta - \theta) + \cos(i + \theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi')] + (1 + n_q + 2t) \cdot \sin i \cdot [\cos(\delta + \theta) - \sin(\beta + \theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi')] + \dots \\
& \dots - 2 \sqrt{\frac{\left\{ \cos^2 \beta \cdot \sin i \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \sin(\phi' - \theta) \cdot t \cdot (n_q + t) + \dots \right.}{\left. + \dots \sin^2 i \cdot \cos \beta \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \sin(\delta + \phi') \cdot \sin(\phi' - \theta) \cdot (1 + n_q + 2t) \right\} \cdot [t \cdot (n_q + t) + 2 \cdot (1 + n_q + 2t)]}{\cos^2(\beta + \delta + \phi') \cdot \cos \theta \cdot \cos \beta \cdot \sin i}} \quad (6B.94)
\end{aligned}$$

analizzando il termine prima della radice raccogliendo per fattori comuni si ottiene:

$$\begin{aligned}
& [t \cdot (n_q + t) + (1 + n_q + 2t)] \cdot \{ \cos \beta \cdot [\sin(i - \beta - \delta - \theta) + \cos(i + \theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi')] + \sin i \cdot [\cos(\delta + \theta) - \sin(\beta + \theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi')] \} + \dots \\
& \dots - [\sin(i - \beta - \delta - \theta) + \cos(i + \theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi')] \cdot \cos \beta \cdot (1 + n_q + 2t) - [\cos(\delta + \theta) - \sin(\beta + \theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi')] \cdot \sin i \cdot t \cdot (n_q + t) \quad (6B.95)
\end{aligned}$$

aggiungendo e sottraendo i termini:

$$\sin i \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) + \cos(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \sin(\phi' - \theta) = a + b \quad (6B.96)$$

dove con:

$$\begin{aligned}
a &= \sin i \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \\
b &= \cos(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \sin(\phi' - \theta) \quad (6B.97)
\end{aligned}$$

e

$$\cos \beta \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) + \sin(\delta + \phi') \cdot \sin(\phi' - \theta) = c + d \quad (6B.98)$$

dove con:

$$\begin{aligned}
c &= \cos \beta \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \\
d &= \sin(\delta + \phi') \cdot \sin(\phi' - \theta) \quad (6B.99)
\end{aligned}$$

alla (6B.95) si ottiene:

$$\begin{aligned}
& \left[t \cdot (n_q + t) + (1 + n_q + 2t) \right] \cdot \left\{ \cos \beta \cdot [\sin(i - \beta - \delta - \theta) + \cos(i + \theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi') + (a + b) - (a + b)] + \dots \right\} + \dots \\
& \dots - [\sin(i - \beta - \delta - \theta) + \cos(i + \theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi') + (a + b) - (a + b)] \cdot \cos \beta \cdot (1 + n_q + 2t) + \dots \\
& \dots - [\cos(\delta + \theta) - \sin(\beta + \theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi') + (c + d) - (c + d)] \cdot \sin i \cdot t \cdot (n_q + t)
\end{aligned} \tag{6B.100}$$

poiché:

$$[\sin(i - \beta - \delta - \theta) + \cos(i + \theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi') - \sin i \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) - \cos(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \sin(\phi' - \theta)] = 0 \tag{6B.101}$$

e

$$[\cos(\delta + \theta) - \sin(\beta + \theta - \phi') \cdot \sin(\beta + \delta + \phi') - \cos \beta \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) - \sin(\delta + \phi') \cdot \sin(\phi' - \theta)] = 0 \tag{6B.102}$$

la (6B.100) risulta ancora pari a:

$$[t \cdot (n_q + t) + (1 + n_q + 2t)] \cdot [\cos \beta \cdot (a + b) + \sin i \cdot (c + d)] - (a + b) \cdot \cos \beta \cdot (1 + n_q + 2t) - (c + d) \cdot \sin i \cdot t \cdot (n_q + t) \tag{6B.103}$$

dopo semplici passaggi si ottiene ancora:

$$t \cdot (n_q + t) \cdot \cos \beta \cdot (a + b) + (1 + n_q + 2t) \cdot \sin i \cdot (c + d) \tag{6B.104}$$

ricordando le posizioni fatte nelle (6B.97 e 6B.99) l'espressione del coefficiente di spinta si può scrivere in definitiva come:

$$\begin{aligned}
K_{ae}^{\gamma, q} &= \frac{t \cdot (n_q + t) \cdot \cos \beta \cdot (a + b) + (1 + n_q + 2t) \cdot \sin i \cdot (c + d) - 2\sqrt{t \cdot (n_q + t) \cdot \cos^2 \beta \cdot (a \cdot b) + (1 + n_q + 2t) \cdot \sin^2 i \cdot (c \cdot d)} \cdot \sqrt{t \cdot (n_q + t) \cdot (1 + n_q + 2t)}}{\cos \beta \cdot \cos \theta \cdot \sin i \cdot \cos^2(\beta + \delta + \phi)}
\end{aligned} \tag{6B.105}$$

dove:

$$\begin{aligned}
a &= \sin i \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \\
b &= \cos(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \sin(\phi - \theta) \\
c &= \cos \beta \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \\
d &= \sin(\delta + \phi) \cdot \sin(\phi - \theta)
\end{aligned} \tag{6B.106}$$

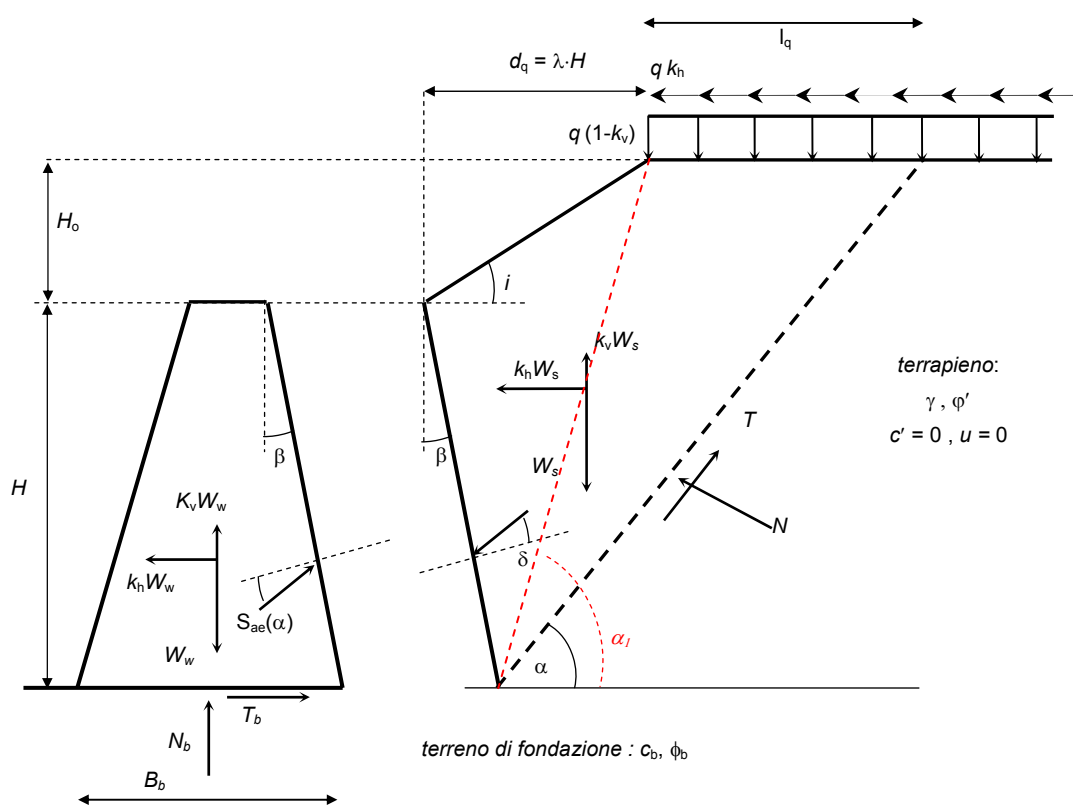


Figura 6.1 – Schema di riferimento adottato per l'analisi MB

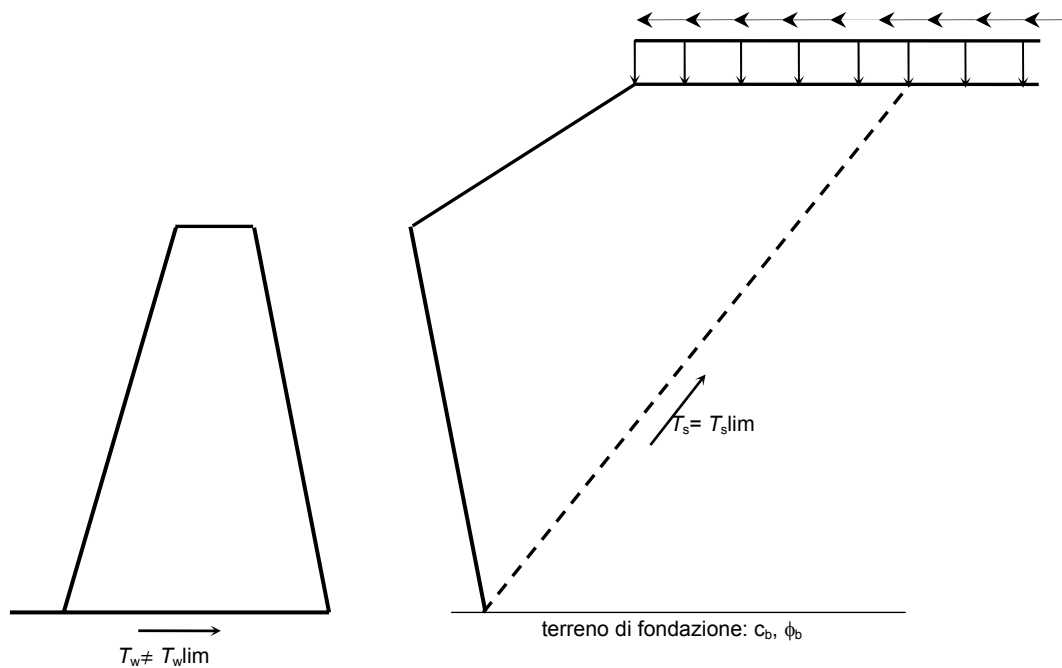
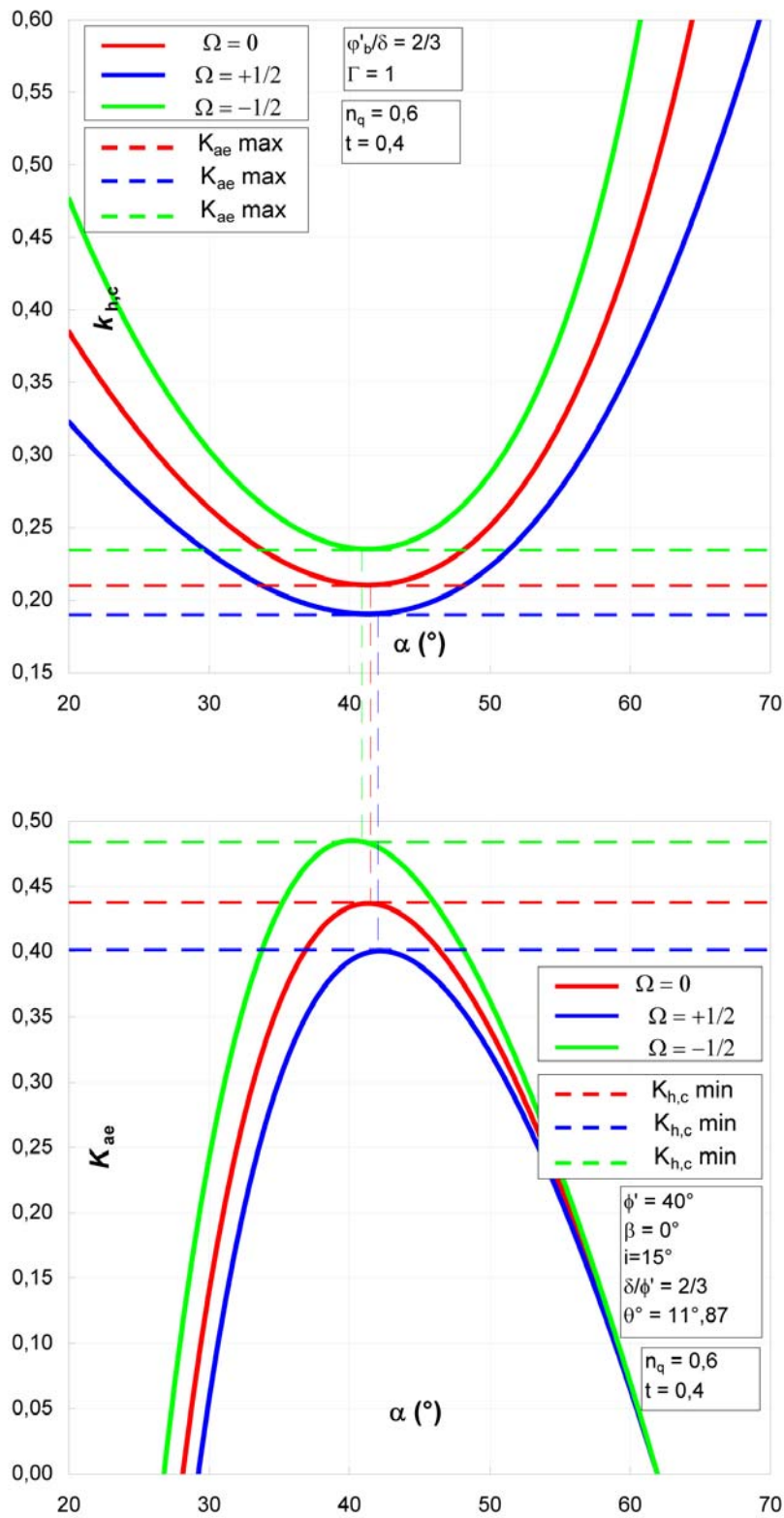


Figura 6.2 – Schema di riferimento per la determinazione del coefficiente sismico equivalente

Figura 6.3 – Variazione di K_{ae} e di $k_{h,c}$ con l'angolo α

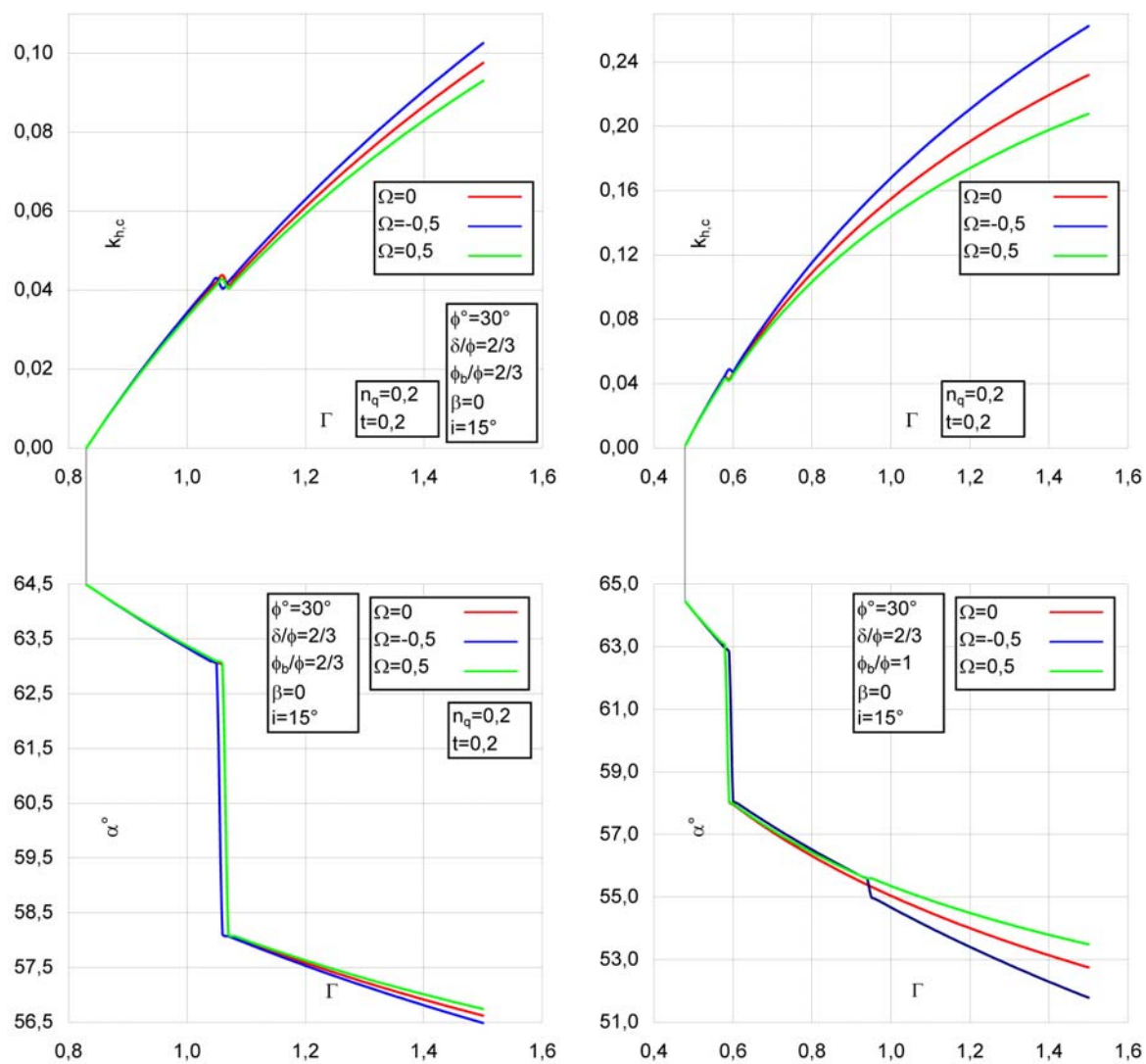
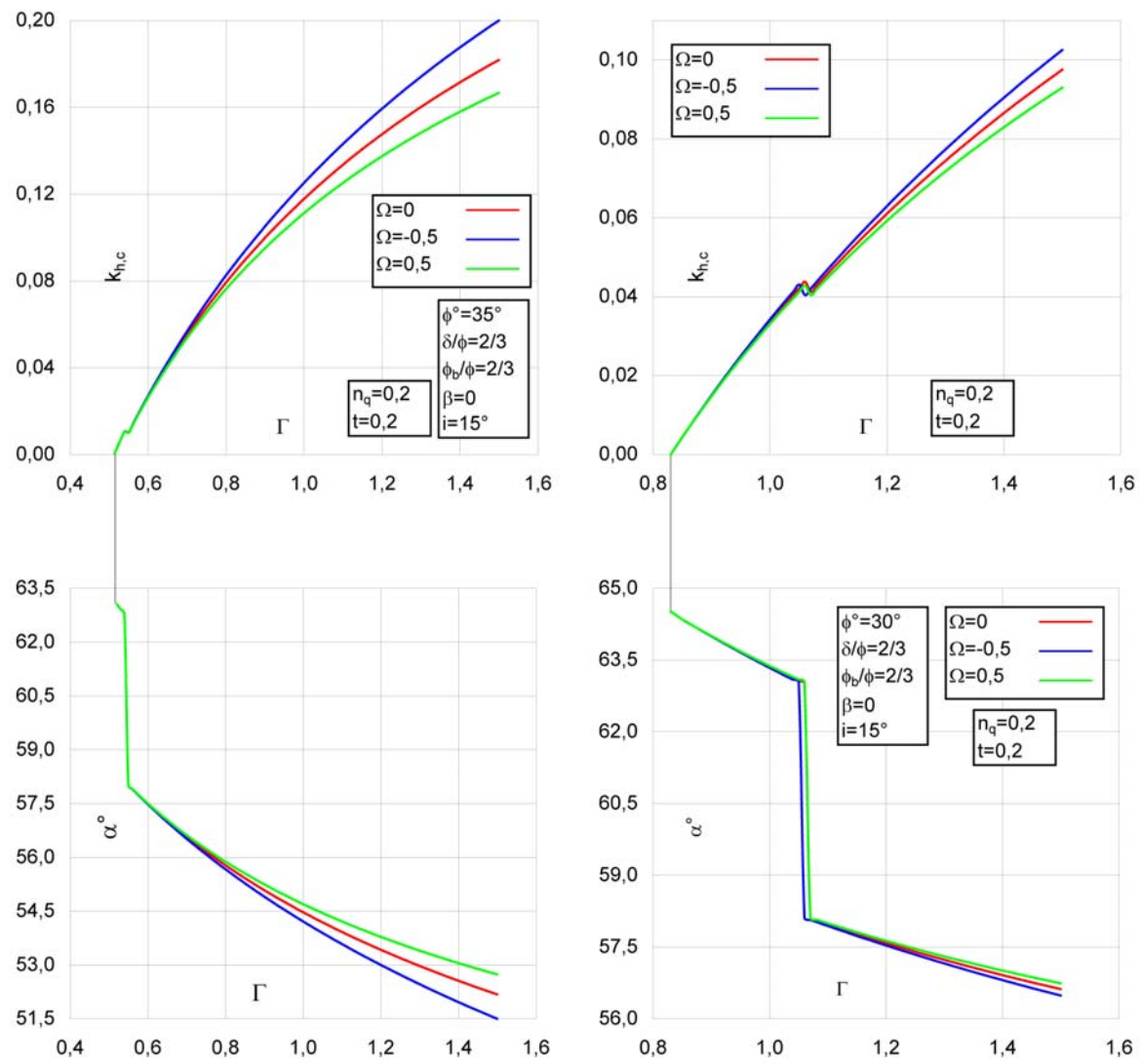


Figura 6.4 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi' = 30^\circ$


 Figura 6.5 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi' = 35^\circ$

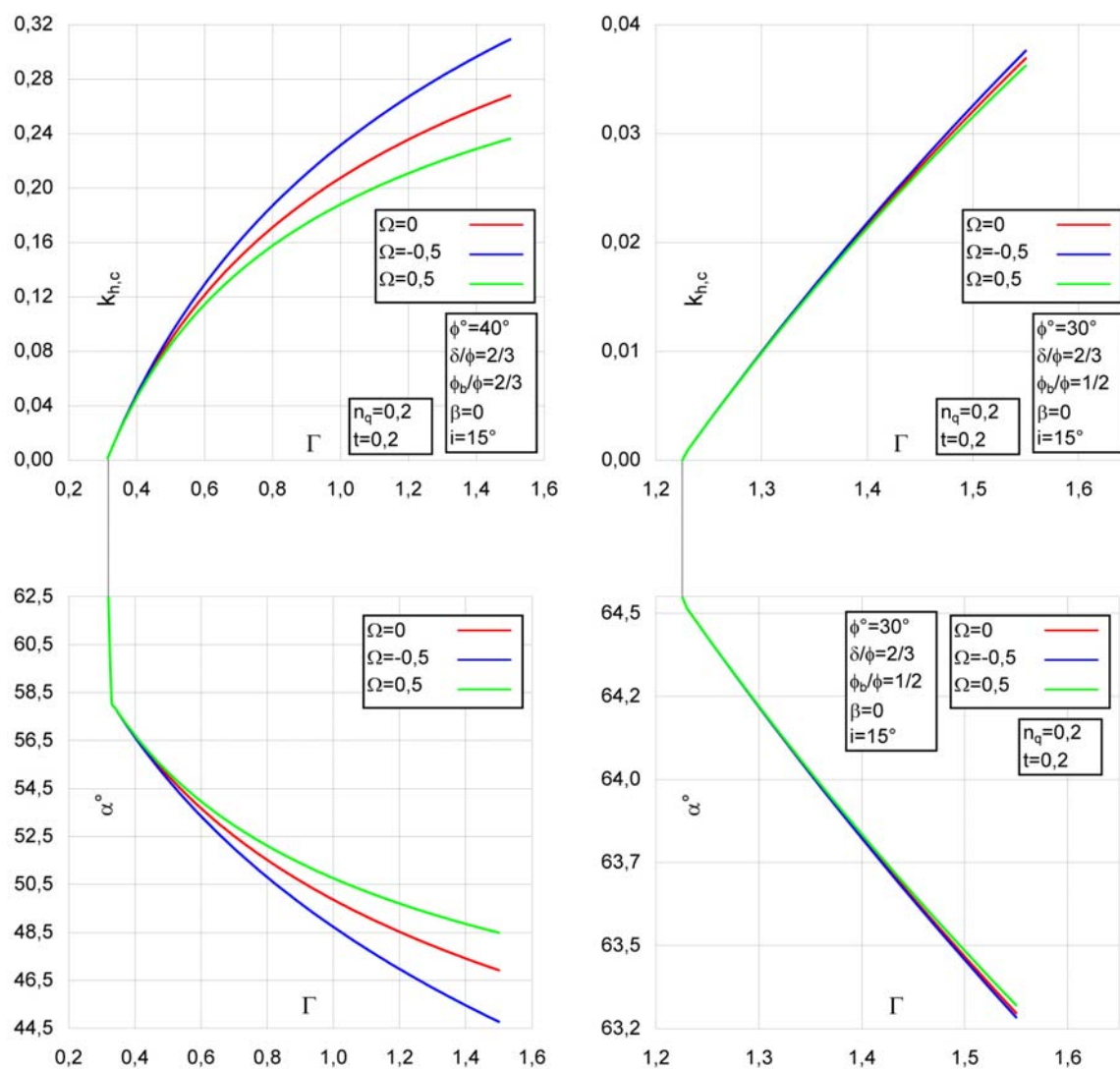


Figura 6.6 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi' = 40^\circ$

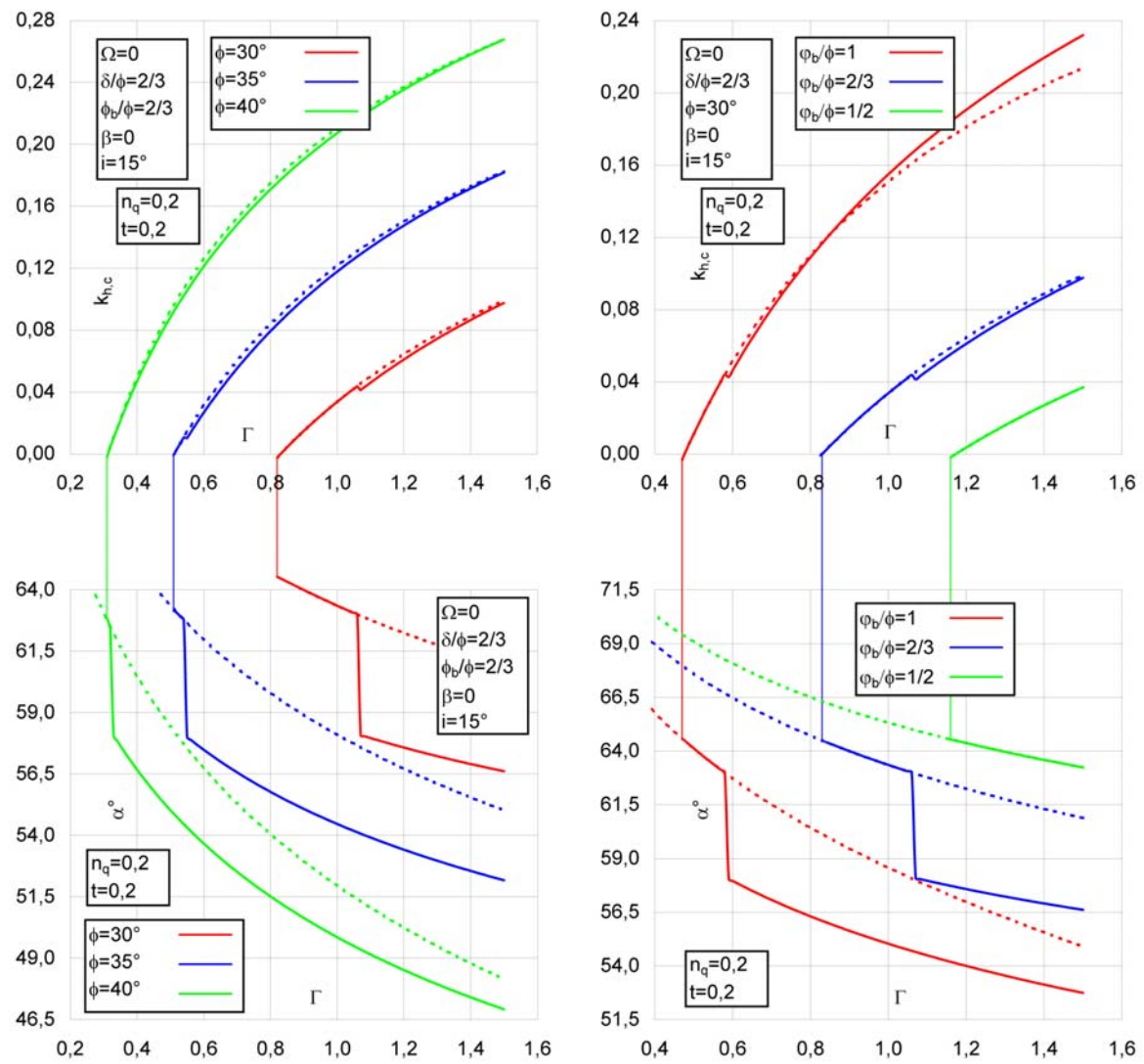


Figura 6.7 – Confronto tra i valori di $k_{n,c}$ e α forniti dagli abachi di Fig. 6.4, 6.5 e 6.6 per il caso $\Omega=0$

CAPITOLO SETTIMO

SCHEMA DI MURO DI SOSTEGNO CON TERRAPIENO INCLINATO E SOGGETTO AD UN CARICO LINEARE

7.1 Generalità

In questo capitolo sarà esaminato lo schema di muro di sostegno con terrapieno inclinato e soggetto a carico lineare. Per tale schema l'approccio multi blocco sarà applicato con riferimento alle notazioni mostrate in Figura 7.1.

La configurazione del sistema, o più genericamente le condizioni al contorno, influiscono sullo schema di equilibrio limite e quindi influenzano le grandezze che individuano le condizioni critiche per l'opera di sostegno, ovvero il coefficiente sismico critico $k_{h,c}$ del sistema e l'inclinazione del piano di rottura all'interno del terrapieno α_c .

7.2 Schema di riferimento

La procedura proposta in per la risoluzione del problema è inquadrabile nell'ambito degli approcci multi blocco (di seguito MB) e fa utilizzo del metodo dell'equilibrio limite. Il sistema muro-terreno preso in esame è mostrato nella Figura 7.1 insieme alle notazioni utilizzate per descrivere le variabili prese in esame nell'analisi. Il terrapieno è supposto asciutto ($u = 0$) e dotato di sola resistenza attritiva ($c' = 0$). La resistenza allo scorrimento alla base del muro è descritta dai parametri c_b e φ_b .

Lo schema prevede la possibile presenza di un sovraccarico lineare F , agente sull'estradosso inclinato del terrapieno, a distanza d_F dalla testa del muro. Nell'analisi il sovraccarico F e la distanza d_F sono descritti dai parametri adimensionali n_F e λ , definiti come:

$$n_F = \frac{2 \cdot F}{\gamma \cdot H^2} \quad (7.1)$$

$$\lambda = \frac{d_F}{H} \quad (7.2)$$

L'azione sismica è considerata agente sul terrapieno, sul carico su esso agente e sul muro ed è descritta dalle componenti orizzontali k_h e verticale k_v del coefficiente sismico e dai parametri θ e Ω definiti dalle seguenti relazioni:

$$\tan \theta = \frac{k_h}{1 - k_v} \quad (7.3)$$

$$\Omega = \frac{k_v}{k_h} \quad (7.4)$$

θ è correlato ad Ω mediante la relazione:

$$\Omega = \frac{1}{k_h} - \frac{1}{\tan \theta} \quad (7.5)$$

La stabilità del sistema, sia in campo statico che dinamico è affidata esclusivamente al muro di sostegno. La resistenza offerta dall'opera di contenimento ha origine lungo la superficie di contatto suolo – fondazione, ed è diretta costantemente in opposizione al moto generato dalle eccitazioni dinamiche esterne. Tale azione è genericamente indicata come taglio alla base T_b , ed il suo modulo non è costante ma influenzato dall'equilibrio del sistema. Esiste comunque per essa un limite superiore, dipendente sia dal peso del manufatto, che dal coefficiente di attrito alla base del muro ($\tan \varphi_b$), definito a partire dall'angolo di attrito suolo – fondazione φ_b e rappresentativo del vincolo di aderenza osservato in corrispondenza al piano di contatto. Il valore massimo del taglio alla base, comunemente indicato come forza d'attrito, rimane definito dalla seguente relazione:

$$T_{lim,b} = c_b \cdot B_b + W_w \cdot \tan \varphi_b \quad (7.6)$$

in cui B_b è la larghezza della base della fondazione e W_w è il peso del manufatto.

Nella 7.6 trascurando il contributo dovuto alla coesione alla base $c_b=0$ risulta:

$$T_b = T_{lim,b} = W_w \cdot \tan \varphi_b \quad (7.7)$$

Infine l'azione laterale esercitata dal terrapieno sul manufatto è correlata al piano di scorrimento individuato in condizioni plastiche. Il suo modulo rappresenta la risultante orizzontale delle tensioni normali e tangenziali, mobilitate lungo la superficie di rottura. Una delle ipotesi fondamentali, per risolvere il problema, consiste nel supporre che, raggiunta la condizione di equilibrio limite, le tensioni tangenziali, mobilitate lungo la presunta superficie di scorrimento, rispettino la nota relazione:

$$\tau_{lim} = \sigma_{lim} \cdot \tan \phi' \quad (7.8)$$

che integrata all'intero piano di rottura diventa:

$$T = N \cdot \tan \phi' \quad (7.9)$$

7.3 Determinazione del coefficiente di spinta attiva e del coefficiente sismico critico

Nello spirito dell'approccio *MB* la soluzione del problema (ovvero i valori di $k_{h,c}$ e di K_{ae}) è ricercata risolvendo simultaneamente le equazioni che descrivono le condizioni di equilibrio del cuneo di spinta (supposto in stato limite attivo) e le equazioni che descrivono le condizioni di equilibrio limite del muro ipotizzando che, per effetto delle azioni instabilizzanti di natura sismica, esso possa traslare lungo il piano di posa della fondazione. Nell'analisi si prende in esame una superficie di potenziale scorrimento del terrapieno piana individuata dall'angolo α che essa forma con l'orizzontale (Fig. 7.1).

Il cuneo di terreno individuato da tale generica superficie è in equilibrio sotto l'azione del proprio peso W_s , delle corrispondenti azioni inerziali $k_h \cdot W_s$ e $k_v \cdot W_s$, della risultante del sovraccarico q e delle corrispondenti azioni inerziali $k_h \cdot F$ e $k_v \cdot F$, dell'azione mutua $S_{ae}(\alpha)$ che muro e terrapieno si scambiano e, infine, delle azioni N e T risultanti delle tensioni normali e tangenziali mobilitate lungo la superficie di potenziale scorrimento (Fig. 7.1).

Le condizioni di equilibrio limite ($k_h = k_{h,c}$, $k_v = k_{v,c}$) del cuneo di terreno sono descritte dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} W_s \cdot (1 \pm \Omega \cdot k_{h,c}) = S_{ae}(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) + T \cdot \sin(\alpha) + N \cdot \cos(\alpha) - F \cdot (1 \pm \Omega \cdot k_{h,c}) \\ W_s \cdot k_{h,c} = S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) + T \cdot \cos(\alpha) - N \cdot \sin(\alpha) - F \cdot k_{h,c} \\ T = T_{lim} = N \cdot \tan \phi' \end{cases} \quad (7.10)$$

con:

$$W_s = \frac{\gamma \cdot H^2}{2} \cot \alpha \cdot \left(1 + \frac{\cot \alpha \cdot \tan i}{1 - \cot \alpha \cdot \tan i} \right) \quad (7.11)$$

$$S_{ae}(\alpha) = \frac{\gamma \cdot H^2}{2} K_{ae}(\alpha) \cdot (1 \pm \Omega \cdot k_{h,c}) \quad (7.12)$$

Esplicitando tutto in funzione di $\tan \alpha$, dopo le opportune semplificazioni e sostituzioni, il sistema di equazioni descritto dalla (7.8), può essere riscritto con la seguente equazione:

$$K_{ae}(\alpha) = \frac{A_1 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_1 \cdot \tan \alpha + C_1}{A_2 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_2 \cdot \tan \alpha + C_2} = \frac{\Phi_1(\alpha)}{\Phi_2(\alpha)} \quad (7.13)$$

che descrive in forma adimensionale, la condizione di equilibrio limite del cuneo di terreno;

I coefficienti A_1 , B_1 , C_1 e A_2 , B_2 , C_2 , relativi al coefficiente di spinta K_{ae} (7.13), sono definiti dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} A_1 = -[n_F + \tan\beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan\beta)] \cdot (1 + \tan\theta \cdot \tan\phi) \\ B_1 = -\frac{\cos(\beta - \theta + \phi)}{\cos\beta \cdot \cos\theta \cdot \cos\phi} \cdot (1 + \tan\beta \cdot \tan i) + n_F \cdot \frac{\sin(i - \theta + \phi)}{\cos i \cdot \cos\theta \cdot \cos\phi} \\ C_1 = [-1 + \tan i \cdot (n_F - \tan\beta)] \cdot (\tan\theta - \tan\phi) \end{cases} \quad (7.14)$$

$$\begin{cases} A_2 = -\frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos\phi'} \\ B_2 = \frac{-\cos(i + \beta + \delta + \phi')}{\cos i \cdot \cos\phi'} \\ C_2 = \frac{\cos(\beta + \delta + \phi') \cdot \tan i}{\cos\phi'} \end{cases} \quad (7.15)$$

Essi si riferiscono alle condizioni di equilibrio del cuneo di terreno e dipendono esclusivamente dalla geometria del terrapieno (i , β), dall'angolo di resistenza al taglio ϕ' del terreno che lo costituisce, dall'angolo di attrito muro-terreno δ , dal parametro θ definito dalla (7.3) e dalla particolare condizione di carico n_F definiti dalle eqq. (7.1) e (7.2).

Il muro è in equilibrio sotto l'azione del proprio peso W_w e delle corrispondenti azioni inerziali $k_h \cdot W_w$ e $k_v \cdot W_w$, dell'azione mutua $S_{ae}(\alpha)$ e, infine, delle azioni N_b e T_b che si mobilitano alla base della fondazione del muro (Fig. 7.1). In condizioni di equilibrio limite ($k_h = k_{h,c}$, $k_v = k_{v,c}$), la resistenza allo scorrimento lungo il piano di posa della fondazione è interamente mobilitata e l'equilibrio del muro è descritto dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} N_b = W_w \cdot (1 \pm k_v) + S_{ae}(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) \\ T_b = W_w \cdot k_h + S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) \\ T_b = T_{lim,b} = N_b \cdot \tan\phi_b \end{cases} \quad (7.16)$$

Dove $S_{ae}(\alpha)$ è già stata definita dalle equazioni 7.12 e 7.13, mentre W_w rappresenta il peso dell'opera.

Esplicitando tutto in funzione di $\tan \alpha$, dopo le opportune semplificazioni e sostituzioni, il sistema di equazioni descritto dalla (7.16), può essere riscritto con la seguente equazione:

$$\tan \theta_c(\alpha) = \frac{k_{h,c}(\alpha)}{1 \pm \Omega \cdot k_{h,c}(\alpha)} = \frac{A_3 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_3 \cdot \tan \alpha + C_3}{A_4 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_4 \cdot \tan \alpha + C_4} = \frac{\Psi_1(\alpha)}{\Psi_2(\alpha)} \quad (7.17)$$

che descrive in forma adimensionale, la condizione di equilibrio limite del muro;

I coefficienti A_3 , B_3 , C_3 e A_4 , B_4 , C_4 , relativi al parametro θ_c , sono definiti dalle seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{aligned} A_3 &= \frac{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos i \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_b} \cdot \tan \beta - \Gamma \cdot \tan \varphi_b \cdot \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \\ B_3 &= \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} \cdot [1 + n_F + \tan \beta \cdot (\tan i - (1 + \tan i \cdot \tan \beta) \cdot \tan \phi')] + \dots \\ &\dots - \Gamma \cdot \tan \varphi_b \cdot \frac{\cos(i + \beta + \delta + \phi')}{\cos i \cdot \cos \phi'} \\ C_3 &= -\frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} \cdot \tan \phi' \cdot (1 + n_F + \tan i \cdot \tan \beta) + \Gamma \cdot \frac{\cos(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \tan i \cdot \tan \varphi_b \end{aligned} \right. \quad (7.18)$$

$$\left\{ \begin{aligned} A_4 &= -\Gamma \cdot \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} - \frac{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos i \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_b} \cdot \tan \beta \cdot \tan \phi' \\ B_4 &= -\Gamma \cdot \frac{\cos(i + \beta + \delta + \phi')}{\cos i \cdot \cos \phi'} - \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} \cdot [n_F \cdot \tan \phi' + (1 + \tan i \cdot \tan \beta) \cdot (\tan \beta + \tan \phi')] \\ C_4 &= \Gamma \cdot \frac{\cos(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \tan i - \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} \cdot (1 + n_F + \tan i \cdot \tan \beta) \end{aligned} \right. \quad (7.19)$$

Essi si riferiscono alle condizioni di equilibrio limite del muro e, oltre che da i , β , ϕ' , δ , θ , e n_q dipendono, anche, dal peso normalizzato Γ del muro, dal rapporto Ω e dall'angolo di attrito terreno-fondazione φ_b .

Le equazioni 7.10 e 7.16 costituiscono un sistema di sei equazioni nelle sei incognite N , T , N_b , T_b , S_{ae} e $k_{h,c}$. Procedendo per sostituzione è possibile mostrare che tale sistema può essere ricondotto al sistema costituito dalle 7.13 e 7.17 nelle due incognite $K_{ae}(\alpha)$ e $\tan \theta_c$:

$$\left\{ \begin{aligned} K_{ae}(\alpha) &= \frac{A_1 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_1 \cdot \tan \alpha + C_1}{A_2 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_2 \cdot \tan \alpha + C_2} = \frac{\Phi_1(\alpha)}{\Phi_2(\alpha)} \\ \tan \theta_c(\alpha) &= \frac{k_{h,c}(\alpha)}{1 \pm \Omega \cdot k_{h,c}(\alpha)} = \frac{A_3 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_3 \cdot \tan \alpha + C_3}{A_4 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_4 \cdot \tan \alpha + C_4} = \frac{\Psi_1(\alpha)}{\Psi_2(\alpha)} \end{aligned} \right. \quad (7.20)$$

In cui θ_c è il valore di θ calcolato per $k_h = k_{h,c}$ e $k_v = \Omega \cdot k_{h,c}$ mentre K_{ae} è un coefficiente di spinta attiva per le condizioni sismiche che definisce la spinta attiva S_{ae} dovuta sia al peso proprio del terreno che al carico F .

Ciascuna delle eq. 7.20 descrive, in forma adimensionale, le condizioni di equilibrio limite del cuneo di terreno e del muro, e pertanto la loro simultanea risoluzione individua la coppia θ_c , K_{ae} che descrive la soluzione cercata.

Al variare dei coefficienti K_{ae} e $\tan \theta_c$ esisteranno ∞^4 soluzioni che soddisfano il sistema descritto dalle equazioni 7.20; il problema in altri termini risulta indeterminato, sarà pertanto indispensabile determinare l'ulteriore condizione complementare che consente di giungere ad una soluzione univoca.

Introducendo le posizioni:

$$\begin{aligned}\Phi_1(\alpha) &= A_1 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_1 \cdot \tan \alpha + C_1 \\ \Phi_2(\alpha) &= A_2 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_2 \cdot \tan \alpha + C_2\end{aligned}\quad (7.21)$$

$$\begin{aligned}\Psi_1(\alpha) &= A_3 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_3 \cdot \tan \alpha + C_3 \\ \Psi_2(\alpha) &= A_4 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_4 \cdot \tan \alpha + C_4\end{aligned}\quad (7.22)$$

che definiscono, tutte, funzioni paraboliche della variabile $\tan \alpha$ il sistema di eq. 7.20 può essere riscritto nella forma sintetica:

$$\begin{cases} \Phi_3(\alpha, K_{ae}) = \Phi_2(\alpha) \cdot K_{ae}(\alpha) - \Phi_1(\alpha) = 0 \\ \Psi_3(\alpha, \theta_c) = \Psi_2(\alpha) \cdot \tan \theta_c(\alpha) - \Psi_1(\alpha) = 0 \\ \tan^2 \alpha \cdot (A_2 \cdot K_{ae} - A_1) + \tan \alpha \cdot (B_2 \cdot K_{ae} - B_1) + (C_2 \cdot K_{ae} - C_1) = 0 \\ \tan^2 \alpha \cdot (A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3) + \tan \alpha \cdot (B_4 \cdot \tan \theta_c - B_3) + (C_4 \cdot \tan \theta_c - C_3) = 0 \end{cases} \quad (7.23)$$

Il sistema di equazioni 7.23 introduce le funzioni Φ_3 e Ψ_3 per le quali il luogo dei punti di nullo descrive, rispettivamente, le condizioni di equilibrio limite del cuneo di terreno ($\Phi_3=0$) e del muro ($\Psi_3=0$). Le funzioni Φ_3 e Ψ_3 in quanto combinazioni lineari delle funzioni Φ_1 , Φ_2 e Ψ_1 , Ψ_2 , sono anch'esse parabole nella variabile $\tan \alpha$ e risultano funzioni parametriche, rispettivamente, in K_{ae} e $\tan \theta_c$.

La ricerca della soluzione può essere condotta facendo variare l'angolo α e ricercandone il valore per cui K_{ae} attinge ad un massimo e θ_c attinge ad un minimo.

La Figura 7.3 mostra schematicamente questo procedimento con riferimento al caso descritto dai parametri mostrati nei seguenti prospetti:

parametri geotecnici:

$$\phi' = 40^\circ, \quad \delta/\phi' = 2/3, \quad \phi_b/\phi' = 2/3 \quad (7.24)$$

parametri sismici:

$$\theta = 12^\circ,65, \quad \Omega = 0, \quad \Omega = -1/2, \quad \Omega = +1/2 \quad (7.25)$$

parametri geometrici:

$$\beta = 0^\circ, \quad i = 15^\circ, \quad \Gamma = 1 \quad (7.26)$$

parametri del sovraccarico:

$$n_F = 0,2 \quad (7.27)$$

Per la determinazione della soluzione si procede con il seguente schema:

si fissano le condizioni geometriche geotecniche e del sovraccarico del sistema preso in esame;

facendo variare l'angolo α si determina il valore che minimizza il coefficiente di accelerazione critica $k_{h,c}$;

si determina il corrispondente valore di θ con utilizzando l'equazione 7.3;

determinato il valore di θ , si fa variare l'angolo α in modo da ottenere il massimo valore di K_{ae} associato al minimo valore di $k_{h,c}$.

Così facendo si determina il massimo valore del coefficiente di spinta attiva associato al minimo valore del coefficiente di accelerazione critica del sistema.

Ciascuna delle curve mostrate in Figura 7.3 presenta concavità verso l'alto, nel caso della funzione $K_{ae}(\alpha)$, e verso il basso, nel caso della funzione $k_{h,c}(\alpha)$; in corrispondenza di un particolare valore α_c dell'angolo α , per ogni coppia di curve rappresentate può essere individuato un punto di massimo, nel caso della funzione K_{ae} , e un punto di minimo, nel caso della funzione $k_{h,c}(\alpha)$.

Le proprietà analitiche delle funzioni $K_{ae}(\alpha)$ e $k_{h,c}(\alpha)$, appena descritte con riferimento ad un caso particolare, possono, in realtà, essere generalizzate. Utilizzando, infatti, le eqq. (7.14), (7.15), (7.18) e (7.19) è possibile mostrare che le condizioni di equilibrio limite del cuneo e del muro (descritte rispettivamente dalle condizioni $\Phi_3=0$ e $\Psi_3=0$), descrivono coniche parametriche che rappresentano, sempre, parabole con concavità verso il basso, nel caso della funzione Φ_3 e verso l'alto nel caso della funzione Ψ_3 .

Una dettagliata dimostrazione di tali proprietà è riportata dell'appendice 7A di questo capitolo.

Tale risultato è in accordo con l'obiettivo del problema in esame, che, nello spirito del metodo dell'equilibrio limite, consiste nella ricerca di un valore di massimo (la spinta attiva S_{ae} , ovvero il coefficiente di spinta attiva K_{ae}) relativo alle condizioni di equilibrio limite del cuneo di terreno (condizione $\Phi_3=0$) e nella ricerca di un valore di minimo (la componente orizzontale del coefficiente sismico critico $k_{h,c}$ ovvero il parametro θ_c) relativo alle condizioni di equilibrio limite del muro (condizione $\Psi_3=0$).

Il procedimento descritto in Figura 7.3 fornisce l'ulteriore condizione a cui deve sottostare la soluzione del problema: l'angolo di rottura effettivamente mobilitato è quello a cui corrisponde il minor valore del coefficiente di accelerazione e dunque la minima accelerazione di soglia. Da un punto di vista analitico tutto ciò si traduce nel determinare dal

sistema di eq. 7.20 l'angolo α che minimizza il coefficiente di accelerazione critica e massimizza quello relativo alla spinta attiva.

Individuate le proprietà delle funzioni Φ_3 e Ψ_3 , la determinazione della coppia K_{ae} , θ_c , che rappresenta la soluzione del problema, può ottenersi considerando che la condizione di massimo, relativa al calcolo della spinta attiva, e la condizione di minimo, relativa al calcolo del coefficiente sismico critico, corrispondono, rispettivamente, all'annullamento dei discriminanti Δ_Φ e Δ_Ψ delle funzioni Φ_3 e Ψ_3 descritte dalle eq.(7.23).

La soluzione ricercata, ovvero la coppia $K_{ae(\gamma,F)}$, θ_c , è quindi la soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} \Delta_\Phi = \Delta[\Phi_3(\alpha_c, K_{ae})] = 0 \\ \Delta_\Psi = \Delta[\Psi_3(\alpha_c, \theta_c)] = 0 \end{cases} \quad (7.28)$$

Che, utilizzando le eq. 7.21, eq. 7.22, eq. 7.23 può essere scritto nella forma:

$$\begin{aligned} [B_2 \cdot K_{ae} - B_1]^2 - 4 \cdot [A_2 \cdot K_{ae} - A_1] \cdot [C_2 \cdot K_{ae} - C_1] &= 0 \\ [B_4 \cdot \tan \theta_c - B_3]^2 - 4 \cdot [A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3] \cdot [C_4 \cdot \tan \theta_c - C_3] &= 0 \end{aligned} \quad (7.29)$$

Il particolare valore α_c che individua il cuneo critico, può, invece, essere determinato considerando che, nella rappresentazione di Figura 7.3, il valore $\tan \alpha_c$ rappresenta l'ascissa dei vertici delle parabole descritte dalle eq.(7.23); l'angolo α_c è, quindi, definito dalle relazioni:

$$\tan \alpha_c = \frac{B_3 - B_4 \cdot \tan \theta_c}{2 \cdot (A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3)} \quad (7.30)$$

$$\tan \alpha_c = \frac{B_1 - B_2 \cdot K_{ae}}{2 \cdot (A_2 \cdot K_{ae} - A_1)} \quad (7.31)$$

La dipendenza di α_c da θ_c (eq.7.30) è dovuta alla particolare condizione critica, infatti il valore di α_c calcolato con la 7.30 è identico al valore di α_c calcolato con la 7.31, solo perché si fa riferimento alla condizione critica, e quindi il valore di K_{ae} presente nella 7.31 è determinato per la particolare condizione di $\theta = \theta_c$. In tutti gli altri casi il valore dell'angolo determinato con la 7.30 non coincide con quello determinato con la 7.31.

Ciascuna delle eq. (7.29) rappresenta un'equazione di secondo grado nelle variabili K_{ae} o $\tan \theta_c$ di facile risoluzione.

Le eq. (7.29) possono essere riscritte nella forma:

$$\begin{aligned} K_{ae}^2 \cdot (B_2^2 - 4A_2C_2) + 2 \cdot K_{ae} \cdot (2C_1A_2 - B_1B_2 + 2A_1C_2) + (B_1^2 - 4A_1C_1) &= 0 \\ \tan^2 \theta_c \cdot (B_4^2 - 4A_4C_4) + 2 \cdot \tan \theta_c \cdot (2C_3A_4 - B_3B_4 + 2A_3C_4) + (B_3^2 - 4A_3C_3) &= 0 \end{aligned} \quad (7.32)$$

Scartando le soluzioni prive di significato fisico ed effettuando semplici, ma laboriosi, passaggi, è possibile risolvere le eq. (7.29) ottenendo le seguenti espressioni di $\tan \theta_c$ e K_{ae} :

$$\tan \theta_c = \frac{-2C_3A_4 + B_3B_4 - 2A_3C_4 + \sqrt{(2C_3A_4 - B_3B_4 + 2A_3C_4)^2 - (B_3^2 - 4A_3C_3) \cdot (B_4^2 - 4A_4C_4)}}{B_4^2 - 4A_4C_4} \quad (7.33)$$

$$K_{ae} = \frac{-2C_1A_2 + B_1B_2 - 2A_1C_2 - \sqrt{(2C_1A_2 - B_1B_2 + 2A_1C_2)^2 - (B_1^2 - 4A_1C_1) \cdot (B_2^2 - 4A_2C_2)}}{B_2^2 - 4A_2C_2} \quad (7.34)$$

dove i coefficienti $A_1, A_2, \dots, C_3, C_4$, sono stati già esplicitati dalle eq. (7.14), (7.15), (7.18) e (7.19).

In particolare per l'eq. (7.34) sostituendo i coefficienti da $A_1, A_2, \dots, C_1$ e C_2 , con le espressioni (7.14) e (7.15) e utilizzando il procedimento descritto in dettaglio nell'appendice 7B di questo capitolo, è possibile ottenere un'espressione analitica del coefficiente di spinta attiva come:

$$K_{ae}^{F,F} = \frac{\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \left[1 - \sqrt{\frac{\sin(i + \theta - \phi) \cdot (n_F \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi) - \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi))}{\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)}} \right]^2}{\cos^2(i - \beta - \delta - \phi) \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos \theta} \quad (7.35)$$

con:

$$n_F = \frac{2 \cdot F}{\gamma \cdot H^2} \quad (7.36)$$

L'eq.(7.33) insieme alle relazioni che legano k_h, θ e Ω eq.(7.3) (7.4) e (7.5), consente, per un dato valore di Ω , la determinazione della componente orizzontale $k_{h,c}$ del coefficiente sismico critico mediante una soluzione in forma chiusa:

$$k_{h,c} = \frac{\tan \theta_c}{1 \pm \Omega \cdot \tan \theta_c} \quad (7.37)$$

Affinché le soluzioni fornite dall'eqq. (7.30), (7.31), (7.33) e (7.34), siano congruenti con le ipotesi assunte nello schema di riferimento dell'analisi, deve essere:

$$\tan \alpha_c \leq \tan \alpha_1 \quad (7.38)$$

dove:

$$\tan \alpha_1 = \frac{1 + \lambda \cdot \tan i}{\lambda - \tan \beta} \quad (7.39)$$

con:

$$\lambda = \frac{d_F}{H} \quad (7.40)$$

Questo controllo va pertanto eseguito per verificare l'ammissibilità delle soluzioni trovate. Qualora l'eq (7.38) non risultasse verificata la soluzione va ricercata con le soluzioni già fornite nel capitolo quarto.

7.4 Determinazione del coefficiente sismico equivalente

Sempre con riferimento allo schema mostrato in Figura 7.1, indicando con F il margine di sicurezza del muro nei confronti del collasso per traslazione, nella valutazione delle condizioni di equilibrio bisogna prendere in esame il peso proprio W_w e le corrispondenti azioni inerziali $k_h \cdot W_w$ e $k_v \cdot W_w$, l'azione mutua $S_{ae}(\alpha)$ e, infine, le azioni N_b e T_b mobilitate alla base del muro.

Facendo riferimento allo schema di Figura 7.2, nella condizione ($k_h=k_{h,eq}$, $k_v=k_{v,eq}$), la resistenza al taglio del terreno a tergo del muro è interamente mobilitata

$$T_s = T_{s,lim} \quad (7.41)$$

mentre la resistenza allo scorrimento lungo il piano di posa della fondazione non è interamente mobilitata

$$T_w \neq T_{w,lim} \quad (7.42)$$

Definendo il fattore di sicurezza allo scorrimento come:

$$F = \frac{T_{w,lim}}{T_w} \quad (7.43)$$

il valore della resistenza mobilitata alla base del muro è:

$$T_w = \frac{T_{w,lim}}{F} = \frac{N_w \cdot \tan \varphi_b}{F} \quad (7.44)$$

In definitiva l'equilibrio del muro è descritto dal seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} N_w = W_w \cdot (1 - k_v) + S_{ae}(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) \\ T_w = W_w \cdot k_h + S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) \\ T_w = \frac{T_{w,lim}}{F} = \frac{N_w \cdot \tan \varphi_b}{F} \end{cases} \quad (7.45)$$

Introducendo il valore equivalente dell'angolo di attrito base fondazione – terreno definito dalla relazione:

$$\varphi_{b,eq} = \arctan\left(\frac{\tan \varphi_b}{F}\right) \quad (7.46)$$

il sistema che governa l'equilibrio del muro si può riscrivere nella forma:

$$\begin{cases} N_w = W_w \cdot (1 - k_v) + S_{ae}(\alpha) \cdot \sin(\delta + \beta) \\ T_w = W_w \cdot k_h + S_{ae}(\alpha) \cdot \cos(\delta + \beta) \\ T_w = N_w \cdot \tan \varphi_{b,eq} \end{cases} \quad (7.47)$$

Come si può notare il sistema di equazioni è del tutto analogo a quello mostrato nell'eq.

(7.16), a meno di sostituire φ_b con $\varphi_{b,eq}$ con gli stessi ragionamenti descritti nel paragrafo 6.3

si perviene alla seguente espressione in forma chiusa del coefficiente sismico equivalente definito dalla seguente relazione:

$$\tan \theta_{eq} = \frac{-2C_3A_4 + B_3B_4 - 2A_3C_4 + \sqrt{(2C_3A_4 - B_3B_4 + 2A_3C_4)^2 - (B_3^2 - 4A_3C_3) \cdot (B_4^2 - 4A_4C_4)}}{B_4^2 - 4A_4C_4} \quad (7.48)$$

in cui i coefficienti $A_3, A_4, \dots, C_3$ e C_4 sono funzioni dell'angolo $\varphi_{b,eq}$ definito dall'eq. (7.46)

$$\begin{cases} A_3 = \frac{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \varphi_{b,eq})}{\cos i \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_{b,eq}} \cdot \tan \beta - \Gamma \cdot \tan \varphi_{b,eq} \cdot \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \\ B_3 = \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_{b,eq})}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot [1 + n_F + \tan \beta \cdot (\tan i - (1 + \tan i \cdot \tan \beta) \cdot \tan \phi')] + \dots \\ \dots - \Gamma \cdot \tan \varphi_{b,eq} \cdot \frac{\cos(i + \beta + \delta + \phi')}{\cos i \cdot \cos \phi'} \\ C_3 = -\frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_{b,eq})}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot \tan \phi' \cdot (1 + n_F + \tan i \cdot \tan \beta) + \Gamma \cdot \frac{\cos(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \tan i \cdot \tan \varphi_{b,eq} \end{cases} \quad (7.49)$$

$$\begin{cases} A_4 = -\Gamma \cdot \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} - \frac{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \varphi_{b,eq})}{\cos i \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_{b,eq}} \cdot \tan \beta \cdot \tan \phi' \\ B_4 = -\Gamma \cdot \frac{\cos(i + \beta + \delta + \phi')}{\cos i \cdot \cos \phi'} - \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_{b,eq})}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot [n_F \cdot \tan \phi' + (1 + \tan i \cdot \tan \beta) \cdot (\tan \beta + \tan \phi')] \\ C_4 = \Gamma \cdot \frac{\cos(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \cdot \tan i - \frac{\cos(\beta + \delta + \varphi_{b,eq})}{\cos \varphi_{b,eq}} \cdot (1 + n_F + \tan i \cdot \tan \beta) \end{cases} \quad (7.50)$$

7.5 Analisi parametrica

In questo paragrafo, note le espressioni del coefficiente sismico critico (eq. 7.33) e

dell'angolo critico di rottura del cuneo (eq. 7.30), è stata effettuata un'analisi parametrica per

analizzare gli effetti di alcuni fattori geometrici e di alcuni parametri geotecnici sulle soluzioni determinate.

Le analisi sono state realizzate facendo variare il valore del peso normalizzato

$$\Gamma = \frac{2 \cdot W_w}{\gamma \cdot H^2} \quad (7.51)$$

Le analisi sono state condotte:

- per $\phi' = 30^\circ, 35^\circ$ e 40° assumendo sempre $\delta/\phi' = \phi_b/\phi' = 2/3$ e $i=\beta=0$;
- per $\phi' = 30^\circ$, $\phi_b/\phi' = 1, 2/3$ e $1/2$ assumendo sempre $\delta/\phi' = 2/3$ $i=\beta=0$.

Per quanto riguarda il sovraccarico si sono considerati i valori di $n_F=0,2$ e $\lambda=0,2$.

Infine in tutti i casi si è assunto $\Omega=0$ e $\Omega=\pm 1/2$.

È stata analizzata contemporaneamente sia la variazione del coefficiente sismico critico che il valore del corrispondente angolo che individua il cuneo di rottura ad esso associato.

I risultati ottenuti dall'analisi sono mostrati nelle Fig. da 7.4 a 7.7.

Come si osserva dalle Figure da 7.4 a 7.7 all'aumentare del peso normalizzato del muro si osserva:

un aumento del valore del coefficiente sismico critico;

una diminuzione del valore dell'angolo del cuneo ad esso associato.

Ciò indica un aumento del volume di terreno coinvolto nel cinematismo di collasso in accordo con il crescente valore di $k_{h,c}$. In tutti i casi l'effetto del parametro Ω si risente maggiormente per elevati valori di $k_{h,c}$ ovvero per sistemi molto stabili.

Infine nella Figura 7.7 si è redatto un diagramma riepilogativo che tiene conto dei precedenti diagrammi realizzati, osservando che sia all'aumentare dell'angolo di attrito interno del terreno (ϕ') che l'angolo di attrito alla base della fondazione (ϕ_b) si ottengono coefficienti sismici critici più elevati e quindi muri più stabili.

La Figura 7.7 mostra un confronto tra i valori di $k_{h,c}$ determinati per i tre valori di ϕ' presi in esame nell'analisi insieme ad un confronto dei corrispondenti valori dell'angolo α che definisce il cuneo critico.

I diagrammi evidenziano il valore di Γ_0 del peso normalizzato del muro in corrispondenza del quale il sistema è in equilibrio limite statico. I valori di Γ_0 individuano il punto di nullo del diagramma che fornisce i valori di $k_{h,c}$ e contestualmente il valore di α_0 dell'angolo che individua la condizione di collasso statico per un sistema avente peso normalizzato pari a Γ_0 .

Tutti diagrammi in corrispondenza di un particolare valore dell'angolo che individua il cuneo di rottura, pari ad α_1 , Figura 7.1, presentano una discontinuità.

Questa discontinuità è in accordo con la considerazione che non appena il potenziale cuneo di rottura intercetta il carico posto sull'estradosso del terrapieno, sia il valore del coefficiente sismico critico che il relativo angolo α che definisce il cuneo critico, sono determinati con le relazioni esplicitate nel presente capitolo, mentre prima della discontinuità il potenziale cuneo critico non intercetta il carico e quindi le soluzioni non sono influenzate da quest'ultimo e si determinano con le espressioni già mostrate nel capitolo quarto del presente lavoro di tesi.

Appendice 7A - Dimostrazione analitica delle proprietà delle funzioni Φ_3 e Ψ_3

7A.1 – Proprietà della funzione Φ_3

Si considerino i coefficienti A_1 e A_2 forniti dalle eqq. (7.14) e (7.15):

$$\begin{aligned} A_1 &= -[n_F + \tan \beta \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)] \cdot (1 + \tan \theta \cdot \tan \phi) \\ A_2 &= -\frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \end{aligned} \quad (7A1.52)$$

Deve certamente risultare $K_{ae} > 0$ perché altrimenti la soluzione non avrebbe significato.

L'eq. (7.23) fornisce:

$$\Phi_3(\alpha, K_{ae}) = \tan^2 \alpha \cdot (A_2 \cdot K_{ae} - A_1) + \tan \alpha \cdot (B_2 \cdot K_{ae} - B_1) + (C_2 \cdot K_{ae} - C_1) = 0 \quad (7A1.53)$$

che descrive l'equazione, parametrica in K_{ae} , di una parabola nella variabile $\tan \alpha$.

Tale parabola ha sempre una concavità rivolta verso il basso, infatti risulta sempre:

$$(A_2 \cdot K_{ae} - A_1) < 0 \quad (7A1.54)$$

La condizione descritta dall'eq. (7A1.54) può essere dimostrata ragionando per assurdo.

Ipotizziamo per assurdo che risulti:

$$(A_2 \cdot K_{ae} - A_1) > 0 \quad (7A1.55)$$

se:

$$n_F = \delta = \beta = 0$$

allora la dimostrazione è analoga a quella riportata nel capitolo quarto nell'appendice 4A.1

se:

$$n_F = 0$$

$$\delta = \phi'$$

$$\beta \cong 0$$

allora la dimostrazione è analoga a quella riportata nel capitolo quarto nell'appendice 4A.1

se invece:

$$n_F \neq 0 (> 0)$$

$$n_F \neq 0 (> 0)$$

$$\delta = \phi'$$

$$\beta \cong 0$$

allora risulta:

$$A_1 = -n_F \cdot (1 + \tan \theta \cdot \tan \phi)$$

$$A_2 = -\frac{\sin 2\phi'}{\cos \phi'} \quad (7A1.56)$$

i coefficienti A_1 e A_2 saranno sempre una quantità negative.

Quindi la (7A1.55) fornisce:

$$-\frac{\sin 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot K_{ae} > -n_F \cdot (1 + \tan \theta \cdot \tan \phi) \quad (7A1.57)$$

ma poiché è sempre:

$$-n_F \cdot (1 + \tan \theta \cdot \tan \phi) > 0 \quad (7A1.58)$$

allora:

$$-\frac{\sin 2\phi'}{\cos \phi'} \cdot K_{ae} > 0$$

quest'ultima disuguaglianza è un assurdo perchè:

K_{ae} è sempre positivo per ipotesi;

7A.2 – Proprietà della funzione Ψ_3

Per un sistema stabile staticamente si considerino i coefficienti A_3 e A_4 forniti dalle eqq.

(7.18) e (7.19):

$$A_3 = \frac{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos i \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_b} \cdot \tan \beta - \Gamma \cdot \tan \varphi_b \cdot \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} \quad (7A2.59)$$

$$A_4 = -\Gamma \cdot \frac{\sin(\beta + \delta + \phi')}{\cos \phi'} - \frac{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \varphi_b)}{\cos i \cdot \cos \beta \cdot \cos \varphi_b} \cdot \tan \beta \cdot \tan \phi'$$

Come si può notare questi coefficienti non contengono il parametro n_F che tiene conto del carico, e possono facilmente essere ricondotti, ai coefficienti A_3 e A_4 forniti nel capitolo quarto del presente lavoro di tesi. Quindi per la dimostrazione delle proprietà della funzione Ψ_3 si rimanda al capitolo quarto.

Appendice 7B – Determinazione dell'espressione analitica della relazione del coefficiente di spinta attiva

L'equazione (7.34):

$$K_{ae} = \frac{-2C_1A_2 + B_1B_2 - 2A_1C_2 - \sqrt{(2C_1A_2 - B_1B_2 + 2A_1C_2)^2 - (B_1^2 - 4A_1C_1) \cdot (B_2^2 - 4A_2C_2)}}{B_2^2 - 4A_2C_2} \quad (7B.60)$$

può essere riscritta nella seguente forma:

$$K_{ae} = \frac{a - \sqrt{b}}{c} \quad (7B.61)$$

dove:

$$\begin{aligned} a &= -2C_1A_2 + B_1B_2 - 2A_1C_2 \\ b &= (2C_1A_2 - B_1B_2 + 2A_1C_2)^2 - (B_1^2 - 4A_1C_1) \cdot (B_2^2 - 4A_2C_2) \\ c &= B_2^2 - 4A_2C_2 \end{aligned} \quad (7B.62)$$

Utilizzando le espressioni dei coefficienti A_1 , B_1 , C_1 e A_2 , B_2 , C_2 forniti dalle eqq. (7.14) e (7.15) si ottiene:

$$a = \frac{1}{2} \cdot \sec^2 i \cdot \sec^2 \beta \cdot \sec \theta \cdot \sec^2 \phi' \cdot \left[\cos(2i - 3\beta - \delta - \theta) + 2 \cos(2i - \beta + \delta + \theta) + 3 \cos(\beta + \delta + \theta) - \cos(2i - \beta - \delta + \theta - 2\phi') + \dots \right] \quad (7B.63)$$

$$b = 4 \cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \sec^4 i \cdot \sec^4 \beta \cdot \sec^2 \theta \cdot \sec^4 \phi' \cdot \sin(i + \theta - \phi') \cdot \left[4n_F \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') - 4 \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi') \right] \quad (7B.64)$$

$$c = 2 \cos^2(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \sec^2 i \cdot \sec^2 \phi' \quad (7B.65)$$

consideriamo il termine a esplicitato dall'eq. (7B.63), ed in particolare i termini dentro la parentesi quadra:

$$\begin{aligned} \cos(2i - 3\beta - \delta - \theta) + \cos(2i - \beta + \delta + \theta) &= 2 \cos[2(i - \beta)] \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \\ \cos(2i - \beta + \delta + \theta) + \cos(\beta + \delta + \theta) &= 2 \cos(i - \beta) \cdot \cos(i + \delta + \theta) \\ -\cos(2i - \beta - \delta + \theta - 2\phi') - \cos(\beta - \delta + \theta - 2\phi') &= -2 \cos(i - \beta) \cdot \cos(i - \delta + \theta - 2\phi') \end{aligned} \quad (7B.66)$$

inoltre:

$$\begin{aligned}
 2 \cos[2(i - \beta)] \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) + 2 \cos(\beta + \delta + \theta) &= 4 \cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \\
 2 \cos(i - \beta) \cdot \cos(i + \delta + \theta) - 2 \cos(i - \beta) \cdot \cos(i - \delta + \theta - 2\phi') &= -4 \cos(i - \beta) \cdot \sin(i + \theta - \phi') \cdot \sin(\delta + \phi')
 \end{aligned} \tag{7B.67}$$

quindi il coefficiente a dall'eq. (7B.63) si può scrivere come:

$$a = 2 \sec^2 i \cdot \sec^2 \beta \cdot \sec \theta \cdot \sec^2 \phi' \cdot [\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) + \sin(i + \theta - \phi') \cdot [n_F \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') - \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi')]] \tag{7B.68}$$

riscrivendo la 7B.61 dopo le opportune semplificazioni si ha:

$$\begin{aligned}
 & \frac{[\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) + \sin(i + \theta - \phi') \cdot [n_F \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') - \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi')]]}{\cos^2(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \cos \theta \cdot \cos^2 \beta} + \dots \\
 K_{ae}^{F\gamma} &= \frac{\dots - \sqrt{\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \sin(i + \theta - \phi') \cdot [n_F \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') - \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi')]}]{\cos^2(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \cos \theta \cdot \cos^2 \beta}
 \end{aligned} \tag{7B.69}$$

Analizzando attentamente il numeratore dell'eq. (7B.69) e ricordando la che

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} - 2 \cdot \sqrt{a \cdot b} = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

si può scrivere:

$$K_{ae}^{F\gamma} = \frac{\left[\sqrt{\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)} - \sqrt{\sin(i + \theta - \phi') \cdot [n_F \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') - \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi')]} \right]^2}{\cos^2(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \cos \theta \cdot \cos^2 \beta} \tag{7B.70}$$

dividendo tutto per

$$\sqrt{\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)} \tag{7B.71}$$

si ha:

$$K_{ae}^{F\gamma} = \frac{\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta) \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{\sin(i + \theta - \phi') \cdot [n_F \cos^2 \beta \cdot \cos(i - \beta - \delta - \phi') - \cos(i - \beta) \cdot \sin(\delta + \phi')]}{\cos^2(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)}} \right)^2}{\cos^2(i - \beta - \delta - \phi') \cdot \cos \theta \cdot \cos^2 \beta} \tag{7B.72}$$

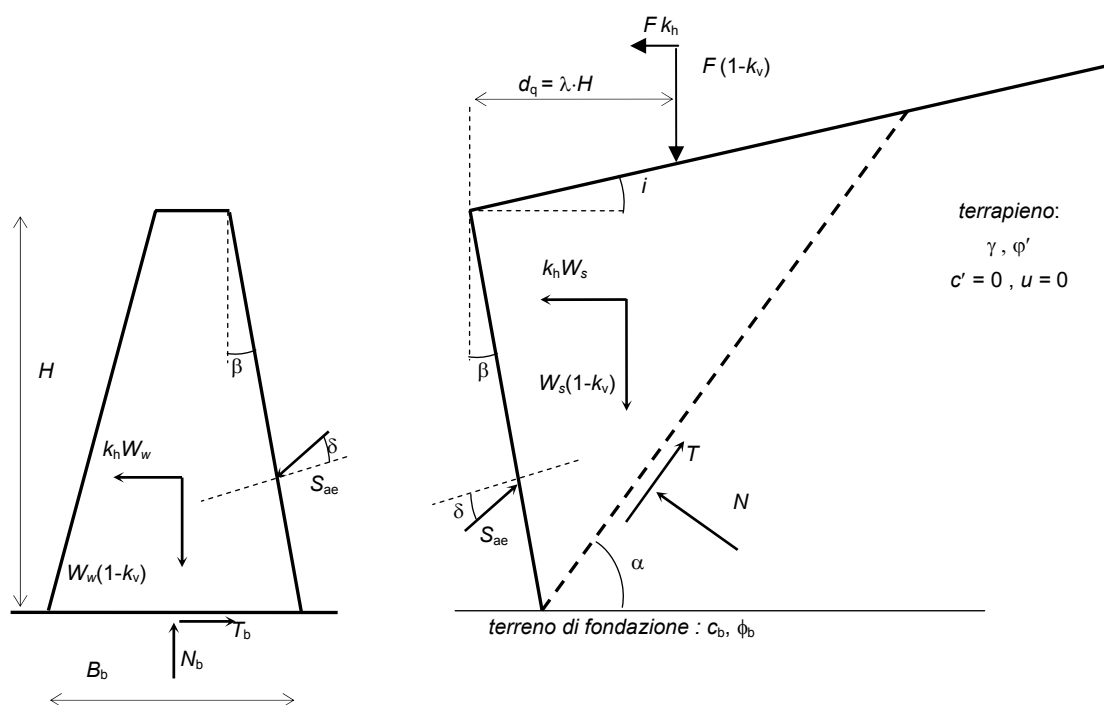


Figura 7.1 – Schema di riferimento adottato per l'analisi MB

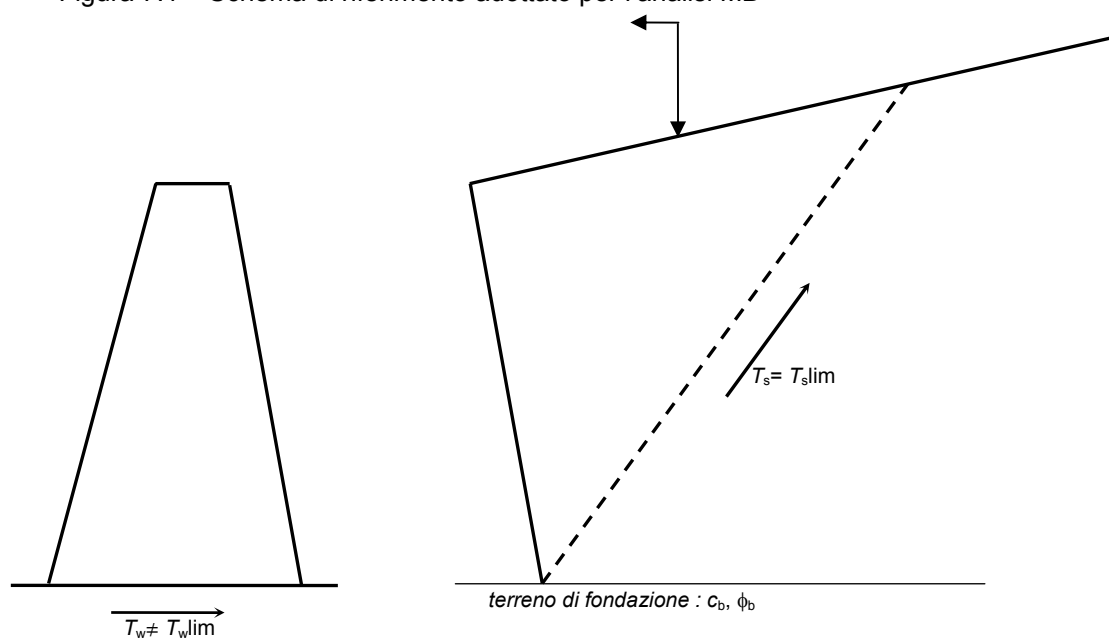
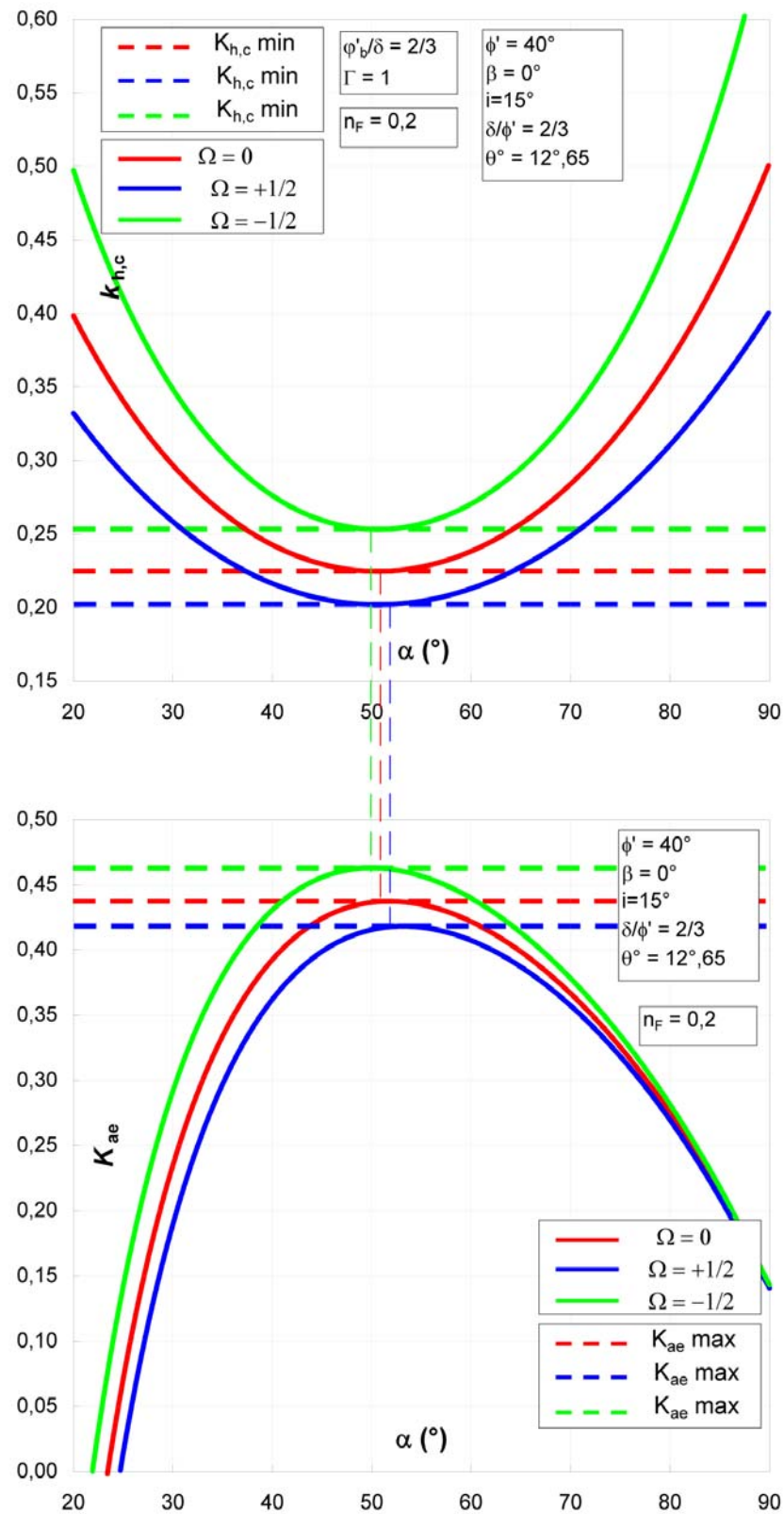


Figura 7.2 – Schema di riferimento per la determinazione del coefficiente sismico equivalente


 Figura 7.3 – Variazione di K_{ae} e di $k_{h,c}$ con l'angolo α

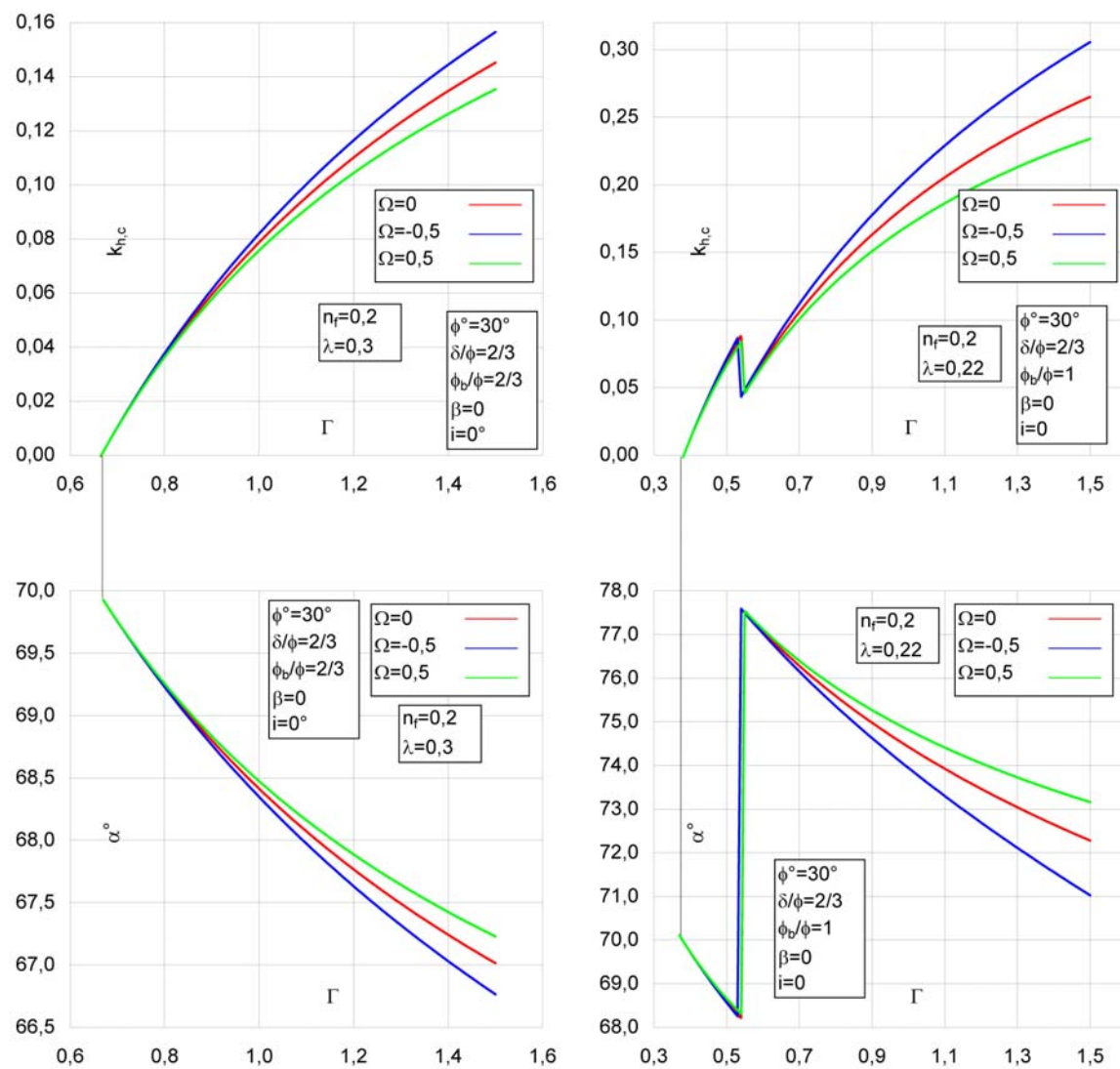
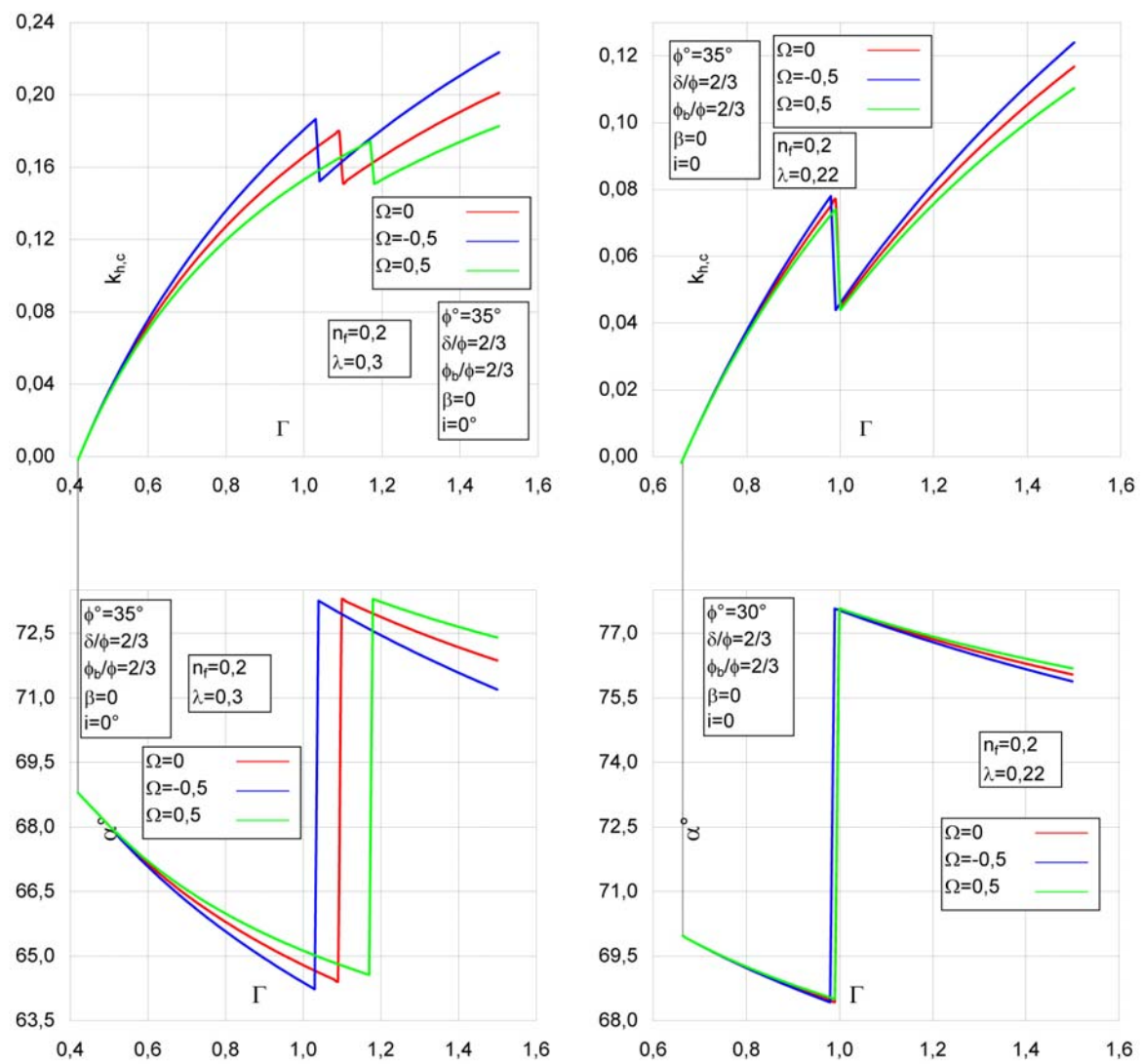


Figura 7.4 – Variazione di $k_{n,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi' = 30^\circ$


 Figura 7.5 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi' = 35^\circ$

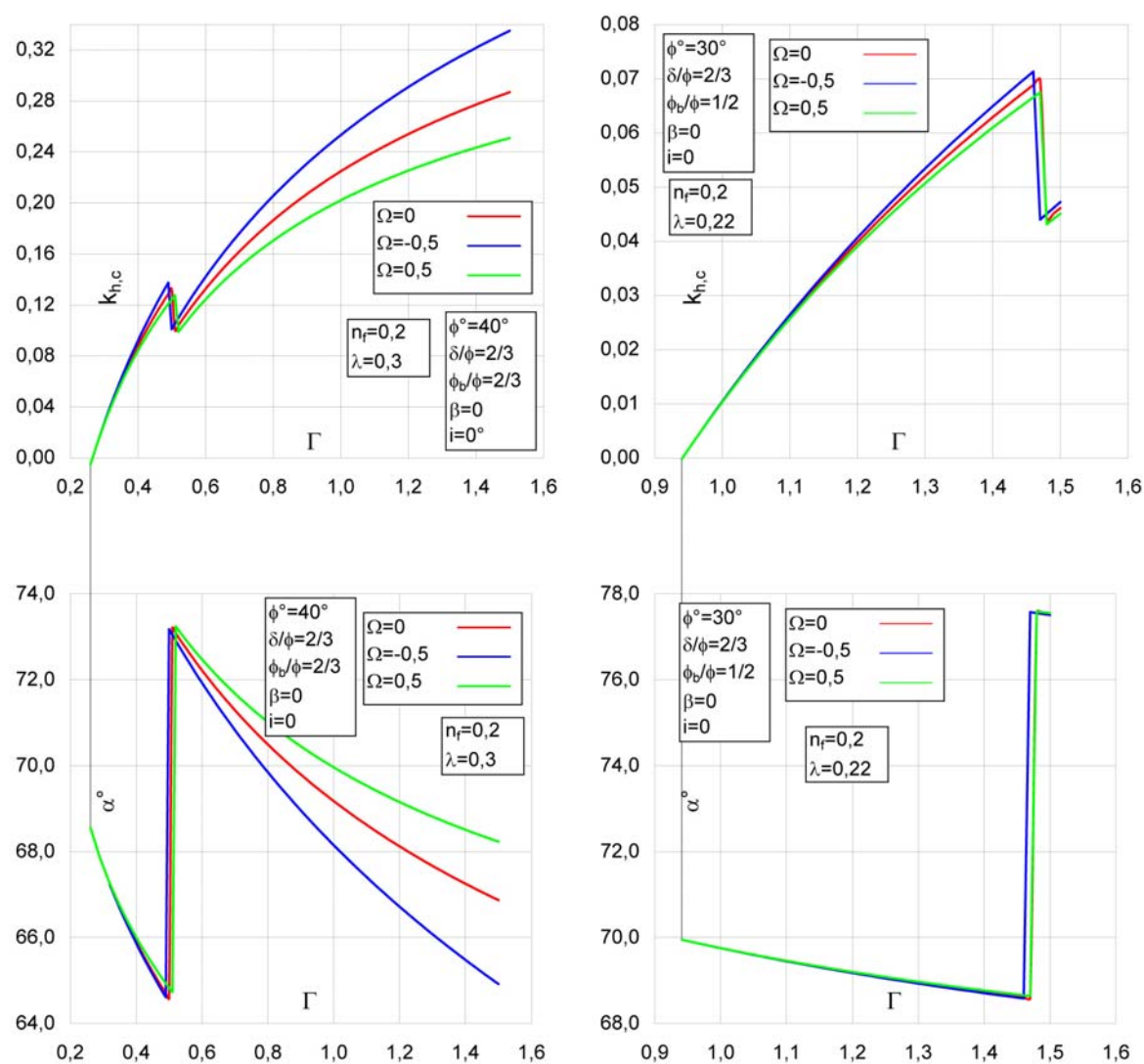
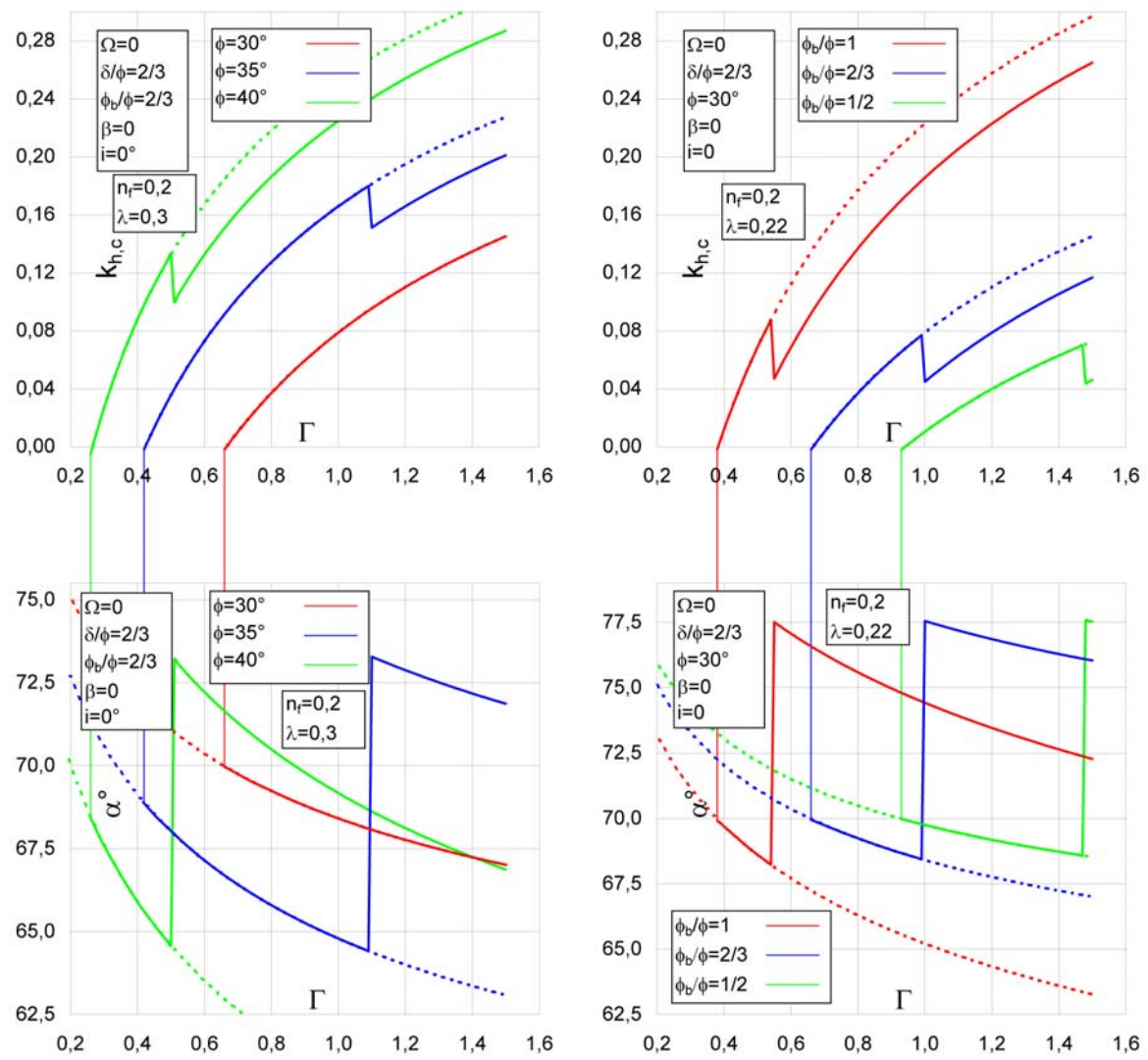


Figura 7.6 – Variazione di $k_{h,c}$ e del corrispondente angolo α_c con il peso normalizzato Γ : $\phi' = 40^\circ$


 Figura 7.7 – Confronto tra i valori di $k_{h,c}$ e α forniti dagli abachi di Fig. 7.4, 7.5 e 7.6 per il caso $\Omega=0$

PARTE III

CAPITOLO OTTAVO

ANALISI AGLI SPOSTAMENTI NELL'IPOTESI DI PICCOLE DEFORMAZIONI

8.1 Premessa

L'approccio di Richard & Elms prevede che le tensioni attive che il terreno esercita sul muro durante un terremoto siano stimate con la relazione di Mononobe - Okabe, quindi in termini di spinta mediante il coefficiente di spinta attiva in condizioni sismiche K_{ae} . Il calcolo dello spostamento permanente nell'analisi proposta da Newmark necessita della conoscenza del coefficiente di accelerazione critica $k_{h,c}$ la cui determinazione richiede la valutazione delle condizioni di equilibrio limite del muro, considerando la presenza contemporanea sia della forze di inerzia orizzontali che verticali indotte dal sisma.

Nel presente capitolo si descrive il procedimento analitico per la determinazione dell'equazione del moto del muro che scorre su una superficie piana coincidente con l'interfaccia tra la fondazione e il terreno di fondazione. Sfruttando le espressioni ricavate nei precedenti capitoli relativamente al coefficiente di spinta attiva e al coefficiente sismico orizzontale, per le diverse condizioni di carico e al contorno prese in esame, sarà fornita l'espressione del fattore di forma per la determinazione degli spostamenti, assimilando il muro al blocco rigido che scorre su superficie piana. (Newmark 1965)

8.2 Impostazione dell'analisi

Con riferimento allo schema di Figura 8.1 è possibile ricavare l'equazione del moto che governa l'equilibrio dinamico del muro tenendo conto delle varie forze in gioco.

Considerando un terreno di fondazione caratterizzato dal seguente criterio di rottura:

$$T_{lim} = c_b \cdot B + N \cdot \tan \varphi_b$$

l'equilibrio alla traslazione verticale ed orizzontale del muro fornisce:

$$\begin{aligned}\sum F_o &= c_b \cdot B + N \cdot \tan \phi' = c_b \cdot B + W_w (1 - \Omega \cdot K_v) \cdot \tan \varphi_b + S_{ae} \cdot \sin(\delta + \beta) \cdot \tan \varphi_b = T_{lim} \\ \sum F_v &= W_w K_h + S_{ae} \cdot \cos(\delta + \beta) = T_{mob}\end{aligned}\quad (8.1)$$

Possono essere presi in esame due diversi casi:

- il muro non subisce spostamenti permanenti in quanto è $k_h < k_{h,c}$ (1° caso);
- il muro subisce spostamenti non appena risulta $k_h > k_{h,c}$ (2° caso);

Nel primo caso risulta:

$$T_{mob} - T_{lim} = 0$$

per cui:

$$S_{ae}(k_{h,cr}) \cdot \cos(\delta + \beta) + k_{h,c} - c_b \cdot B - W_{tot} \cdot \tan \varphi_b + \Omega \cdot K_{h,c} \cdot \tan \varphi_b - S_{ae}(k_{h,c}) \cdot \sin(\delta + \beta) = 0 \quad (8.2)$$

Nel secondo caso risulta:

$$T_{mob} - T_{lim} = \frac{W_{tot}}{g} \cdot \ddot{d}_w$$

per cui:

$$S_{ae}(k_h) \cdot \cos(\delta + \beta) + k_h - c_b \cdot B - W_{tot} \cdot \tan \varphi_b + \Omega \cdot k_h \cdot \tan \varphi_b - S_{ae}(k_h) \cdot \sin(\delta + \beta) = \frac{W_{tot}}{g} \cdot \ddot{d}_w \quad (8.3)$$

La (8.2) e la (8.3), ipotizzando per semplicità di calcolo $c_b = 0$, possono essere riscritte nella seguente forma:

$$S_{ae}(k_{h,c}) \cdot \cos(\delta + \beta) + W_{tot} \cdot k_{h,c} - [W_{tot} \cdot (1 - \Omega \cdot k_{h,c}) + S_{ae}(k_{h,c}) \cdot \sin(\delta + \beta)] \cdot \tan \varphi_b = 0 \quad (8.4)$$

$$S_{ae}(k_h) \cdot \cos(\delta + \beta) + W_{tot} \cdot k_h - [W_{tot} \cdot (1 - \Omega \cdot k_h) + S_{ae}(k_h) \cdot \sin(\delta + \beta)] \cdot \tan \varphi_b = \frac{W_{tot}}{g} \cdot \ddot{d}_w \quad (8.5)$$

Facendo la differenza tra la (3.10) e la (3.9) si ottiene:

$$\begin{aligned}& [S_{ae}(k_h) - S_{ae}(k_{h,c})] \cdot \cos(\delta + \beta) + W_{tot} \cdot (k_h - k_{h,c}) + W_{tot} \cdot \Omega \cdot \tan \varphi_b \cdot (k_h - k_{h,c}) + \\ & - [S_{ae}(k_h) - S_{ae}(k_{h,c})] \cdot \sin(\delta + \beta) \cdot \tan \varphi_b = \frac{W_{tot}}{g} \cdot \ddot{d}_w\end{aligned}\quad (8.6)$$

che può essere riscritta nella seguente forma:

$$(k_h - k_{h,c}) \cdot W_{tot} \cdot (1 + \Omega \cdot \tan \varphi_b) + [S_{ae}(k_h) - S_{ae}(k_{h,c})] \cdot [\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan \varphi_b] = \frac{W_{tot}}{g} \cdot \ddot{d}_w \quad (8.7)$$

dividendo tutto per $\frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2$ si ottiene:

$$\begin{aligned} & (k_h - k_{h,c}) \cdot \Gamma \cdot (1 + \Omega \cdot \tan \varphi_b) + [K_{ae}(k_h) \cdot (1 - \Omega \cdot k_h) - K_{ae}(k_{h,c}) \cdot (1 - \Omega \cdot k_{h,c})] \cdot \dots \\ & \dots \cdot [\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan \varphi_b] = \frac{\Gamma}{g} \cdot \ddot{d}_w \end{aligned} \quad (8.8)$$

dove Γ è il peso adimensionalizzato

$$\Gamma = \frac{2 \cdot W_{tot}}{\gamma \cdot H^2} \quad (8.9)$$

con:

- W_{tot} peso del muro;
- H altezza del muro;
- γ è il peso specifico del terreno.

In definitiva l'equazione del moto che governa l'equilibrio dinamico del muro risulta la seguente:

$$\ddot{d}_w = g \cdot [(1 + \Omega \cdot \tan \varphi_b) \cdot (k_h - k_{h,c}) + c] \quad (8.10)$$

dove il parametro c assume la seguente espressione:

$$c = [K_{ae} \cdot (1 - \Omega \cdot k_h) - K_{ae,c} \cdot (1 - \Omega \cdot k_{h,c})] \cdot \frac{\cos(\delta + \beta) - \tan \varphi_b \cdot \sin(\delta + \beta)}{\Gamma} \quad (8.11)$$

in cui:

- K_{ae} e $K_{ae,c}$ sono i valori del coefficiente di spinta attiva calcolati con riferimento ad un generico coefficiente di accelerazione K_h e per uno critico $K_{h,c}$;
- δ e β rappresentano, come di consueto, l'angolo di attrito terra-muro e quello di inclinazione del paramento interno del muro stesso.

In particolare l'equazione 8.10, tenendo conto della 8.11, si può esprimere nella seguente forma:

$$\ddot{d}_w = g \cdot [a_1 \cdot (k_h - k_{h,c}) + a_2 \cdot a_3] \quad (8.12)$$

dove:

$$a_1 = 1 + \Omega \cdot \tan \varphi_b; \quad (8.13)$$

$$a_2 = \frac{\cos(\delta + \beta) - \tan \varphi_b \cdot \sin(\delta + \beta)}{\Gamma}; \quad (8.14)$$

$$a_3 = K_{ae} \cdot (1 - \Omega \cdot k_h) - K_{ae,c} \cdot (1 - \Omega \cdot k_{h,c}); \quad (8.15)$$

Come già mostrato al capitolo terzo, (vedi eq. 3.21), l'equazione del moto del blocco rigido che scorre su di una superficie piana (Newmark 1965) è la seguente:

$$\ddot{d}_0 = g \cdot [(1 + \Omega \cdot \tan \varphi_b) \cdot (k_h - k_{h,c})] \quad (8.16)$$

Analizzando attentamente le equazioni (8.12) e (8.16), si nota che le due equazioni del moto sono legate dalla seguente relazione:

$$\frac{\ddot{d}_w}{g} = \frac{\ddot{d}_0}{g} + a_2 \cdot a_3 \quad (8.17)$$

A meno del fattore:

$$a_2 \cdot a_3 \quad (8.18)$$

Le due equazioni del moto coincidono.

Fissate le caratteristiche geometriche e geotecniche del sistema di riferimento, il parametro a_2 è una costante perché dipende soltanto dalla geometria e dalle caratteristiche meccaniche del sistema, mentre i parametri a_1 e a_3 non sono costanti perché k_h è funzione del tempo, Ω dipende direttamente da k_h come già mostrato al capitolo quarto (eq. 4.2) e K_{ae} è calcolato per il generico k_h che è funzione del tempo.

Risulta quindi:

$$a_1(t) = 1 + \Omega(t) \cdot \tan \varphi_b$$

$$a_2 = \frac{\cos(\delta + \beta) - \tan \varphi_b \cdot \sin(\delta + \beta)}{\Gamma}$$

$$a_3(t) = K_{ae} \cdot (1 - \Omega(t) \cdot k_h(t)) - K_{ae,c} \cdot (1 - \Omega(t) \cdot k_{h,c}(t))$$

Se ipotizziamo che:

$$k_v = 0 \quad (8.19)$$

allora:

$$\Omega = 0 \quad (8.20)$$

Quindi i valori dei parametri a_1 , a_2 e a_3 si semplificano nel seguente modo:

$$a_1 = 1 \quad (8.21)$$

$$a_2 = \frac{\cos(\delta + \beta) - \tan \varphi_b \cdot \sin(\delta + \beta)}{\Gamma} \quad (8.22)$$

$$a_3 = K_{ae}(k_h) - K_{ae,c}(k_h = k_{h,c}) \quad (8.23)$$

Come descritto dettagliatamente nelle appendici di questo capitolo, l'eq. (8.23) può essere posta nella forma:

$$a_3 = (k_h - k_{h,c}) \cdot a_w \quad (8.24)$$

in cui a_w è un parametro costante.

Quindi l'equazione del moto si può esprimere nella forma:

$$\ddot{d}_w = g \cdot [(k_h - k_{h,c}) + a_2 \cdot (k_h - k_{h,c}) \cdot a_w] = g \cdot (k_h - k_{h,c}) \cdot (1 + a_2 \cdot a_w) \quad (8.25)$$

Definendo “*fattore di forma*” la quantità cotante:

$$C_w = 1 + a_2 \cdot a_w \quad (8.26)$$

che nel caso particolare di muro di sostegno assume la seguente forma:

$$C_w = 1 + \frac{\cos(\delta + \beta) - \tan \varphi_b \cdot \sin(\delta + \beta)}{\Gamma} \cdot \frac{(1 + \tan i \cdot \tan \beta) \cdot (1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta)}{(\tan \alpha - \tan i) \cdot [\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan(\phi' - \alpha)]} \quad (8.27)$$

L'equazione del moto si può in definitiva porre nella forma:

$$\ddot{d}_w = g \cdot (k_h - k_{h,c}) \cdot C_w \quad (8.28)$$

Se anche nella eq. (8.16) si assume:

$$\Omega = 0 \quad (8.29)$$

l'equazione del blocco rigido che scorre su una superficie piana si può scrivere come:

$$\ddot{d}_0 = g \cdot (k_h - k_{h,c}) \quad (8.30)$$

Le eqq. (8.28) e (8.30) sono legate tra di loro dalla relazione:

$$\ddot{d}_w = \ddot{d}_0 \cdot C_w \quad (8.31)$$

Quindi definite le caratteristiche geometriche e geotecniche del sistema, ed ipotizzando che

$\Omega = 0$, nota l'equazione del moto del blocco rigido che scorre su superficie piana, si può determinare la corrispondente equazione del moto riferita al sistema muro – terreno.

8.3 Ipotesi sulla posizione della superficie di scorrimento presa in esame nell'analisi

Al fine di descrivere correttamente l'equazione del moto del muro, è necessario valutare l'accelerazione critica del sistema.

Per determinare l'accelerazione critica del sistema possono essere utilizzate le relazioni già introdotte nei precedenti capitoli. È già stato mostrato che nel caso più generale si può scrivere:

$$\tan \theta_c = \frac{-2C_3A_4 + B_3B_4 - 2A_3C_4 + \sqrt{(2C_3A_4 - B_3B_4 + 2A_3C_4)^2 - (B_3^2 - 4A_3C_3) \cdot (B_4^2 - 4A_4C_4)}}{B_4^2 - 4A_4C_4} \quad (8.32)$$

dove i coefficienti $A_3, \dots, C_4$ sono stati esplicitati nei capitoli quarto (eqq. 4.16 e 4.17), quinto (eqq. 5.18 e 5.19), sesto (eqq. 6.20 e 6.21) e settimo (eqq. 7.18 e 7.19), relativamente ai seguenti casi:

- Muro di sostegno (capitolo quarto);
- Muro di sostegno in presenza di un sovraccarico distanziato ed esteso indefinitamente (capito quinto);
- Muro di sostegno con terrapieno di altezza finita ed in presenza di sovraccarico (capitolo sesto);
- Muro in presenza di terrapieno inclinato e soggetto a carico lineare (capitolo settimo).

In corrispondenza della condizione $\theta = \theta_c$ ovvero $k_h = k_{h,c}$ il cuneo di terreno coinvolto nel meccanismo di collasso (Fig. 8.2) è individuato dall'angolo α_c definito dalla relazione:

$$\tan \alpha_c = \frac{B_3 - B_4 \cdot \tan \theta_c}{2 \cdot (A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3)} \quad (8.33)$$

dove, ovviamente, i coefficienti $A_3, \dots, C_4$ e il valore di $\tan \theta_c$, si riferiscono al particolare caso analizzato.

Se si assume che durante tutto l'evento sismico il cinematismo di collasso rimanga invariato, è possibile determinare la variazione temporale della spinta.

Infatti nell'ipotesi che risulta che risulti $\alpha_c(t) = \alpha_c$ con α_c fornito dalla eq. (8.33) si ha:

$$S_{ae}(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot K_{ae}(\alpha) \cdot (1 - \Omega \cdot k_{h,c}) \quad (8.34)$$

in cui se poniamo $\Omega = 0$ si ottiene:

$$S_{ae}(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot H^2 \cdot K_{ae}(\alpha) \quad (8.35)$$

Nella eq. (8.34) il coefficiente di spinta può essere valutato con la relazione generale

$$K_{ae}(\alpha) = \frac{A_1 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_1 \cdot \tan \alpha + C_1}{A_2 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_2 \cdot \tan \alpha + C_2} \quad (8.36)$$

dove sono esplicitati sia l'angolo α che sarà pari al valore α_c fornito dalla (8.32) che l'angolo θ implicito nelle espressioni dei coefficienti $A_1, A_2 \dots C_1 C_2$.

In particolare nella eq. (8.36)

$$\alpha = \alpha_c \quad (8.37)$$

con $\alpha_c = f(\theta)$ e

$$A_1 = A_1(\theta), A_2 = A_2(\theta), A_3 = A_3(\theta), \quad (8.38)$$

con θ generalmente diverso da θ_c .

La posizione effettuata in merito alla geometria del cinematiso di collasso del cuneo di terreno consente quindi di valutare agevolmente la dipendenza temporale del coefficiente di spinta K_{ae} .

8.4 Considerazioni sulla validità delle espressioni del coefficiente di spinta attiva

Come già mostrato nei capitoli quarto, quinto, sesto e settimo, nelle espressioni del coefficiente di spinta attiva determinate per le differenti condizioni al contorno e di carico, è sempre presente un radicando. Perché la soluzione abbia significato fisico l'argomento del radicando deve risultare maggiore o uguale a zero.

Per il caso di muro di sostegno l'espressione del coefficiente di spinta attiva (eq. 4.32) è

$$K_{ae} = \frac{\cos^2(\beta + \theta - \phi')}{\cos^2 \beta \cdot \cos \theta \cdot \cos(\delta + \beta + \theta) \cdot \left[1 + \sqrt{\frac{\sin(\phi' - i - \theta) \cdot \sin(\delta + \phi')}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)}} \right]^2} \quad (8.39)$$

L'argomento del radicando è:

$$\frac{\sin(\phi' - i - \theta) \cdot \sin(\delta + \phi')}{\cos(i - \beta) \cdot \cos(\beta + \delta + \theta)} \quad (8.40)$$

Poiché è certamente $\delta + \phi < \pi$ si ha certamente

$$\sin(\delta + \phi') > 0 \quad (8.41)$$

Il segno del radicando dipende quindi dalla quantità:

$$\sin(\phi' - i - \theta) \quad (8.42)$$

Affinché il valore della 8.41 sia maggiore o uguale a zero deve essere verificata la seguente diseguaglianza:

$$\phi' - i - \theta \geq 0 \quad (8.43)$$

ovvero

$$\theta \leq \phi' - i \quad (8.44)$$

Ponendo:

$$\theta_{\max} = \phi' - i \quad (8.45)$$

per ogni istante di tempo deve essere verificata la condizione:

$$\theta \leq \theta_{\max} \quad (8.46)$$

Analogo ragionamento viene fatto per le soluzioni fornite nei precedenti capitoli quinto, sesto e settimo relative alle soluzioni del coefficiente di spinta attiva per le differenti condizioni di carico e al contorno.

8.5 Analisi parametrica

In questo paragrafo, note le espressioni del fattore di forma e dell'angolo critico di rottura del cuneo associato ai differenti schemi presi in esame, è stata effettuata un'analisi parametrica per analizzare gli effetti di alcuni fattori geometrici e di alcuni parametri geotecnici sulle soluzioni determinate.

Le analisi sono state realizzate facendo variare il valore del peso normalizzato

$$\Gamma = \frac{2 \cdot W_w}{\gamma \cdot H^2} \quad (8.47)$$

da un valore minimo pari a 0,6 ad un valore massimo pari a 1,6

Relativamente allo schema di muro di sostegno le analisi sono state condotte:

- per $\phi' = 30^\circ, 35^\circ$ e 40° assumendo sempre $\delta/\phi' = \varphi_b/\phi' = 2/3$ e $i=\beta=0$;
- per $\phi' = 30^\circ, \varphi_b/\phi' = 1, 2/3$ e $1/2$ assumendo sempre $\phi' = 30^\circ / \phi' = 2/3$ e $i=\beta=0$;

Relativamente allo schema muro di sostegno in presenza di un sovraccarico distanziato ed esteso indefinitamente le analisi sono state condotte:

- per $\lambda = 0.575, 0.600$ e 0.625 assumendo sempre $\phi' = 30^\circ, \delta/\phi' = \varphi_b/\phi' = 2/3, i=\beta=0$ e $n_q=0.2$;
- per $n_q=0.2, 0.4$ e 0.6 assumendo sempre $\phi' = 30^\circ, \delta/\phi' = \varphi_b/\phi' = 2/3, i=\beta=0$ e $\lambda = 0$;

Relativamente allo schema di muro con terrapieno di altezza finita ed in presenza di sovraccarico le analisi sono state condotte:

- per $i = 18^\circ, 19^\circ$ e 20° assumendo sempre $\phi' = 30^\circ, \delta/\phi' = \varphi_b/\phi' = 2/3, \beta=0, n_q=0.4$ e $t=0.4$;
- per $t= 0.24, 0.25$ e 0.26 assumendo sempre $\phi' = 30^\circ, \delta/\phi' = \varphi_b/\phi' = 2/3, \beta=0, n_q=0.2$ e $i=15^\circ$;

Relativamente allo schema di muro di sostegno con terrapieno inclinato soggetto ad un carico lineare le analisi sono state condotte:

- per $\lambda = 0.58, 0.60$ e 0.62 assumendo sempre $\phi' = 30^\circ, \delta/\phi' = \varphi_b/\phi' = 2/3, \beta=0, i=10^\circ$ e $n_q=0.2$;
- per $n_q=0.2, 0.4$ e 0.6 assumendo sempre $\phi' = 30^\circ, \delta/\phi' = \varphi_b/\phi' = 2/3, \beta=0, i=10^\circ$ e $\lambda = 0,6$;

In tutti gli schemi è stata analizzata contemporaneamente sia la variazione del coefficiente sismico critico che il valore del corrispondente angolo che individua il cuneo di rottura ad esso associato.

I risultati ottenuti dall'analisi sono mostrati nelle Fig. da 8.7 a 8.10.

Come si osserva dalle Figure da 8.7 a 8.10 all'aumentare del peso normalizzato del muro si osserva:

una diminuzione del valore del fattore di forma C_w ;

una diminuzione del valore dell'angolo α del cuneo ad esso associato.

Ciò indica un aumento del volume di terreno coinvolto nel cinematisma di collasso in accordo con la diminuzione di C_w .

I diagrammi di Fig. da 8.8 a 8.10 in corrispondenza di un particolare valore dell'angolo che individua il cuneo di rottura, presentano una discontinuità.

Questa discontinuità è in accordo con la considerazione che non appena il potenziale cuneo di rottura intercetta il sovraccarico posto sull'estradosso del terrapieno, sia il valore del coefficiente sismico critico che il relativo angolo α che definisce il cuneo critico, sono determinati con le relazioni esplicitate nei capitoli quinto, sesto e settimo. Per α superiore al valore in corrispondenza del quale si ha la discontinuità il potenziale cuneo critico non intercetta il carico e quindi le soluzioni non sono influenzate da quest'ultimo; in questo caso la soluzione del problema è fornita dalle espressioni già mostrate nel capitolo quarto del presente lavoro.

Appendice 8.A: Determinazione del fattore di forma per il caso di muro di sostegno

Con riferimento alla schema di Figura 8.3, questa appendice mostra come, il coefficiente a_3 presente nell'equazione del moto (8.12), possa essere espresso nella forma:

$$a_3 = (k_h - k_{h,c}) \cdot a_w \quad (8.48)$$

Il coefficiente a_3 è stato già definito dall'eq 8.15:

$$a_3 = K_{ae}(k_h) - K_{ae,c}(k_h = k_{h,c}) \quad (8.49)$$

Dove $K_{ae}(k_h)$ è il coefficiente di spinta calcolato per il generico $k_h \neq k_{h,c}$ mentre $K_{ae}(k_h = k_{h,c})$ è il coefficiente di spinta calcolato per il particolare valore $k_h = k_{h,c}$ corrispondente all'accelerazione critica del sistema.

Dalla risoluzione del sistema equazioni (4.8) che governa l'equilibrio del cuneo di terreno, prima di arrivare all'espressione generale del coefficiente di spinta attivo (eq. 4.11), il coefficiente di spinta attiva si può esplicitare come:

$$K_{ae} = \frac{[k_h / (1 - \Omega \cdot k_h) - \tan(\phi' - \alpha)] \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta) \cdot (1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta)}{(\tan \alpha - \tan i) \cdot [\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan(\phi' - \alpha)]} \quad (8.50)$$

Ponendo:

$$\Omega = 0 \quad (8.51)$$

Si ottiene:

$$K_{ae} = \frac{[k_h - \tan(\phi' - \alpha)] \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta) \cdot (1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta)}{(\tan \alpha - \tan i) \cdot [\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan(\phi' - \alpha)]} \quad (8.52)$$

La differenza tra il valore del coefficiente di spinta attiva K_{ae} calcolato per il generico $k_h \neq k_{h,c}$ e quello calcolato per $k_h = k_{h,c}$ risulta:

$$K_{ae}(k_h) - K_{ae}(k_h = k_{h,c}) = (k_h - k_{h,c}) \cdot \frac{(1 + \tan i \cdot \tan \beta) \cdot (1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta)}{(\tan \alpha - \tan i) \cdot [\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan(\phi' - \alpha)]} \quad (8.53)$$

Quindi il coefficiente a_3 presente nell'equazione del moto si può esprimere nella forma:

$$a_3 = (k_h - k_{h,c}) \cdot a_w \quad (8.54)$$

con:

$$a_w = \frac{(1 + \tan i \cdot \tan \beta) \cdot (1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta)}{(\tan \alpha - \tan i) \cdot [\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan(\phi' - \alpha)]} \quad (8.55)$$

Appendice 8.B: Determinazione del fattore di forma per il caso di muro di sostegno in presenza di un sovraccarico distanziato ed esteso indefinitamente

Con riferimento alla schema di Figura 8.4, questa appendice mostra come, il coefficiente a_3 presente nell'equazione del moto (8.12), possa essere espresso nella forma:

$$a_3 = (k_h - k_{h,c}) \cdot a_w \quad (8.56)$$

Il coefficiente a_3 è stato già definito dall'eq 8.15:

$$a_3 = K_{ae}(k_h) - K_{ae,c}(k_h = k_{h,c}) \quad (8.57)$$

Dove $K_{ae}(k_h)$ è il coefficiente di spinta calcolato per il generico $k_h \neq k_{h,c}$ mentre $K_{ae}(k_h = k_{h,c})$ è il coefficiente di spinta calcolato per il particolare valore $k_h = k_{h,c}$ corrispondente all'accelerazione critica del sistema.

Dalla risoluzione del sistema equazioni (5.10) che governa l'equilibrio del cuneo di terreno, prima di arrivare all'espressione generale del coefficiente di spinta attivo (eq. 5.11), il coefficiente di spinta attiva si può esplicitare come:

$$K_{ae}^{\gamma,q} = \frac{[k_h / (1 - \Omega \cdot k_h) - \tan(\phi' - \alpha)] \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta) + n_q \cdot r}{(\tan \alpha - \tan i) \cdot [\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan(\phi' - \alpha)]} \quad (8.58)$$

con:

$$r = 1 - \lambda \cdot \frac{\tan \alpha - \tan i}{\tan \alpha \cdot \tan \beta + 1} \quad (8.59)$$

Ponendo:

$$\Omega = 0 \quad (8.60)$$

Si ottiene:

$$K_{ae}^{\gamma,q} = \frac{[k_h - \tan(\phi' - \alpha)] \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta) + n_q \cdot r}{(\tan \alpha - \tan i) \cdot [\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan(\phi' - \alpha)]} \quad (8.61)$$

La differenza tra il valore del coefficiente di spinta attiva K_{ae} calcolato per il generico $k_h \neq k_{h,c}$ e quello calcolato per $k_h = k_{h,c}$ risulta:

$$K_{ae}(k_h) - K_{ae}(k_h = k_{h,c}) = \dots \dots (k_h - k_{h,c}) \cdot \frac{(1 + \tan i \cdot \tan \beta) \cdot (1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta) + n_q [(1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta) - \lambda \cdot (\tan \alpha - \tan i)]}{(\tan \alpha - \tan i) \cdot [\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan(\phi' - \alpha)]} \quad (8.62)$$

Quindi il coefficiente a_3 presente nell'equazione del moto si può esprimere nella forma:

$$a_3 = (k_h - k_{h,c}) \cdot a_w \quad (8.63)$$

con:

$$a_w = \frac{(1 + \tan i \cdot \tan \beta) \cdot (1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta) + n_q [(1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta) - \lambda \cdot (\tan \alpha - \tan i)]}{(\tan \alpha - \tan i) \cdot [\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan(\phi' - \alpha)]} \quad (8.64)$$

Appendice 8.C: Determinazione del fattore di forma per il caso di muro con terrapieno di altezza finita in presenza di sovraccarico

Con riferimento alla schema di Figura 8.5, questa appendice mostra come, il coefficiente a_3 presente nell'equazione del moto (8.12), possa essere espresso nella forma:

$$a_3 = (k_h - k_{h,c}) \cdot a_w \quad (8.65)$$

Il coefficiente a_3 è stato già definito dall'eq 8.15:

$$a_3 = K_{ae}(k_h) - K_{ae,c}(k_h = k_{h,c}) \quad (8.66)$$

Dove $K_{ae}(k_h)$ è il coefficiente di spinta calcolato per il generico $k_h \neq k_{h,c}$ mentre $K_{ae}(k_h = k_{h,c})$ è il coefficiente di spinta calcolato per il particolare valore $k_h = k_{h,c}$ corrispondente all'accelerazione critica del sistema.

Dalla risoluzione del sistema equazioni (6.12) che governa l'equilibrio del cuneo di terreno, prima di arrivare all'espressione generale del coefficiente di spinta attivo (eq. 6.15), il coefficiente di spinta attiva si può esplicitare come:

$$K_{ae}^{\gamma,q} = \frac{[k_h / (1 - \Omega \cdot k_h) - \tan(\phi' - \alpha)]}{\tan \alpha \cdot [\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan(\phi' - \alpha)]} \cdot \{[(1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta) \cdot (1 + 2 \cdot t) + \dots \dots + t \cdot (t - \lambda \cdot \tan \alpha)] + n_q \cdot [(1 + t) - \lambda \cdot \tan \alpha + \tan \alpha \cdot \tan \beta]\} \quad (8.67)$$

Ponendo:

$$\Omega = 0 \quad (8.68)$$

Si ottiene:

$$K_{ae}^{\gamma,q} = \frac{[k_h - \tan(\phi' - \alpha)]}{\tan \alpha \cdot [\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan(\phi' - \alpha)]} \cdot \{[(1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta) \cdot (1 + 2 \cdot t) + \dots \dots + t \cdot (t - \lambda \cdot \tan \alpha)] + n_q \cdot [(1 + t) - \lambda \cdot \tan \alpha + \tan \alpha \cdot \tan \beta]\} \quad (8.69)$$

La differenza tra il valore del coefficiente di spinta attiva K_{ae} calcolato per il generico $k_h \neq k_{h,c}$ e quello calcolato per $k_h = k_{h,c}$ risulta:

$$K_{ae}(k_h) - K_{ae}(k_h = k_{h,c}) = (k_h - k_{h,c}) \cdot \dots \dots \frac{\{[(1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta) \cdot (1 + 2 \cdot t) + \dots + t \cdot (t - \lambda \cdot \tan \alpha)] + n_q \cdot [(1 + t) - \lambda \cdot \tan \alpha + \tan \alpha \cdot \tan \beta]\}}{\tan \alpha \cdot [\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan(\phi' - \alpha)]} \quad (8.70)$$

Quindi il coefficiente a_3 presente nell'equazione del moto si può esprimere nella forma:

$$a_3 = (k_h - k_{h,c}) \cdot a_w \quad (8.71)$$

con:

$$a_w = \frac{\{[(1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta) \cdot (1 + 2 \cdot t) + \dots + t \cdot (t - \lambda \cdot \tan \alpha)] + n_q \cdot [(1 + t) - \lambda \cdot \tan \alpha + \tan \alpha \cdot \tan \beta]\}}{\tan \alpha \cdot [\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan(\phi' - \alpha)]} \quad (8.72)$$

Appendice 8.D: Determinazione del fattore di forma per il caso di muro di sostegno con terrapieno inclinato soggetto ad un carico lineare

Con riferimento alla schema di Figura 8.6, questa appendice mostra come, il coefficiente a_3 presente nell'equazione del moto (8.12), possa essere espresso nella forma:

$$a_3 = (k_h - k_{h,c}) \cdot a_w \quad (8.73)$$

Il coefficiente a_3 è stato già definito dall'eq 8.15:

$$a_3 = K_{ae}(k_h) - K_{ae,c}(k_h = k_{h,c}) \quad (8.74)$$

Dove $K_{ae}(k_h)$ è il coefficiente di spinta calcolato per il generico $k_h \neq k_{h,c}$ mentre $K_{ae}(k_h = k_{h,c})$ è il coefficiente di spinta calcolato per il particolare valore $k_h = k_{h,c}$ corrispondente all'accelerazione critica del sistema.

Dalla risoluzione del sistema equazioni (7.10) che governa l'equilibrio del cuneo di terreno, prima di arrivare all'espressione generale del coefficiente di spinta attivo (eq. 7.17), il coefficiente di spinta attiva si può esplicitare come:

$$K_{ae}^{\gamma, F} = \frac{[k_h / (1 - \Omega \cdot k_h) - \tan(\phi' - \alpha)]}{[\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan(\phi' - \alpha)]} \cdot \left[\frac{(\tan \beta \cdot \tan \alpha + 1) \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)}{(\tan \alpha - \tan i)} + n_f \right] \quad (8.75)$$

Ponendo:

$$\Omega = 0 \quad (8.76)$$

Si ottiene:

$$K_{ae}^{\gamma, F} = \frac{[k_h - \tan(\phi' - \alpha)]}{[\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan(\phi' - \alpha)]} \cdot \left[\frac{(\tan \beta \cdot \tan \alpha + 1) \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)}{(\tan \alpha - \tan i)} + n_f \right] \quad (8.77)$$

La differenza tra il valore del coefficiente di spinta attiva K_{ae} calcolato per il generico $k_h \neq k_{h,c}$ e quello calcolato per $k_h = k_{h,c}$ risulta:

$$K_{ae}(k_h) - K_{ae}(k_h = k_{h,c}) = (k_h - k_{h,c}) \cdot \dots \quad (8.78)$$

$$\dots \cdot \frac{1}{[\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan(\phi' - \alpha)]} \cdot \left[\frac{(\tan \beta \cdot \tan \alpha + 1) \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)}{(\tan \alpha - \tan i)} + n_f \right]$$

Quindi il coefficiente a_3 presente nell'equazione del moto si può esprimere nella forma:

$$a_3 = (k_h - k_{h,c}) \cdot a_w \quad (8.79)$$

con:

$$a_w = \frac{1}{[\cos(\delta + \beta) - \sin(\delta + \beta) \cdot \tan(\phi' - \alpha)]} \cdot \left[\frac{(\tan \beta \cdot \tan \alpha + 1) \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta)}{(\tan \alpha - \tan i)} + n_f \right] \quad (8.80)$$

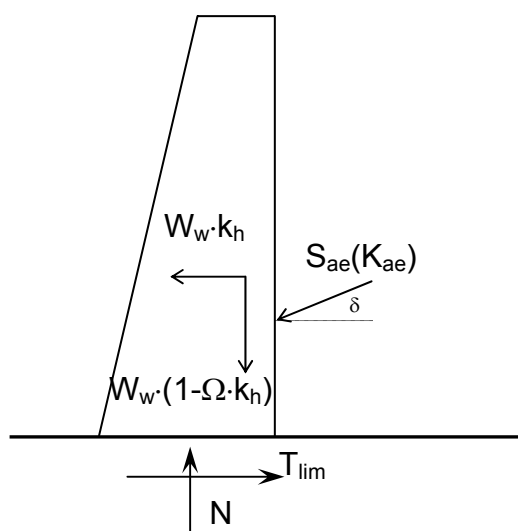


Figura 8.1 – Schema di riferimento per la determinazione dell'equazione del moto.

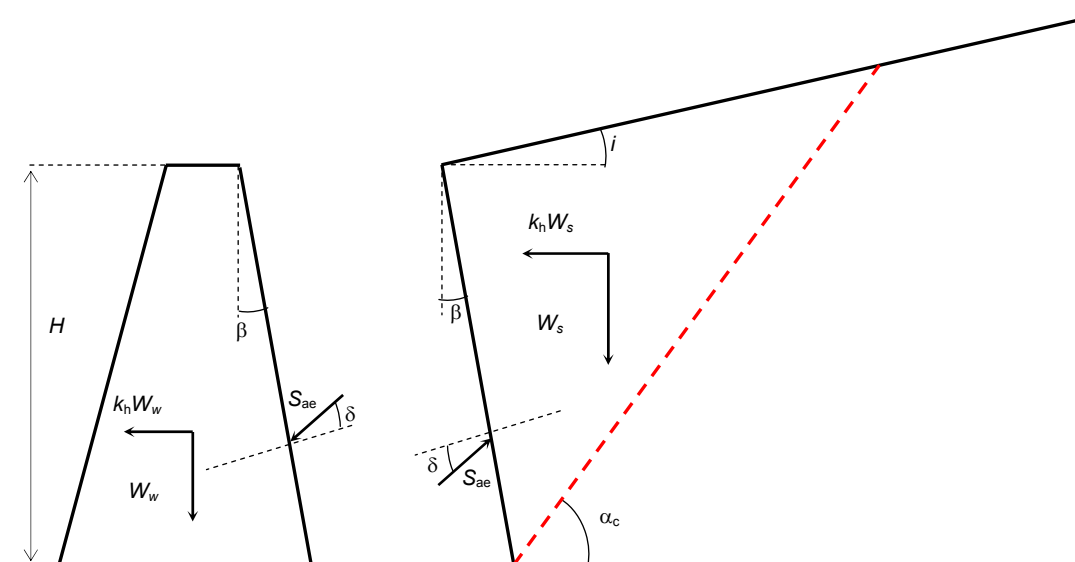


Figura 8.2 – Schema di riferimento per l'analisi.

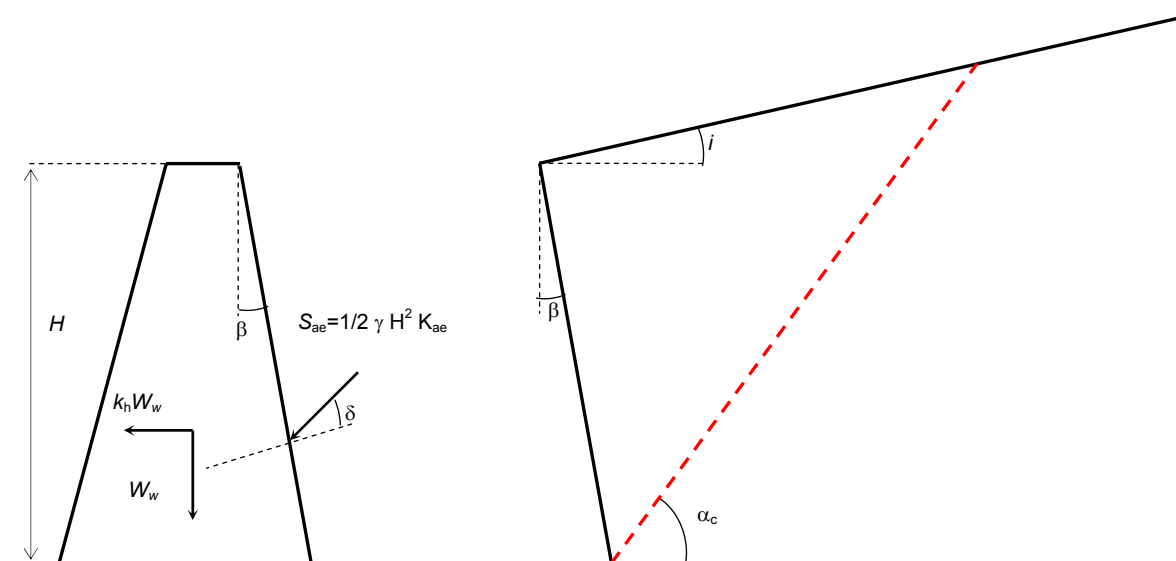


Figura 8.3 – Schema di riferimento per il caso di muro di sostegno.

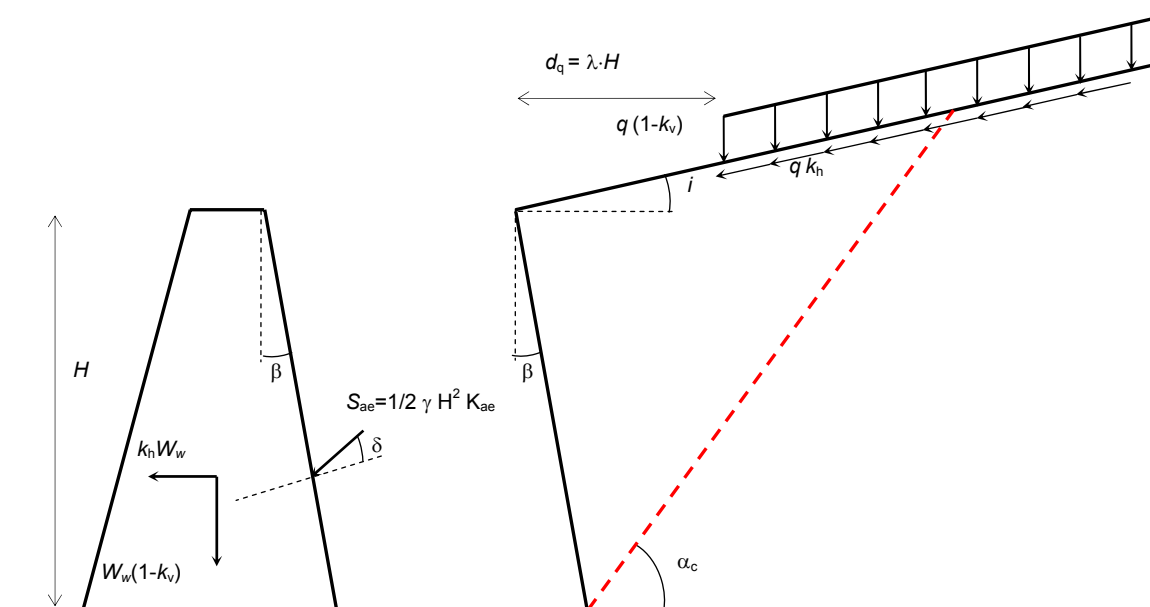


Figura 8.4 – Schema di riferimento per il caso di muro di sostegno in presenza di un sovraccarico distanziato ed esteso indefinitamente

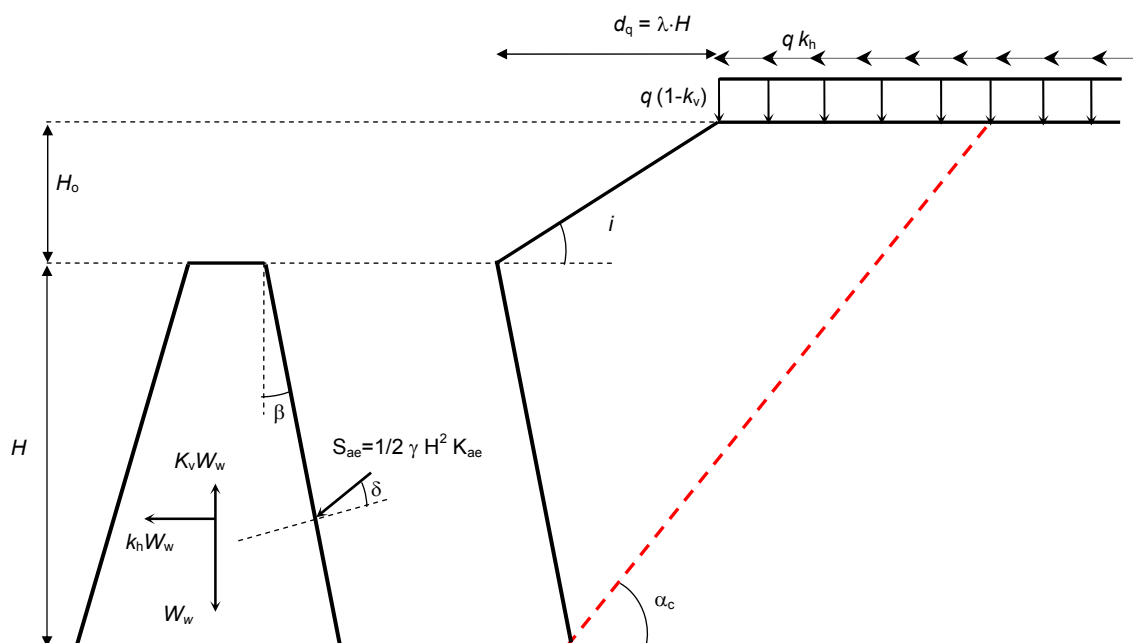


Figura 8.5 – Schema di riferimento per il caso di muro con terrapieno di altezza finita ed in presenza di sovraccarico

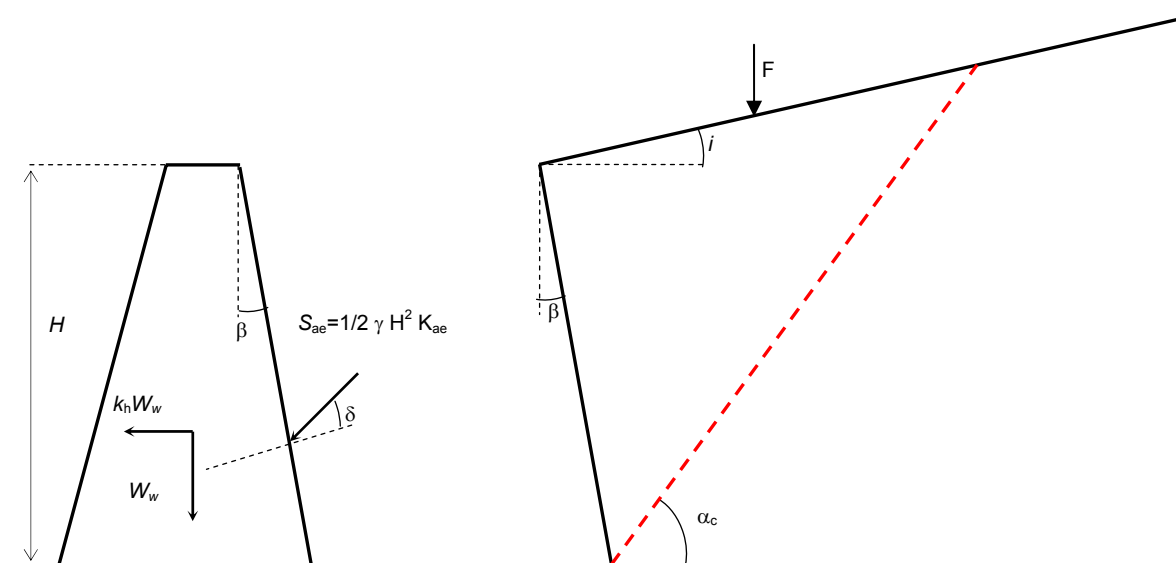


Figura 8.6 – Schema di riferimento per il caso di muro di sostegno con terrapieno inclinato soggetto ad un carico lineare.

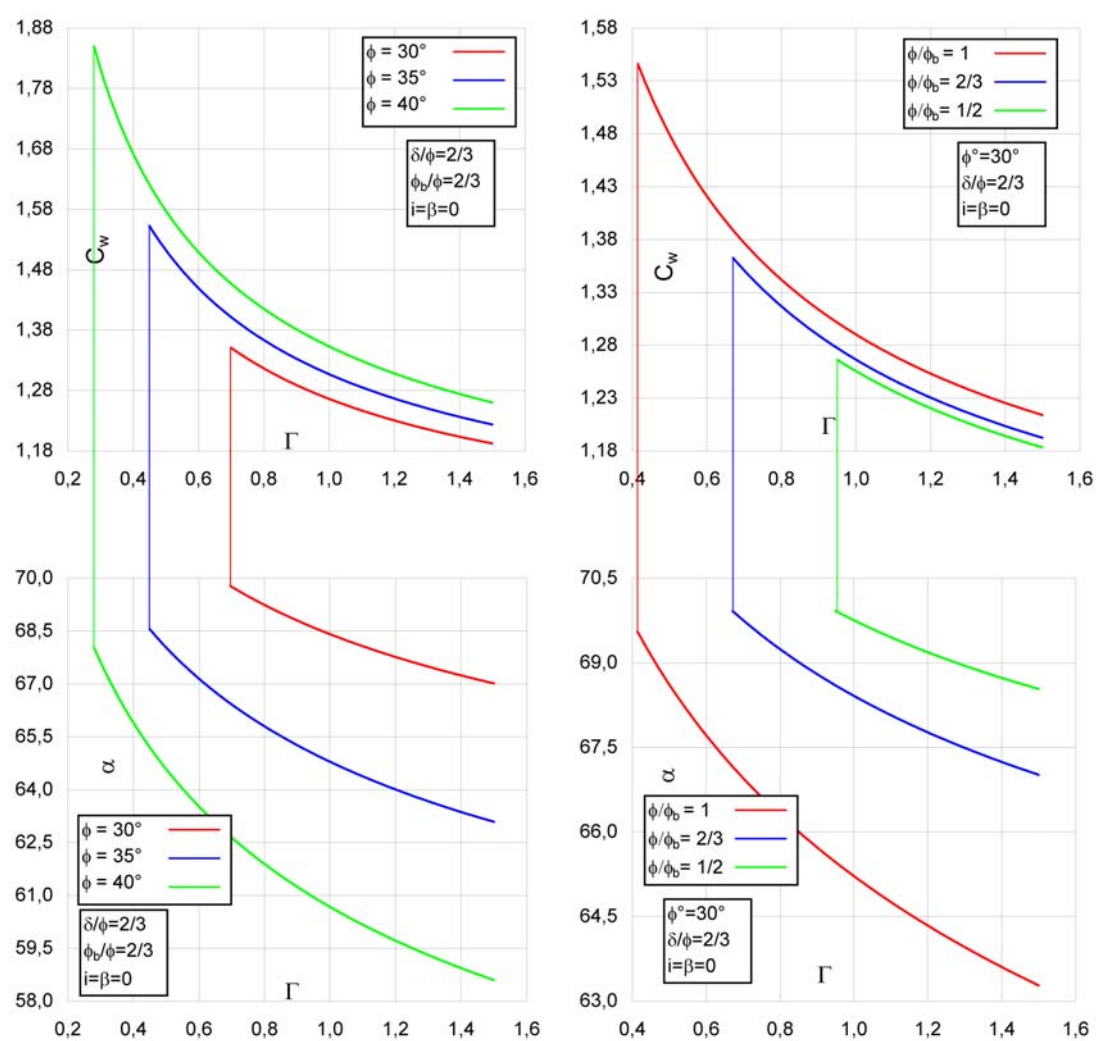


Figura 8.7 – Variazione del fattore di forma C_w e dell'angolo che individua il cinematismo critico con il peso normalizzato Γ per lo schema analizzato nell'Appendice 8A

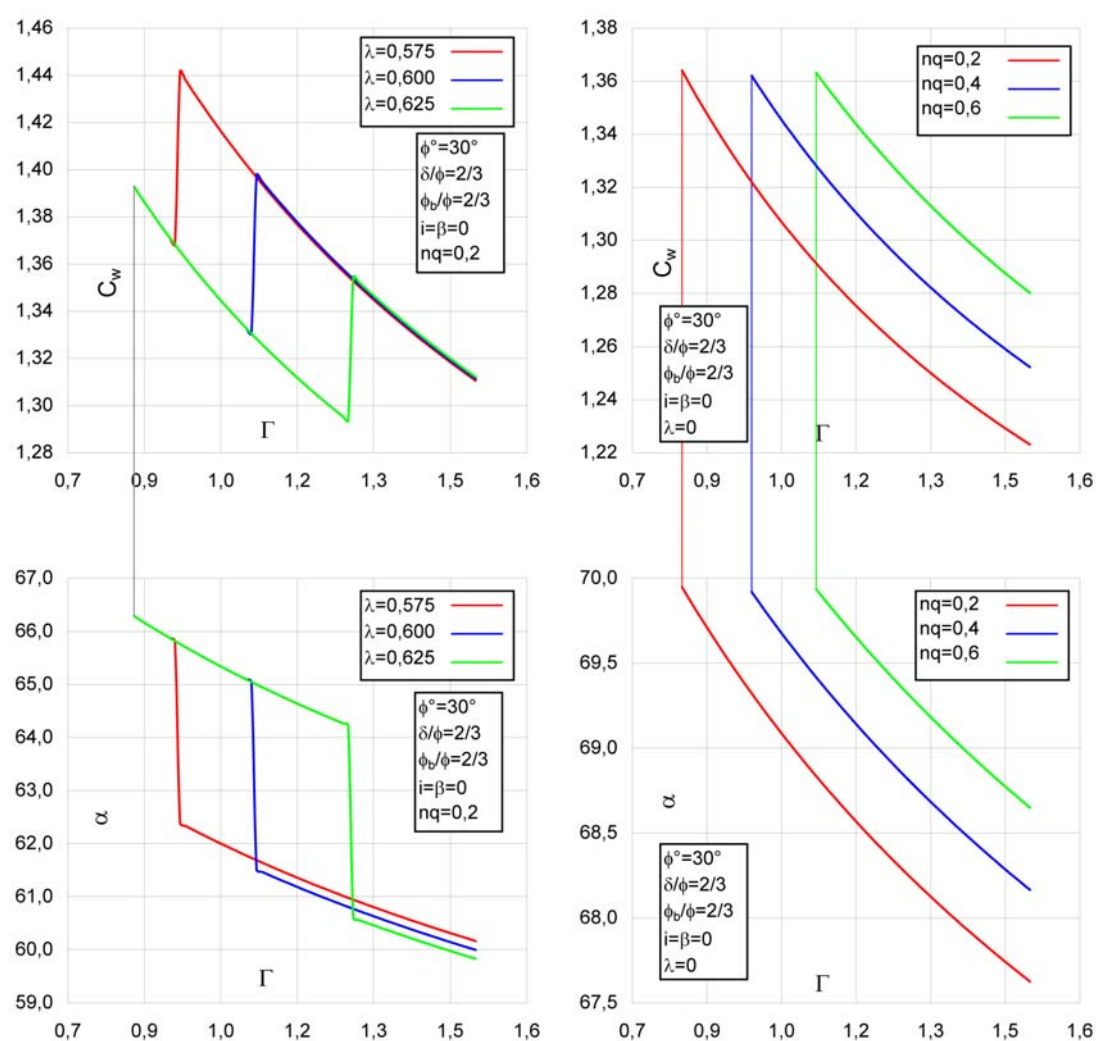


Figura 8.8 – Variazione del fattore di forma C_w e dell'angolo che individua il cinematismo critico con il peso normalizzato Γ per lo schema analizzato nell'Appendice 8B

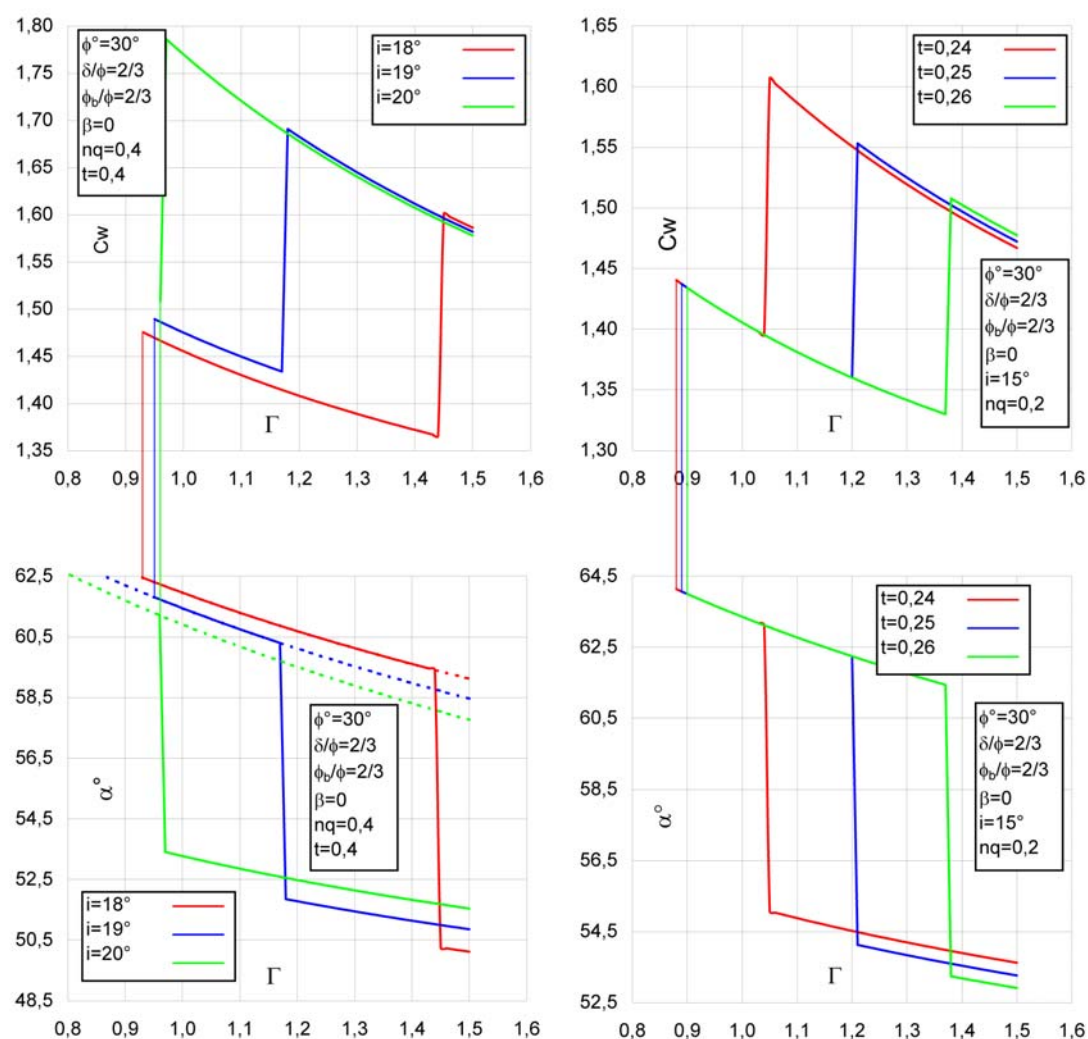


Figura 8.9 – Variazione del fattore di forma C_w e dell'angolo che individua il cinematismo critico con il peso normalizzato Γ per lo schema analizzato nell'Appendice 8C

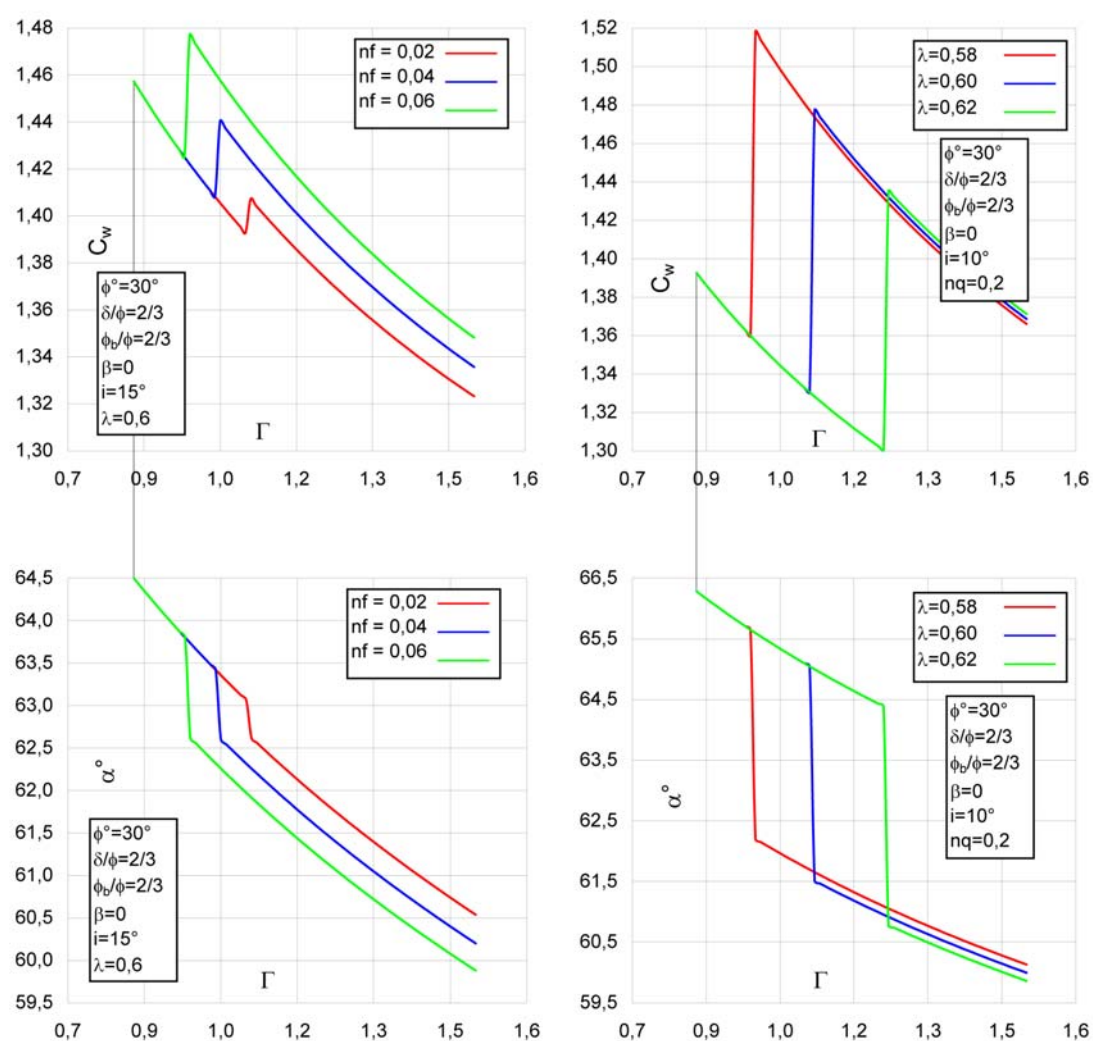


Figura 8.10 – Variazione del fattore di forma C_w e dell'angolo che individua il cinematismo critico con il peso normalizzato Γ per lo schema analizzato nell'Appendice 8D

CAPITOLO NONO

ANALISI AGLI SPOSTAMENTI NELL'IPOTESI DI GRANDI DEFORMAZIONI

9.1 Schema di riferimento per l'analisi

Il sistema geotecnico in esame fa riferimento ad un muro di sostegno posto a ridosso di un terrapieno la cui superficie di estradosso risulta inclinata di un angolo i rispetto all'orizzontale, ed il cui comportamento sotto azioni sismiche sia tale da vederne il cambio di geometria come mostrato nelle Figure 9.1 e 9.2. Nello schema di Figura 9.1 viene mostrata la configurazione di partenza, ovvero quella non deformata, mentre nello schema di Figura 9.2 fa riferimento allo stesso sistema in cui però, per effetto delle sollecitazioni indotte da un sisma, si sia verificato uno spostamento che ha portato ad una variazione della geometria del sistema.

Nelle due figure H rappresenta l'altezza iniziale del terrapieno mentre h quella relativa ad un cambio di geometria per cui sia avvenuto lo spostamento d_w alla base del cuneo.

Primo passo dell'analisi è stata la determinazione della relazione esistente tra H e h . Tale operazione è stata condotta imponendo una uguaglianza tra le aree dei due cunei relativi alla configurazione indeformata (Figura 9.1) e quella in cui si è avuto il cambio di geometria, (Figura 9.2). Dall'uguaglianza tra queste si ricava una relazione quadratica tra le altezze H , h e lo spostamento d_w . Risolvendo tale equazione, di secondo grado nella incognita h e scartando la soluzione negativa, si è pervenuti alla seguente relazione:

$$h = \frac{-d_w \cdot m + 0.5 \cdot \sqrt{4 \cdot d_w^2 \cdot m^2 + 4 \cdot (-1+n) \left[-d_w^2 + H^2 \cdot (-1+n) \right]}}{-1+n} \quad (9.1)$$

in cui

$$m = \cot i + \cot \alpha - \tan \alpha + \tan \beta \quad (9.2)$$

$$n = \cot \alpha \cdot (\cot i + \cot \alpha) + (\cot i + 2 \cot \alpha - \tan \alpha) \cdot \tan \beta + \tan^2 \beta \quad (9.3)$$

in cui α , β , i , H e d_w rispettivamente sono l'angolo di inclinazione che la superficie di rottura forma con l'orizzontale, l'inclinazione del paramento interno del muro, l'inclinazione della

superficie di estradosso del terrapieno, l'altezza dell'opera di sostegno e lo spostamento alla base del cuneo relativo al cambio di geometria.

9.2 Determinazione del coefficiente di spinta

Per la determinazione del coefficiente di spinta attiva in condizioni sismiche K_{ae} del sistema geotecnico in esame si è adottato l'approccio del metodo MB (multi-blocco) utilizzando il metodo dell'equilibrio limite. Nello spirito di un tale approccio la soluzione del problema (ovvero i valori di K_{ae} e $k_{h,c}$) è ricercata risolvendo simultaneamente le equazioni che descrivono le condizioni di equilibrio limite del cuneo di spinta (supposto in stato limite attivo) e le equazioni che descrivono le condizioni di equilibrio limite del muro ipotizzando che, per effetto delle azioni in stabilizzanti di natura sismica, esso possa traslare lungo il piano di posa della fondazione. Nell'analisi si è presa in esame una superficie di potenziale scorrimento del terrapieno piana individuata da una bilatera in cui, il primo tratto orizzontale risulta passante per il tacco del muro mentre il secondo è inclinato di un angolo α rispetto all'orizzontale come mostrato nella Figura 9.3.

Nell'analisi, inoltre, il cuneo di terreno risulta composto da due conci separati da una superficie parallela al paramento interno del muro come mostrato di seguito.

Suddividendo il cuneo in conci si introducono ulteriori forze che rappresentano le azioni mutue tra questi; tale suddivisione ha permesso di aggiungere alle equazioni di equilibrio un'ulteriore equazione che tiene conto del legame tra le forze agenti lungo la superficie di separazione.

Nella schema di Figura 9.4 con i simboli W e P si sono indicati rispettivamente il peso del 1° e del 2° concio; con Q ed R si sono indicate le reazioni alla base del 1° concio (reazioni sia nella direzione normale che tangenziale alla superficie) mentre con V ed H le azioni mutue tra questi. Infine con N e T si indicano le due reazioni che il terreno esercita nei confronti del cuneo potenzialmente instabile.

In tal modo, con riferimento al primo concio, è stato possibile scrivere il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} H \cdot \cos \beta + V \cdot \sin \beta - N \cdot \sin \alpha + T \cdot \cos \alpha - k_h \cdot P = 0 \\ H \cdot \sin \beta - V \cdot \cos \beta - P \cdot (1 - k_v) + T \cdot \sin \alpha + N \cdot \cos \alpha = 0 \\ T = N \cdot \tan \phi' \\ V = H' \cdot \tan \phi_{12} \end{cases} \quad (9.4)$$

Per il secondo cuneo invece si è ottenuto:

$$\begin{cases} S_{ae} \cdot \cos(\delta + \beta) - H \cdot \cos \beta - V \cdot \sin \beta - k_h \cdot W + Q = 0 \\ S_{ae} \cdot \sin(\delta + \beta) - H \cdot \sin \beta + V \cdot \cos \beta - (1 - k_h) \cdot W + R = 0 \\ Q = R \cdot \tan \phi_{12} \\ V = H' \cdot \tan \phi_{12} \end{cases} \quad (9.5)$$

Le eqq. 9.4 e 9.5 forniscono, per sostituzione, la seguente espressione per la spinta attiva:

$$S_{ae} = \frac{H' \cdot \cos(\beta + \phi_{12}) + W \cdot [\cos \phi_{12} \cdot k_h + \sin \phi_{12} \cdot (-1 + \Omega \cdot k_h)] - V \cdot \sin(\beta + \phi_{12})}{\cos(\beta + \delta + \phi_{12})} \quad (9.6)$$

in cui

$$H' = \frac{P \cdot \cos \phi_{12} \cdot \cos(\alpha - \phi) \cdot [k_h + (1 - \Omega \cdot k_h) \cdot \tan(\alpha - \phi)]}{\cos(\beta + \delta + \phi_{12})} \quad (9.7)$$

$$V = H' \cdot \tan \phi_{12} \quad (9.8)$$

Le due espressioni di W e P sono state ricavate con riferimento allo schema mostrato nelle Figure 9.5 e 9.6:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot d_w \frac{[2 \cdot h \cdot (\cot i + \tan \beta) + d_w]}{\cot i + \tan \beta} \quad (9.9)$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot \frac{[h \cdot (\cot i + \tan \beta) + d_w]^2}{\cot i + \tan \beta} \cdot \frac{\tan \alpha \cdot \tan \beta + 1}{\tan \alpha \cdot \cot i - 1} \quad (9.10)$$

Considerando le equazioni (9.6), (9.7), (9.8), (9.9) e (9.10) si è pervenuti alla definizione di una relazione per la spinta che risulta una funzione quadratica in $\tan \alpha$.

A tal punto si è ricavata l'espressione del coefficiente di spinta attiva K_{ae} :

$$K_{ae}(\alpha) = \frac{S_{ae}(\alpha)}{\frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot h^2 \cdot (1 - \Omega \cdot k_h)} \quad (9.11)$$

Il coefficiente di spinta attiva K_{ae} così determinato risulta essere una funzione quadratica in $\tan \alpha$ che può essere scritta nella forma:

$$K_{ae}(\alpha) = \frac{A_1 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_1 \cdot (\tan \alpha) + C_1}{A_2 \cdot (\tan \alpha)^2 + B_2 \cdot (\tan \alpha) + C_2} \quad (9.12)$$

in cui i coefficienti A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 e C_2 sono definiti dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{ \sec [\beta + \delta + \phi_{12}] \cdot (\cos [\theta - \phi] \cdot \cos [\beta + \phi_{12} + \phi_{12}] \cdot \sec [\theta] \cdot \sec [\phi] \\ &\quad \tan [\beta] \cdot (\chi + \tan [\beta])^2 + \cot [i] \cdot \sec [\theta] \cdot \sec [\phi] \cdot (2 \cos [\theta - \phi] \cdot \cos [\beta + \phi_{12} + \phi_{12}]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \tan [\beta] \cdot (\chi + \tan [\beta]) + \chi \cdot \sin [\beta + \phi + \phi_{12}] \cdot \sin [\theta - \varphi_{12}] \cdot (\chi + 2 \tan [\beta]) + \cot [i]^2 \cdot (2 \\ & \chi \cdot \sec [\theta] \cdot \sec [\phi] \cdot \sin [\beta + \phi + \phi_{12}] \cdot \sin [\theta - \varphi_{12}] + \cos [\beta + \phi_{12} + \varphi_{12}] \cdot \tan [\beta] \\ & (1 + \tan [\theta] \cdot \tan [\phi])) \} \end{aligned} \quad (9.13)$$

$$\begin{aligned} B_1 = & \{ \sec [\beta] \cdot \sec [\theta] \cdot \sec [\phi] \cdot \sec [\beta + \delta + \varphi_{12}] \cdot (\chi \cos [i + \beta + \phi + \phi_{12}] \\ & \csc [i] \cdot (\cos [\beta] \cdot (\chi + 2 \cot [i]) + 2 \sin [\beta]) \cdot \sin [\theta - \varphi_{12}] + \cos [\beta - \theta + \phi] \\ & \cos [\beta + \phi_{12} + \varphi_{12}] \cdot (\chi + \cot [i] + \tan [\beta])^2 \} \end{aligned} \quad (9.14)$$

$$\begin{aligned} C_1 = & \{ \cos [\beta + \phi_{12} + \varphi_{12}] \cdot \sec [\theta] \cdot \sec [\phi] \cdot \sec [\beta + \delta + \varphi_{12}] \cdot \sin [\theta - \phi] \cdot (\chi + \cot [i] + \tan [\beta])^2 - \\ & \chi \cdot \cos [\beta + \phi + \phi_{12}] \cdot \sin [\theta - \varphi_{12}] \cdot (\chi + 2 \cot [i] + 2 \tan [\beta]) \} \end{aligned} \quad (9.15)$$

$$A_2 = \{ \cos [i - \beta] \cdot \cot [i] \cdot \csc [i] \cdot \sec [\beta] \cdot \sec [\phi] \cdot \sin [\beta + \phi + \phi_{12}] \} \quad (9.16)$$

$$B_2 = \{ \cos [i - \beta] \cdot \cos [i + \beta + \phi + \phi_{12}] \cdot \csc [i]^2 \cdot \sec [\beta] \cdot \sec [\phi] \} \quad (9.17)$$

$$C_2 = \{ -\cos [i - \beta] \cdot \cos [\beta + \phi + \phi_{12}] \cdot \csc [i] \cdot \sec [\beta] \cdot \sec [\phi] \} \quad (9.18)$$

in cui:

$$\tan \theta = \frac{k_h}{1 - \Omega \cdot k_h} \quad (9.19)$$

$$\chi = \frac{d_w}{h} \quad (9.20)$$

Nelle formule precedenti ϕ_{12} e φ_{12} rappresentano rispettivamente il valore dell'angolo di resistenza al taglio alla base del primo concio (Figura 9.5) e quello relativo alla superficie di contatto, tra il primo ed il secondo concio (Figura 9.5).

Dalle relazioni precedenti è possibile notare come i coefficienti A_1, B_1, C_1, A_2, B_2 e C_2 dipendano dagli angoli $i, \beta, \phi, \phi_{12}, \varphi_{12}$ e θ .

L'equazione così ottenuta per K_{ae} è l'espressione di una conica parametrica che rivolge la sua concavità verso il basso.

Nello spirito del metodo adottato la determinazione di K_{ae} , che rappresenta la soluzione del problema, è stata ottenuta annullando il discriminante della equazione (9.12) risolta in funzione di $\tan \alpha$:

$$[B_2 \cdot K_{ae}(\alpha) - B_1]^2 - 4 \cdot [A_2 \cdot K_{ae}(\alpha) - A_1] \cdot [C_2 \cdot K_{ae}(\alpha) - C_1] = 0 \quad (9.21)$$

In tal modo è stato possibile ricavare una soluzione di massimo per K_{ae} .

L'espressione determinata è:

$$K_{ae} = \frac{r^2 \cdot \cos \beta \cdot \sin(\theta - \varphi_{12}) \cdot \chi \cdot (2s - \chi \cdot \sin i) + \cos(\beta + \phi_{12} + \varphi_{12}) \cdot s^2}{t \cdot \cos \theta \cdot r^2 \cdot \cos(\beta + \delta + \varphi_{12})} \cdot \dots \quad (9.22)$$

$$\dots \cdot \left[q - 2 \cdot \sqrt{-t \cdot \cos(\beta + \theta + \phi_{12}) \cdot \sin(i + \theta - \phi) \cdot \sin(\phi + \phi_{12})} \right]$$

in cui:

$$q = \frac{1}{2} \cdot [\cos(i - 2\beta - \theta - \phi_{12}) - \cos(i + \theta - 2\phi - \phi_{12}) + 2\cos(i + \theta + \phi_{12})] \quad (9.23)$$

$$r = \cos(i - \beta - \phi - \phi_{12}) \quad (9.24)$$

$$s = \cos i + \sin i \cdot (\chi + \tan \beta) \quad (9.25)$$

$$t = \cos(i - \beta) \quad (9.26)$$

Determinato in tal modo il coefficiente di spinta attiva, in accordo col metodo utilizzato, l'angolo di inclinazione della superficie di scorrimento del cuneo di terreno risulta:

$$\tan \alpha_c = \frac{B_1 - B_2 \cdot K_{ae}}{2 \cdot (A_2 \cdot K_{ae} - A_1)} \quad (9.27)$$

9.3 Determinazione del coefficiente sismico critico

Sempre nello spirito dell'approccio MB applicato col metodo dell'equilibrio limite, si descrive qui di seguito l'iter adottato per la determinazione del coefficiente di sismico critico $k_{h,c}$. Con riferimento allo schema di Figura 9.7 il metodo è stato applicato scrivendo un sistema le cui equazioni descrivono le condizioni di equilibrio limite del muro.

In condizione di equilibrio limite risulta:

$$\begin{cases} S_{ae} \cdot \cos(\delta + \beta) + k_h \cdot W_w - T_b = 0 \\ S_{ae} \cdot \sin(\delta + \beta) + (1 - k_h) \cdot W_w - N_b = 0 \\ T_b = N_b \cdot \tan \phi_b \end{cases} \quad (9.28)$$

la cui risoluzione fornisce la seguente espressione:

$$\frac{K_{ae}}{\Gamma} \cdot \frac{\cos(\delta + \beta + \varphi_b)}{\cos \varphi_b} + \tan \theta - \tan \varphi_b = 0 \quad (9.29)$$

in cui:

- Γ peso adimensionalizzato dell'opera;
- φ_b angolo di resistenza al taglio alla base del muro di sostegno.

Considerando la condizione limite per cui $\tan\theta = \tan\theta_c$ e la relazione (9.12), ovvero la relazione che esprime il coefficiente di spinta attiva come rapporto tra coniche parametriche in $\tan\alpha$, si ottiene la seguente relazione per il calcolo di θ_c :

$$\tan\theta_c = \frac{A_3 \cdot \tan^2\alpha + B_3 \cdot \tan\alpha + C_3}{A_4 \cdot \tan^2\alpha + B_4 \cdot \tan\alpha + C_4} \quad (9.30)$$

Utilizzando lo stesso approccio descritto con riferimento a K_{ae} , anche per la variabile $\tan\theta_c$ la soluzione risulta una conica parametrica in $\tan\alpha$. Si procede, pertanto, annullando il discriminante della equazione (9.30) e risolvendo in funzione di $\tan\alpha$. A differenza del caso relativo a K_{ae} tra le due soluzioni si è scelta quella di minimo in quanto il parametro cercato è il minimo valore del coefficiente di accelerazione critica.

Operando in tal modo si ottiene:

$$[B_4 \cdot \tan\theta_c - B_3]^2 - 4 \cdot [A_4 \cdot \tan\theta_c - A_3] \cdot [C_4 \cdot \tan\theta_c - C_3] = 0 \quad (9.31)$$

in cui i coefficienti A_3, B_3, C_3, A_4, B_4 e C_4 sono funzione di $i, \beta, \Gamma, \phi_{12}, \varphi, \varphi_{12}, \varphi_b$ e sono forniti dalle seguenti espressioni:

$$A_3 = \{ A \cdot B \cdot \sec[\phi_b] \cdot (G \cdot L^2 \cdot \tan[\beta] + \cot[i]^2 \cdot (-2 \cdot M \cdot \chi \cdot \sec[\phi] \cdot \sin[\varphi_{12}] + G \cdot \tan[\beta]) + \cot[i] \cdot (-J \cdot M \cdot \chi \cdot \sec[\phi] \cdot \sin[\varphi_{12}] + 2G \cdot L \cdot \tan[\beta])) - H \cdot M \cdot \Gamma \cdot \cot[i] \cdot \csc[i] \cdot \sec[\beta] \cdot \sec[\phi] \cdot \tan[\phi_b] \} \quad (9.32)$$

$$B_3 = \{ \sec[\phi] \cdot (A \cdot B \cdot G \cdot P^2 \cdot X \cdot \sec[\beta] \cdot \sec[\phi_b] - R \cdot \csc[i] \cdot (A \cdot B \cdot S \cdot \chi \cdot \sec[\phi_b] \cdot \sin[\varphi_{12}] + V \cdot \Gamma \cdot \tan[\phi_b])) \} \quad (9.33)$$

$$C_3 = -A \cdot B \cdot G \cdot P^2 \cdot \sec[\phi_b] \cdot \tan[\phi] + Z \cdot \sec[\phi] \cdot (A \cdot B \cdot S \cdot \chi \cdot \sec[\phi_b] \cdot \sin[\varphi_{12}] + V \cdot \Gamma \cdot \tan[\phi_b]) \quad (9.34)$$

$$A_4 = \{ -H \cdot M \cdot \Gamma \cdot \cot[i] \cdot \csc[i] \cdot \sec[\beta] \cdot \sec[\phi] - A \cdot B \cdot \sec[\phi_b] \cdot (M \cdot S \cdot \chi \cdot \cos[\varphi_{12}] \cdot \cot[i] \cdot \sec[\phi] + G \cdot P^2 \cdot \tan[\beta] \cdot \tan[\phi]) \} \quad (9.35)$$

$$B_4 = \{ -\sec[\phi] \cdot (H \cdot R \cdot \Gamma \cdot \csc[i]^2 \cdot \sec[\beta] + A \cdot B \cdot (R \cdot S \cdot \chi \cdot \cos[\varphi_{12}] \cdot \csc[i] + G \cdot P^2 \cdot Y \cdot \sec[\beta]) \cdot \sec[\phi_b]) \} \quad (9.36)$$

$$C_4 = \{ H \cdot Z \cdot \Gamma \cdot \csc[i] \cdot \sec[\beta] \cdot \sec[\phi] - A \cdot B \cdot (G \cdot P^2 - S \cdot Z \cdot \chi \cdot \cos[\varphi_{12}] \cdot \sec[\phi]) \cdot \sec[\phi_b] \} \quad (9.37)$$

in cui:

$$H = \cos(i - \beta); \quad (9.38)$$

$$R = \cos(i + \beta + \phi + \phi_{12}); \quad (9.39)$$

$$A = \cos(\beta + \delta + \phi_b); \quad (9.40)$$

$$B = \sec(\beta + \delta + \phi_{12}); \quad (9.41)$$

$$G = \cos(\beta + \phi_{12} + \phi_{12}); \quad (9.42)$$

$$P = \chi + \cot i + \tan \beta; \quad (9.43)$$

$$L = \chi + \tan \beta; \quad (9.44)$$

$$M = \sin(\beta + \phi + \phi_{12}); \quad (9.45)$$

$$J = \chi + 2 \tan \beta; \quad (9.46)$$

$$S = \chi + 2 \tan \beta + 2 \cot i; \quad (9.47)$$

$$V = \tan \beta + \cot i; \quad (9.48)$$

$$Y = \sin(\beta + \phi); \quad (9.49)$$

$$Z = \cos(\beta + \phi + \phi_{12}); \quad (9.50)$$

$$X = \cos(\beta + \phi); \quad (9.51)$$

Note le espressioni di A_3, B_3, C_3, A_4, B_4 e C_4 è stato possibile determinare il valore della $\tan \theta_c$ attraverso la seguente relazione:

$$\tan \theta_c = \frac{B_3 \cdot B_4 - 2A_4 \cdot C_3 - 2A_3 \cdot C_4 + \sqrt{(2C_3 \cdot A_4 - B_3 \cdot B_4 + 2A_3 \cdot C_4)^2 - (B_3^2 - 4A_3 \cdot C_3) \cdot (B_4^2 - 4A_4 \cdot C_4)}}{B_4^2 - 4A_4 \cdot C_4} \quad (9.52)$$

ottenuta risolvendo l'equazione quadratica in $\tan \alpha$ (9.30) e scartando la soluzione negativa.

Il coefficiente di sismico critico è legato alla $\tan \theta_c$ dalla relazione (9.19) da cui si ottiene:

$$k_{h,c} = \frac{\tan \theta_c}{1 \pm \Omega \cdot \tan \theta_c} \quad (9.53)$$

Per congruenza con la metodologia adottata si è verificato che la relazione:

$$\tan \alpha_c = \frac{B_3 - B_4 \cdot \tan \theta_c}{2(A_4 \cdot \tan \theta_c - A_3)} \quad (9.54)$$

fornisce lo stesso risultato dell'eq. (9.26).

9.4 Determinazione dell'equazione del moto del sistema e del fattore di forma

Con riferimento alla schema di Figura 9.7, questo paragrafo mostra come, il coefficiente a_3 presente nell'equazione del moto, già descritta nel capitolo ottavo del presente lavoro di tesi, possa essere espresso nella forma:

$$a_3 = (k_h - k_{h,c}) \cdot a_w \quad (9.55)$$

Il coefficiente a_3 è stato già definito dall'eq 8.15 del capitolo ottavo nella forma:

$$a_3 = K_{ae}(k_h) - K_{ae,c}(k_h = k_{h,c}) \quad (9.56)$$

dove $K_{ae}(k_h)$ è il coefficiente di spinta calcolato per il generico valore $k_h \neq k_{h,c}$ mentre $K_{ae}(k_h = k_{h,c})$ è il coefficiente di spinta calcolato per il particolare valore $k_h = k_{h,c}$ corrispondente all'accelerazione critica del sistema.

Dalla risoluzione del sistema equazioni (9.4 e 9.5) che governano l'equilibrio del cuneo di terreno, il coefficiente di spinta attiva si può esplicitare nella forma:

$$K_{ae} = \sec(\beta + \delta + \varphi_{12}) \cdot \left[\frac{A \cdot \cos(\beta + \phi_{12} + \varphi_{12}) \cdot [k_h / (1 - \Omega \cdot k_h) + C]}{\cos(\beta + \phi_{12}) + \sin(\beta + \phi_{12}) \cdot C} + \dots \right] \quad (9.57)$$

$$\left[\dots + B \cdot \cos \varphi_{12} \cdot [k_h / (1 - \Omega \cdot k_h) - \tan \varphi_{12}] \right]$$

con;

$$A = \frac{(\chi \cdot \tan i + 1 + \tan i \cdot \tan \beta)^2}{1 + \tan i \cdot \tan \beta} \cdot \frac{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}{\tan \alpha - \tan i}$$

$$B = 2 \cdot \chi + \frac{\chi^2 \cdot \tan i}{1 + \tan i \cdot \tan \beta} \quad (9.58)$$

$$C = \frac{\tan \alpha - \tan \phi}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \phi}$$

Ponendo:

$$\Omega = 0 \quad (9.59)$$

Si ottiene:

$$K_{ae} = \sec(\beta + \delta + \varphi_{12}) \cdot \left[\frac{A \cdot \cos(\beta + \phi_{12} + \varphi_{12}) \cdot [k_h + C]}{\cos(\beta + \phi_{12}) + \sin(\beta + \phi_{12}) \cdot C} + B \cdot \cos \varphi_{12} \cdot [k_h - \tan \varphi_{12}] \right] \quad (9.60)$$

La differenza tra il valore del coefficiente di spinta attiva K_{ae} calcolato per il generico $k_h \neq k_{h,c}$ e quello calcolato per $k_h = k_{h,c}$ risulta:

$$K_{ae}(k_h) - K_{ae}(k_h = k_{h,c}) = (k_h - k_{h,c}) \cdot \sec(\beta + \delta + \varphi_{12}) \cdot \dots$$

$$\dots \left[\frac{\cos(\beta + \phi_{12} + \varphi_{12}) \cdot (1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta) \cdot [1 + \tan i \cdot (\chi + \tan \beta)]^2 \cdot \cos(\alpha - \phi)}{(\tan \alpha - \tan i) \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta - \phi - \phi_{12})} + 2 \cdot \chi + \dots \right]$$

$$\dots \left[\dots \frac{\chi^2 \cos \beta \cdot \cos \varphi_{12} \cdot \sin i}{\cos(i - \beta)} \right] \quad (9.61)$$

Quindi il coefficiente a_3 presente nell'equazione del moto si può esprimere nella forma:

$$a_3 = (k_h - k_{h,c}) \cdot a_w \quad (9.62)$$

con:

$$a_w = \sec(\beta + \delta + \varphi_{12}) \cdot \dots$$

$$\dots \left[\frac{\cos(\beta + \phi_{12} + \varphi_{12}) \cdot (1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta) \cdot [1 + \tan i \cdot (\chi + \tan \beta)]^2 \cdot \cos(\alpha - \phi)}{(\tan \alpha - \tan i) \cdot (1 + \tan i \cdot \tan \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta - \phi - \phi_{12})} + 2 \cdot \chi + \dots \right]$$

$$\dots \left[\dots \frac{\chi^2 \cos \beta \cdot \cos \varphi_{12} \cdot \sin i}{\cos(i - \beta)} \right] \quad (9.63)$$

e quindi il fattore di forma resta così definito come:

$$C_w = 1 + a_2 \cdot a_w$$

dove:

$$a_2 = \frac{\cos(\delta + \beta) - \tan \varphi_b \cdot \sin(\delta + \beta)}{\Gamma} \quad (9.64)$$

9.5 ANALISI PARAMETRICA

9.5.1 Coefficiente di spinta

Al fine di individuare l'influenza di ciascuno dei parametri del modello delle soluzioni determinate, si è proceduto ad un'analisi parametrica.

Nell'analisi sono state trattate separatamente le soluzioni sviluppate per K_{ae} , $k_{h,c}$ e C_w .

La Figura 9.8 descrive l'andamento di K_{ae} al variare di ϕ_{12}/ϕ per differenti valori del rapporto χ ; dai dati è possibile notare come la soluzione di Mononobe - Okabe (M – O in Fig. 9.8) relativa ad una configurazione non deformata risulti costante al variare di ϕ_{12} . Gli effetti del

cambio di geometria, invece, presi in esame nelle soluzioni proposte se fissiamo un valore di ϕ_{12} è possibile notare come ad un valore più grande di χ ne corrisponda uno minore di K_{ae} proprio in virtù di un aumento delle resistenze del sistema al moto del cuneo verso valle; per contro per un assegnato valore di χ all'aumentare di ϕ_{12} si ha una diminuzione del coefficiente in accordo al fatto che più elevati valori dell'azione di taglio tra i due cunei porta ad un minor valore della spinta del terrapieno sul muro.

In Figura 9.9 si prende in riferimento la variazione del coefficiente di spinta attiva in condizioni sismiche per differenti valori del rapporto ϕ_{12}/ϕ . Anche per questo si possono fare le stesse identiche considerazioni fatte per ϕ_{12} con l'unica eccezione sulla legge di variazione. Anche in questo caso è da notare l'invarianza del coefficiente di spinta di Mononobe - Okabe che fa riferimento ad un cuneo di terreno in assenza di cambio di geometria e, quindi, ad una configurazione non deformata del sistema.

Infine un'ultima analisi è relativa al valore di χ ; la Figura 9.10 mostra i risultati relativi alle variazioni di K_{ae} in relazione al rapporto tra d_w e h . Ancora una volta si evidenzia la costanza del coefficiente di Mononobe - Okabe proprio perché questo non prende in esame il cambio di geometria e, quindi, i parametri atti a descriverne gli effetti. Il grafico evidenzia l'andamento del coefficiente di spinta in relazione a χ in relazione a tre differenti valori delle coppie ϕ_{12}, φ_{12} . Possiamo notare come per un valore nullo di χ e per valori dell'angolo ϕ_{12} uguali a quelli di δ (angolo di attrito terra-muro) la soluzione determinata conduce allo stesso identico valore del coefficiente di Mononobe - Okabe. Al crescere invece dei valori di ϕ_{12} e φ_{12} si ha, in generale, un aumento delle condizioni di stabilità proprio per un sopravvenuto miglioramento delle proprietà meccaniche del sistema; fissati i valori di una coppia ϕ_{12} e φ_{12} è possibile notare come l'influenza del parametro sia notevole. Infatti considerando la curva relativa alla condizione $\phi_{12} = \varphi_{12} = 20^\circ$ intorno a valori di χ di circa il 30% il valore di K_{ae} risulta pari a circa 0,2 il che è indicativo di una forte diminuzione della spinta che il terrapieno esercita sul muro.

La Figura 9.10 consente, anche, di effettuare considerazioni sugli effetti che un sisma produce su un terreno. In generale è possibile notare come ad un aumento di χ , parametro che tiene conto delle deformazioni del cuneo a seguito di un evento sismico tale da procurare spostamenti permanenti, si abbia una diminuzione del coefficiente di spinta proprio in accordo ad un sopravvenuto miglioramento delle condizioni di stabilità del sistema; infatti a valori di χ elevati corrispondono minori altezze del terrapieno a ridosso del muro di sostegno e, come conseguenza, un aumento delle reazioni fornite dal terreno specie in corrispondenza della base del 1° concio (in cui diviene maggiore l'azione della forza di taglio

che si oppone allo scorrimento verso valle del cuneo e, soprattutto, una riduzione della spinta).

9.5.2 Coefficiente sismico critico

Nella Figura 9.11 si riporta l'andamento del coefficiente di accelerazione critica al variare del rapporto ϕ_{12}/ϕ per differenti valori di χ ed inoltre è mostrato anche il coefficiente di accelerazione critica relativo ad un sistema geotecnico il cui cinematismo non ammetta il cambio di geometria; la curva relativa a quest'ultimo caso è quella che si presenta cotante ed invariante al crescere di ϕ_{12} . Le altre curve sono state ottenute dalla relazione di $k_{h,c}$ determinata in questo capitolo fissando $\phi=30^\circ$, $\delta=1/3 \phi$, $i=\beta=5^\circ$ e assumendo diversi valori di ϕ_{12} .

E' possibile notare che una volta fissato un dato valore di riferimento per ϕ_{12} al crescere di χ , e quindi al diminuire della altezza h , si abbia un aumento del coefficiente di accelerazione critica. Ciò equivale a dire che si innalza la soglia di minima accelerazione necessaria per indurre spostamenti permanenti nel muro in esame.

Il diagramma di Figura 9.12 mostra la legge di variazione del coefficiente di accelerazione critica in relazione al rapporto ϕ_{12}/ϕ . Anche in questo caso si possono fare considerazioni analoghe al caso di Figura 9.11. Unica differenza è la legge di variazione di $k_{h,c}$. Anche in questo caso è possibile notare come ad un miglioramento delle proprietà meccaniche del terreno costituente il terrapieno segua una aumento della soglia $k_{h,c}$.

Si è, inoltre, valutata la dipendenza del coefficiente $k_{h,c}$ dal peso adimensionalizzato. In questo caso (Figura 9.13 e 9.14) la dipendenza dai valori di Γ risulta molto marcata.

Il grafico di Figura 9.13 mostra l'andamento di $k_{h,c}$ al variare di χ espresso in termini percentuali per tre differenti curve, ognuna riferita ad un dato valore del peso adimensionalizzato Γ . E' possibile osservare come, fissato un valore di χ , al crescere del fattore di peso Γ aumenti il valore di $k_{h,c}$; infatti un aumento di Γ implica un aumento del peso del muro e, quindi, della stabilità nei confronti dello scorrimento.

Ancora dallo stesso grafico si evince che fissando un valore di riferimento per Γ all'aumentare di χ si ha un incremento di $k_{h,c}$ ovvero un miglioramento delle condizioni di stabilità nei confronti delle azioni indotte da un sisma.

Infine la Figura 9.14 riporta l'andamento di $k_{h,c}$ per differenti valori di χ in funzione del fattore di peso adimensionalizzato Γ . I risultati mostrano la dipendenza del coefficiente di accelerazione critica dal peso adimensionalizzato ed al parametro χ . Fissato un valore di Γ al crescere di χ si osserva un notevole incremento del valore di $k_{h,c}$. Considerando infatti adesso per esempio la curva relativa al caso $\chi = 5\%$, l'incremento del coefficiente di accelerazione critica all'aumentare di Γ è notevole e di gran lunga superiore a quello visto nelle analisi relative agli altri parametri considerati.

9.5.3 Fattore di forma

L'analisi parametrica sul fattore di forma C_w ha riguardato i parametri che definiscono il cambio di geometria. In particolare sono stati analizzati gli effetti dei parametri ϕ_{12}/ϕ , φ_{12}/ϕ del peso adimensionalizzato Γ e del rapporto χ .

Nella Figura 9.15 è mostrato l'andamento del coefficiente di forma C_w al variare del rapporto ϕ_{12}/ϕ . In essa sono presenti più curve relative a differenti valori del parametro χ , fattore che tiene conto del cambio di geometria. E' possibile notare che fissato un valore di riferimento per ϕ_{12} all'aumentare di χ il coefficiente di forma diverge dall'unità; tale andamento si può spiegare considerando che maggiore è la deformazione del cuneo e più ci si allontana dallo schema ideale di blocco rigido ipotizzato da Newmark.

Con riferimento al grafico di Figura 9.15 si consideri una curva (es. quella relativa a $\chi=5\%$); si può notare che all'aumentare del rapporto ϕ_{12}/ϕ , (cui corrisponde un miglioramento delle proprietà meccaniche del sistema), il valore di C_w tende invece ad avvicinarsi all'unità in ragione di una maggiore resistenza del sistema.

Il secondo parametro di cui si sono studiati gli effetti su C_w è l'angolo φ_{12} . Ricordando che esso è stato definito per descrivere la relazione tra le reazioni Q ed R agenti alla base del 1° concio (Figura 9.5).

I dati riferiti all'analisi sono mostrati in Figura 9.16. Il grafico mostra le leggi di variazione del coefficiente di forma in relazione a quattro differenti valori di χ .

L'andamento, simile ad un ramo di iperbole, mostra che all'aumentare di φ_{12} il coefficiente C_w tende a crescere, allontanandosi dall'unità. Il motivo di un tale fenomeno è dovuto al fatto che φ_{12} è proporzionale alla forza di taglio agente alla base del 1° concio, per cui ad un suo

aumento ne corrisponde uno di Q . La forza Q produce nel sistema reale effetti che nel modello di Newmark non sono considerati.

La stessa considerazione vale per il parametro χ ; sempre con riferimento alla Figura 9.16 fissato un dato valore di riferimento per φ_{12} al crescere di χ si nota una divergenza di C_w proprio a conferma di un maggiore allontanamento dalle condizioni ideali di blocco rigido.

Nel grafico di Figura 9.17 sono riportate quattro differenti curve di C_w , relative a diversi valori di χ , di cui si sono studiati gli effetti al variare del peso adimensionalizzato Γ ; si evince che il parametro Γ è quello che governa l'andamento di C_w . Infatti l'influenza di Γ su C_w è marcatamente superiore a quella di χ . Le leggi di variazione del coefficiente di forma, ricavate in funzione di quattro differenti valori del parametro χ , risultano molto vicine l'una all'altra e seguono un andamento identico al variare di Γ . Inoltre per valori elevati del peso adimensionalizzato C_w tende all'unità, indipendentemente da χ :

$$\lim_{\Gamma \rightarrow \infty} C_w = 1 \quad (9.65)$$

mentre al tendere a zero del peso adimensionalizzato si ottengono valori elevatissimi del coefficiente di forma e, quindi, degli spostamenti stimati.

$$\lim_{\Gamma \rightarrow 0} C_w = \infty \quad (9.66)$$

La Figura 9.18 riporta il coefficiente di forma in funzione del parametro χ per differenti valori del peso adimensionalizzato Γ .

Per un dato valore di χ all'aumentare del peso dell'opera di sostegno si ha una riduzione dei valori di C_w ; ciò trova conferma nel fatto che ad elevati valori di Γ corrisponde una maggiore resistenza del sistema reale. Sempre con riferimento allo stesso grafico è possibile notare come le leggi di variazione delle tre curve presenti siano simili e che, fissata una di queste (per esempio quella relativa a $\Gamma=1$), all'aumentare di χ si abbia una divergenza dai valori prossimi all'unità. Infatti come osservato precedentemente tanto più elevato è il valore di χ , tanto maggiore è la deformazione del cuneo e, di conseguenza, tanto più il sistema differisce dal modello teorico di blocco rigido.

Quindi per effetto della diretta proporzionalità tra C_w e gli spostamenti, è chiaro che un aumento di χ porta a valori maggiori degli spostamenti.

Di contro elevati valori di Γ tendono a far diminuire gli spostamenti indotti da un sisma, proprio in virtù di una maggiore stabilità del sistema in esame.

Con riferimento ai parametri geotecnici possiamo affermare che l'angolo ϕ_{12} ha un effetto benefico nei confronti delle azioni sismiche nel senso che più alto è il suo valore minore è l'entità degli spostamenti indotti da un terremoto e viceversa. Infine è doveroso osservare come gli spostamenti permanenti indotti dalle azioni sismiche crescano al crescere di ϕ_{12} .

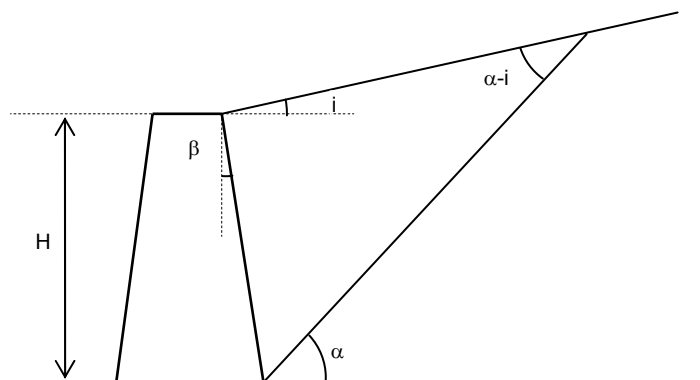


Figura 9.1 – Schema di riferimento per l'analisi agli spostamenti: configurazione in deformata.

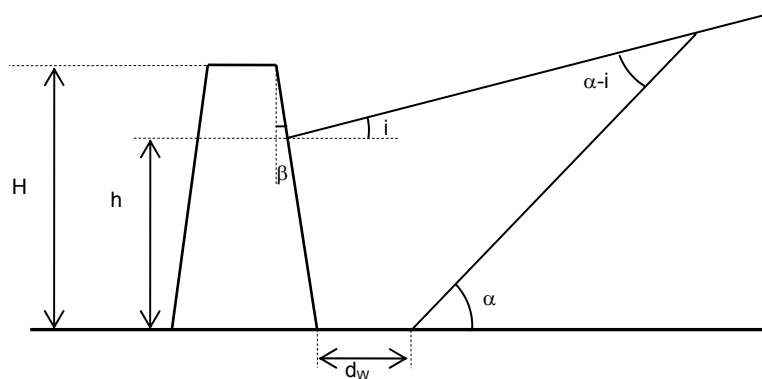


Figura 9.2 – Schema di riferimento per l'analisi agli spostamenti: cambio di geometria.

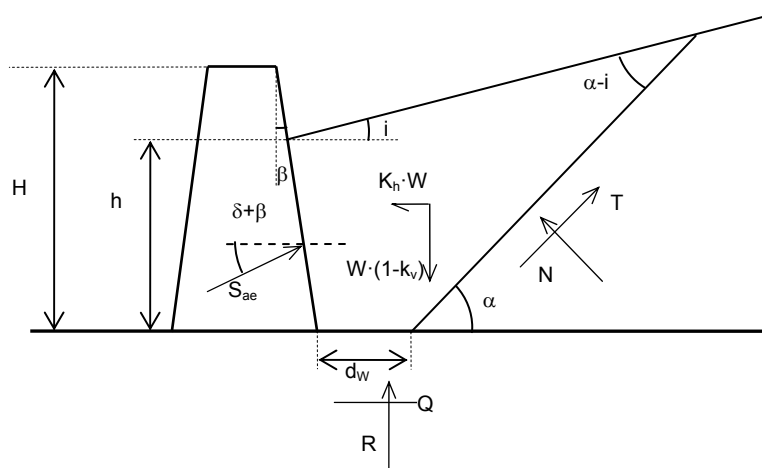


Figura 9.3 – Configurazione deformata del sistema.

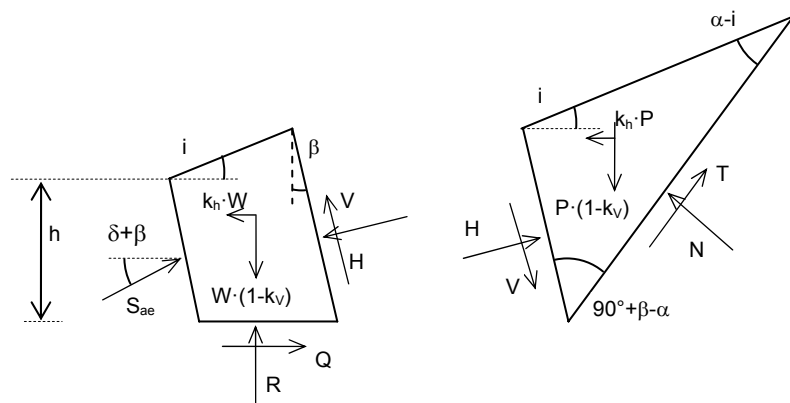


Figura 9.4 – Schema di riferimento per l'analisi MB

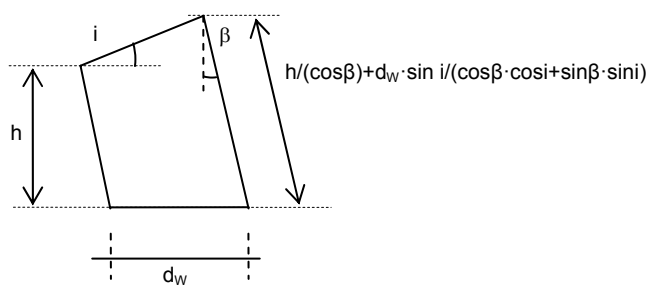


Figura 9.5 – Schema di riferimento per il primo concio

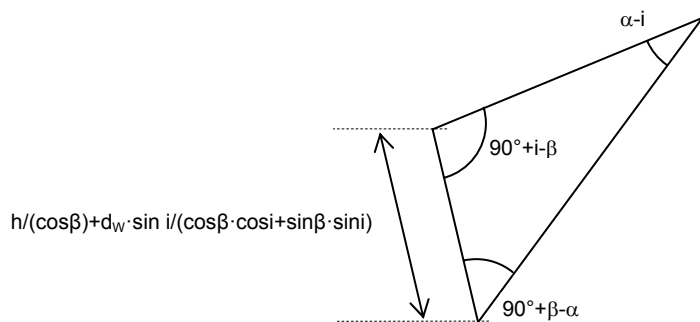


Figura 9.6 – Schema di riferimento per il secondo concio

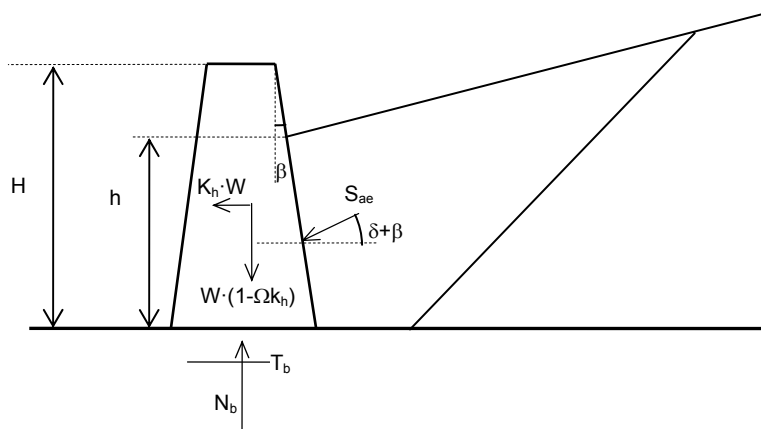


Figura 9.7 – Schema di riferimento per la valutazione dell'equazione del moto.

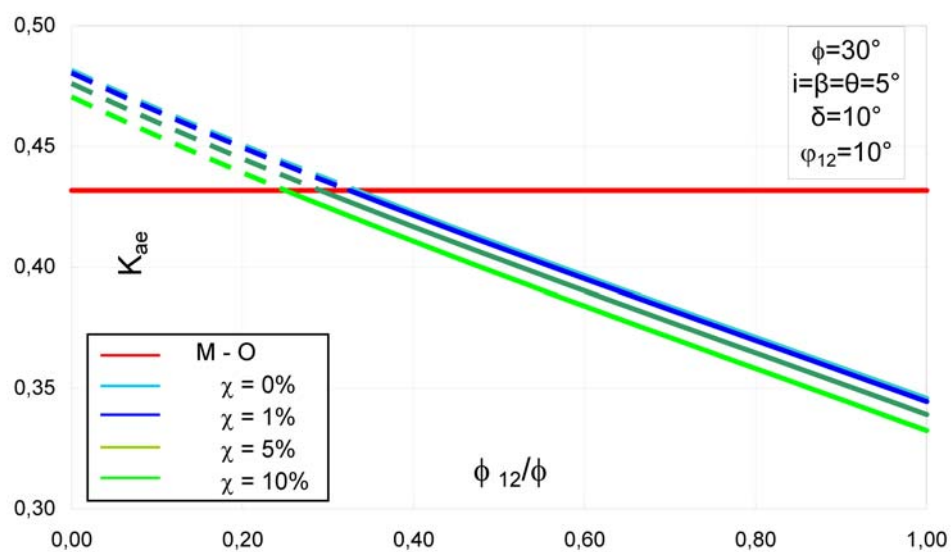


Figura 9.8 – Variazione di K_{ae} con il rapporto ϕ_{12}/ϕ

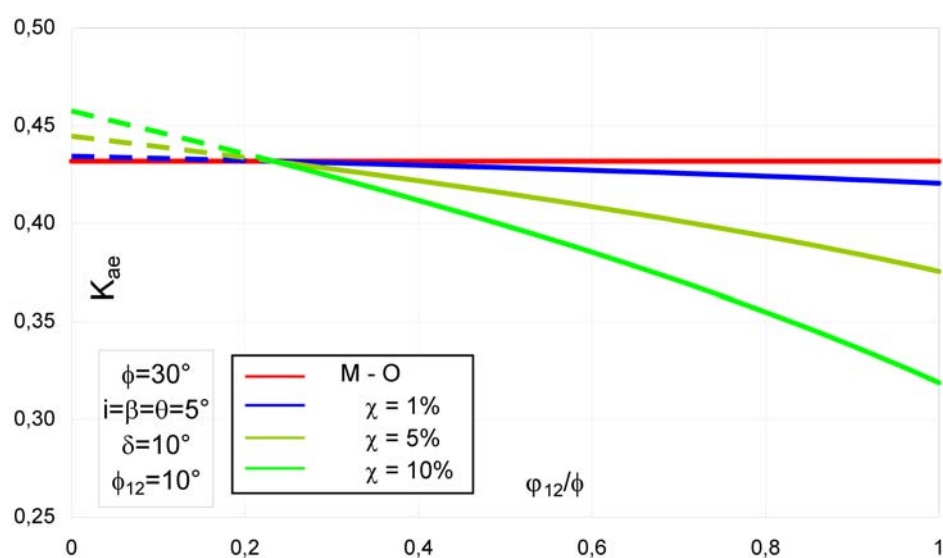


Figura 9.9 – Variazione di K_{ae} con il rapporto ϕ_{12}/ϕ

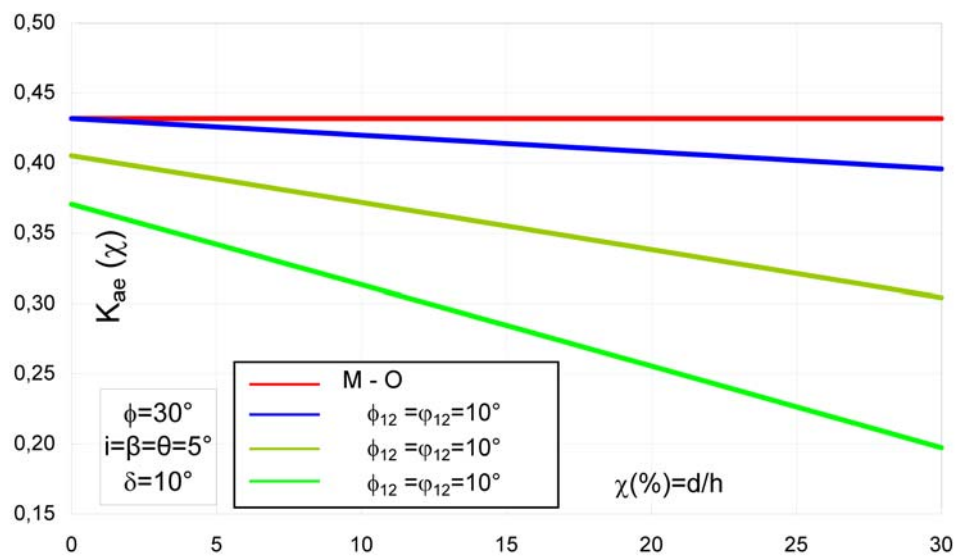


Figura 9.10 – Variazione di K_{ae} con il parametro χ

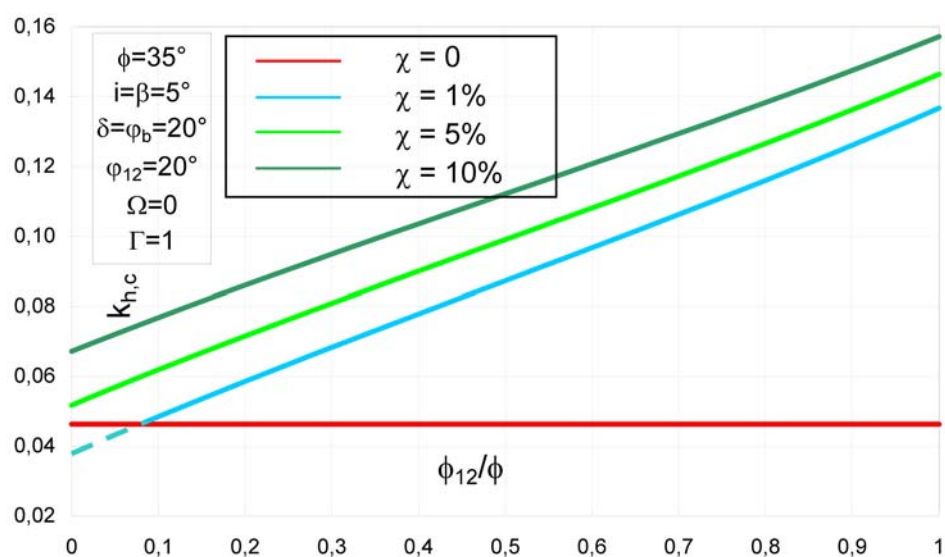


Figura 9.11 – Variazione di $k_{h,c}$ con il rapporto ϕ_{12}/ϕ

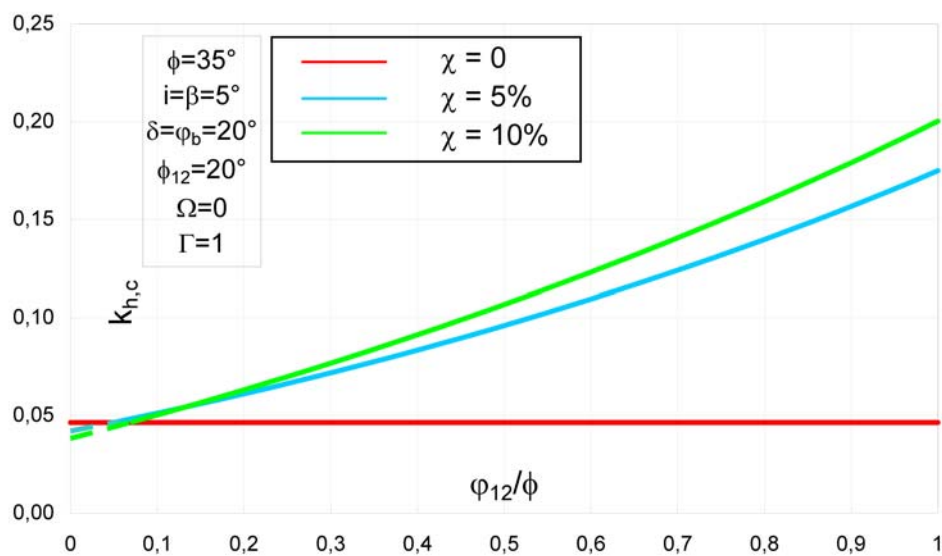


Figura 9.12 – Variazione di $k_{h,c}$ con il rapporto φ_{12}/ϕ

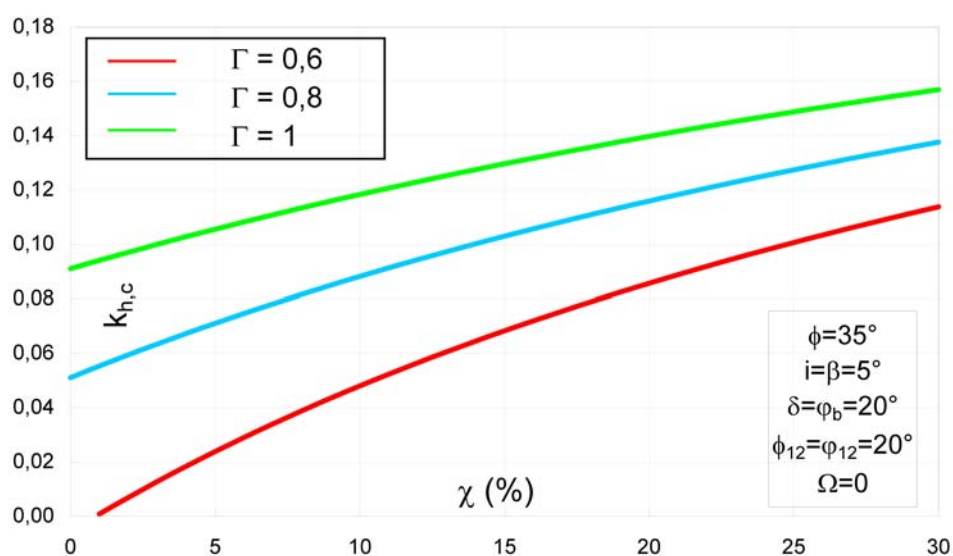


Figura 9.13 – Variazione di $k_{h,c}$ con il parametro χ

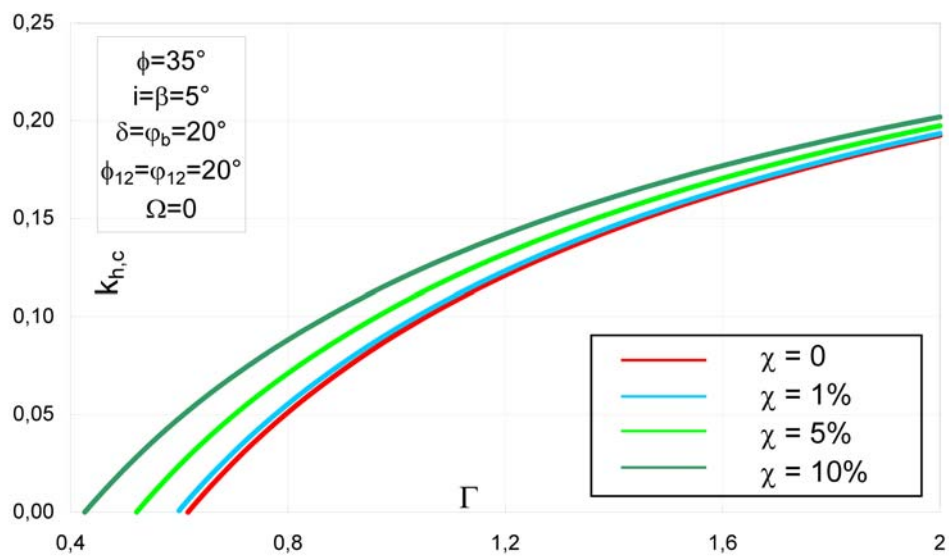


Figura 9.14 – Variazione di $k_{h,c}$ con il peso normalizzato Γ

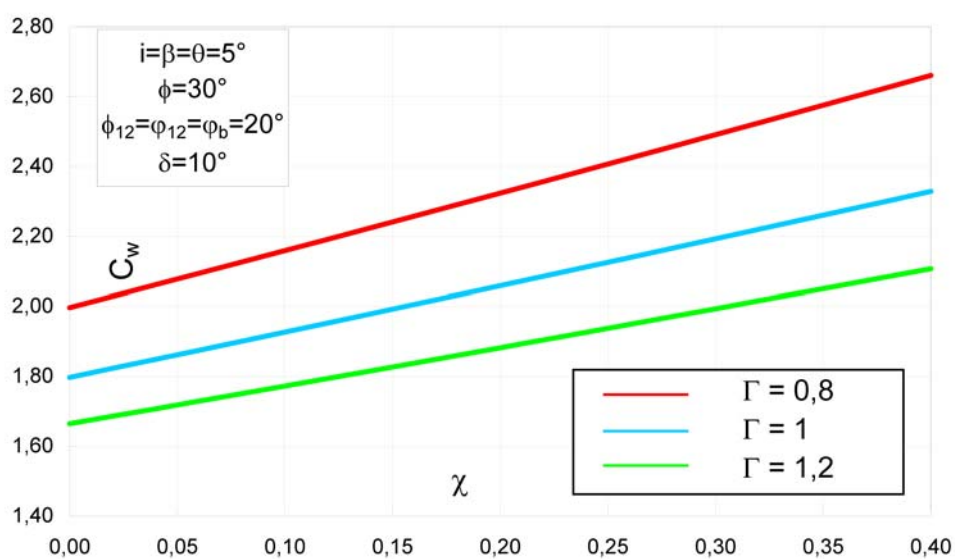
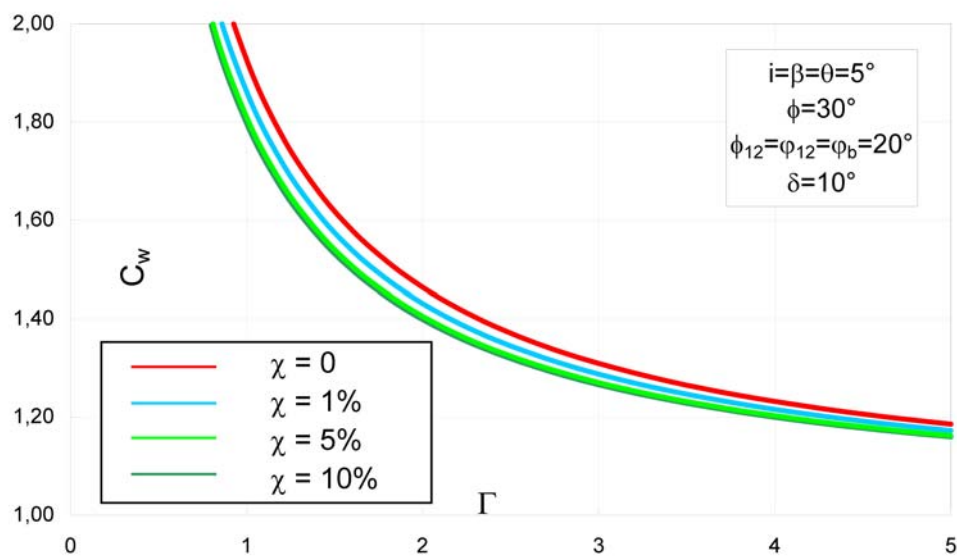
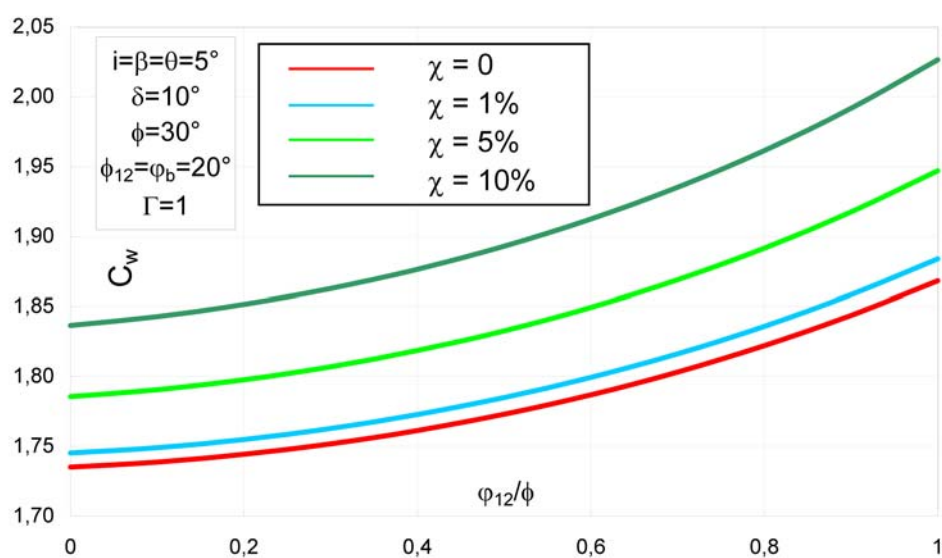


Figura 9.15 – Variazione di C_w con il rapporto χ

Figura 9.16 – Variazione di C_w con il peso normalizzato Γ Figura 9.17 – Variazione di C_w con il rapporto ϕ_{12}/ϕ

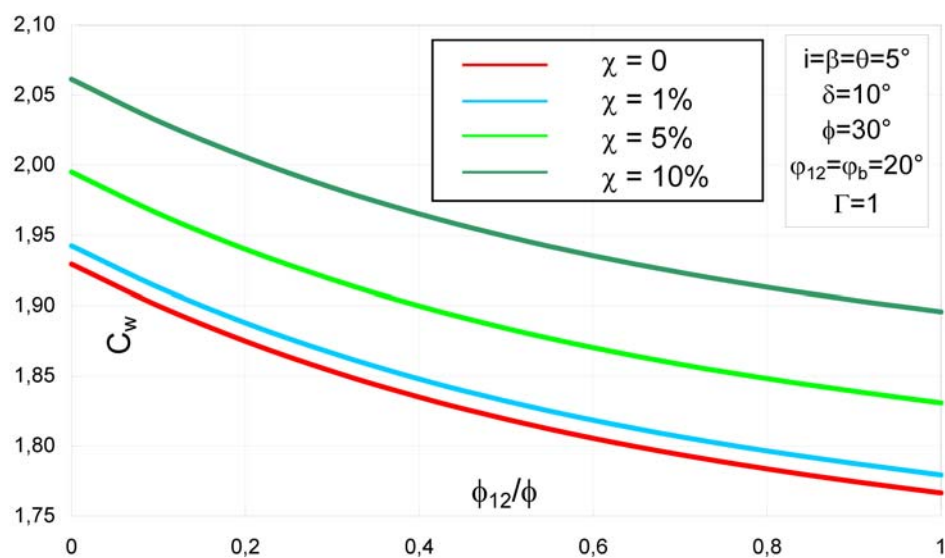


Figura 9.18 – Variazione di C_w con il rapporto ϕ_{12}/ϕ

CAPITOLO NONO	1
ANALISI MULTI – BLOCCO NELL'IPOTESI DI GRANDI SPOSTAMENTI	1
9.1 Schema di riferimento per l'analisi	1
9.2 Determinazione del coefficiente di spinta.....	2
9.3 Determinazione del coefficiente sismico critico.....	5
9.4 Determinazione dell'equazione del moto del sistema e del fattore di forma	8
9.5 ANALISI PARAMETRICA	9
9.5.1 Coefficiente di spinta	9
9.5.2 Coefficiente sismico critico	11
9.5.3 Fattore di forma	12

Indice delle figure

Figura 9.1 – Schema di riferimento: configurazione indeformata
Figura 9.2 – Schema di riferimento: cambio di geometria
Figura 9.3 – Schema di riferimento per l'analisi
Figura 9.4 – Schema di riferimento per l'analisi
Figura 9.5 – Schema di riferimento per il primo concio
Figura 9.6 – Schema di riferimento per il secondo concio
Figura 9.7 – Schema di riferimento per l'analisi
Figura 9.8 – Variazione di K_{ae} col rapporto ϕ_{12}/ϕ
Figura 9.9 – Variazione di K_{ae} col rapporto ϕ_{12}/ϕ
Figura 9.10 – Variazione di K_{ae} con χ
Figura 9.11 – Variazione di $k_{h,c}$ col rapporto ϕ_{12}/ϕ
Figura 9.12 – Variazione di $k_{h,c}$ col rapporto ϕ_{12}/ϕ
Figura 9.13 – Variazione di $k_{h,c}$ con χ
Figura 9.14 – Variazione di $k_{h,c}$ con Γ
Figura 9.15 – Variazione di C_w con χ
Figura 9.16 – Variazione di C_w con Γ
Figura 9.17 – Variazione di C_w col rapporto ϕ_{12}/ϕ
Figura 9.18 – Variazione di C_w col rapporto ϕ_{12}/ϕ

CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE

La moderna progettazione geotecnica delle opere di sostegno richiede una maggiore attenzione nei confronti del comportamento manifestato durante un evento sismico. Non è sufficiente analizzare le condizioni di equilibrio valutate per convenzionali valori del coefficiente sismico e determinare un margine di sicurezza pseudo – statico. L'esperienza ha, infatti, mostrato che tale metodologia risulta essere in molti casi poco affidabile.

Le nuove norme tecniche per le costruzioni introducono la possibilità di una progettazione di tipo prestazionale. Nel momento in cui ci si trova a progettare un'opera è bene tenere conto degli effetti sismici che potrebbero insistere sulla struttura e degli eventuali danni che questi effetti potrebbero causare sulla stessa e su ciò che con essa interagisce.

Uno strumento di analisi che consente tale valutazione è l'analisi agli spostamenti. In una metodologia di analisi di tipo dinamico un muro di sostegno può essere schematizzato come sistema ad un grado di libertà, il quale può traslare lungo la superficie di appoggio.

Il presente studio si è collocato in questo ambito ed è stato condotto con l'obiettivo di:

- determinare soluzioni in forma chiusa per la valutazione del coefficiente di sismico critico $k_{h,c}$, del coefficiente sismico equivalente $k_{h,eq}$ e del coefficiente di spinta attiva K_{ae} in condizioni sismiche per particolari condizioni di carico e al contorno;
- di fornire un'espressione dell'equazione del moto necessaria al fine di valutare l'entità degli spostamenti permanenti indotti dal sisma.

Per diversi schemi l'approccio multi - blocco (MB) con il metodo dell'equilibrio limite ha consentito di pervenire alla definizione di K_{ae} considerando differenti condizioni di carico e al contorno. Per gli stessi schemi sono state determinate soluzioni in forma chiusa per $k_{h,c}$ e $k_{h,eq}$; operando con l'approccio MB si è definita l'espressione del coefficiente di forma C_w che accoppiata all'equazione del moto di un blocco rigido che scorre su una superficie piana, permette di valutare l'entità degli spostamenti permanenti di un'opera di sostegno partendo dalla valutazione di quelli che competono ad un blocco rigido dotato della stessa accelerazione critica reale del sistema muro – terreno.

In tale contesto è stato, inoltre, analizzato il caso di un potenziale cambio di geometria del sistema con il procedere degli spostamenti. I risultati dello studio mostrano che tali effetti sono sempre e comunque da ritenersi benefici sia in termini di stabilità che di resistenza nei confronti delle azioni sismiche.

In particolare, dalle analisi parametriche eseguite si è evinto che i fattori che giocano un ruolo preponderante sono il peso adimensionalizzato Γ del muro in esame e i parametri di resistenza all'interfaccia terreno fondazione. Per valori crescenti di Γ il sistema muro – terreno risulta caratterizzato da valori crescenti dell'accelerazione critica che per un dato evento sismico di riferimento, garantiscono l'insorgenza di spostamenti permanenti sempre più ridotti. Viceversa ridotti valori del peso adimensionalizzato Γ del muro determinano ridotti valori dell'accelerazione critica del sistema e in qualche caso ridotti margini di sicurezza in condizioni statiche.

In questo caso, i sistemi sono caratterizzati da elevati valori del coefficiente di forma C_w e, per un dato evento sismico di riferimento, bisogna attendersi elevati valori dello spostamento permanente. Per tali sistemi, la verifica della funzionalità post – sismica potrebbe non essere verificata per il raggiungimento di uno stato limite connesso all'insorgenza di spostamenti superiori alle soglie tollerabili dal sistema muro – terreno e/o dalle opere che con esso interagiscono.

BIBLIOGRAFIA

- A.G.I., (2005). Aspetti geotecnici della progettazione in zona sismica. Linee guida. Patron Editore, Bologna, pp.402.
- Biondi G. Cascone E., Rampello S., (2007a). Performance-based pseudo-static analysis of slopes. Proc. 4th ICEGE, Thessaloniki, paper 1645.
- Biondi G., Maugeri M. & Cascone E., (2007b). Scelta del coefficiente sismico per le analisi pseudo-statiche delle opere di sostegno rigide. IARG 2007, Salerno.
- Biondi G., Maugeri M. & Cascone E., (2009). Performance-based pseudo-static analysis of rigid gravity wall. Int. Conf. on Performance-Based Design in Earthquake Geotechnical Engineering, IS- Tokyo 2009, Japan, 15-18 June, paper n. 257.
- Biondi G., Blanco G. & Maugeri M. (2008). Una soluzione in forma chiusa per la determinazione del coefficiente sismico critico delle opere di sostegno rigide. IARG 2008, Catania.
- Callisto L. & Aversa S. (2008). Dimensionamento di opere di sostegno soggette ad azione sismica. In Opere geotecniche in condizioni sismiche, XII Ciclo di Conferenze di Meccanica e Ingegneria delle Rocce, MIR 2008. Patron, Bologna.
- Caltabiano S., Cascone E. & Maugeri M., (1999). Sliding response of gravity retaining walls. Proc. 2nd ICEGE, Lisbon, pp. 285-290.
- Caltabiano S., Cascone E. & Maugeri M., (2000). Seismic stability of retaining walls with surcharge. Soil Dynamic and Earthquake Engineering, 20, (5-8): 469-476.
- Caltabiano S., Cascone E. & Maugeri M., (2003). Equilibrio limite di muri di sostegno con sovraccarico in presenza di sisma. IARG 2003, Potenza.
- Caltabiano S., Cascone E. & Maugeri M., (2005). A procedure for seismic design of retaining wall. Chapter 14 in 'Seismic prevention of damage: a case study in a Mediterranean city'. M. Maugeri ed., Wit Press, pp. 263-277.
- Cascone E., Maugeri M. & Motta E., (1993). Risposta sismica dei muri di sostegno a gravità. RIG n°4 – Ottobre – Dicembre 1993, pp. 356-370.
- Coulomb C.A. (1776). Essai sur une application des Règles des Maximis et Minimis à quelques problèmes de Statique relatifs à l'Architecture, Mémoires Académie Royale. Division Sav., 7, Paris, 1776
- D.M. 14.01.2008. Norme tecniche per le costruzioni.

- D.M. 16.01.1996. Norme tecniche per le costruzioni in zone sismiche.
- Dike C.M., Leeds D.J. (1936) – Response of Soils, Foundations and Earth Structures to the Chilean Earthquake of 1960, Bulletin of the Seismological Society of America, vol. 53, N°2, 1963.
- EN 1998-5, Eurocode 8: Design of structures for earthquake resistance – Part 5: Foundations, retaining structures and geotechnical aspects. CEN European Committee for Standardization, Bruxelles, Belgium.
- Greco V. R. (2001). Spinta attiva sui muri a mensola. RIG 3– Luglio – Settembre 2001, pp. 9-21.
- Greco V. R. (2005). Active earth thrust by backfills subject to a line surcharge. Canadian Geotechnical Journal, 2005, Vol. 42, n. 5, pp. 1255-1263.
- Hynes-Griffin M.E. & Franklin A.G., (1984). Rationalizing the seismic coefficient methods. Miscellaneous paper GL-84-13, U.S. Army Corps of Engineers, Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi.
- Lancellotta R. (1993). Geotecnica – Zanichelli Editore – 2° ed.
- Matsuo H., Ohara S. (1960). Lateral Earth Pressure and Stability of Quay Walls during Earthquakes, Proc., 2nd World Conference on Earthquake Engineering, Tokyo, Japan, 1960.
- Mononobe N. & Matsuo H., (1929). On the determination of earth pressure during earthquakes. Proc. World Engineering Conference 1929, Vol. IX, paper No. 388.
- Motta E. (1993). Sulla valutazione della spinta attiva in terrapieni di altezza finita. Rivista Italiana di Geotecnica Vol. 3/93, pp.: 235-245.
- Motta E., (1994). Generalized Coulomb active-earth pressure for distanced surcharge. Journal of Geotechnical Engineering ASCE 1994, 120(6), pp: 1072-1079.
- Newmark N.M., (1965). Effect of earthquakes on dams and embankments. Geotechnique (15), pp.139-159.
- Okabe S., (1926). General theory of Earth Pressure. J. of Japanese Society of Civil Engineering, Tokyo, 12, (1).
- O.P.C.M. 3274/2003. Primi elementi in materia di criteri generali per la classificazione sismica del territorio nazionale e di normative tecniche per le costruzioni in zona sismica.
- Pitilakis K., Moutsakis A. (1989). Seismic Analysis and Behaviour of Gravity Retaining Walls: The case of Kalamata Harbour Quay-Wall, Soil and Foundations, Vol. 29N°1, March 1989.

- Rampello S. & Silvestri F., (2009). Force-based pseudo-static methods versus displacement-based methods for slope stability analysis. In Conclusione del piano triennale del Progetto ReLUIS-DPC 2005-2008, Workshop su: Quali prospettive per l'Eurocodice 8 alla luce delle esperienze italiane, Napoli.
- Rankine W.J.M. (1857). On the Stability of Loose Earth. Philosophical Transactions of Royal Society, vol. 147, pp. 9-27
- Richards R. & Elms D., (1979). Seismic behaviour of gravity retaining walls. Journal of Geotechnical Engineering, ASCE, 105 (4): 449-464.
- Sarma S.K. & Khlimitzas G., (2000). Second edited report for the project ENV4-CT97-0392. European Commission DGXII for Science Research and Development.
- Seed H.B., Whitman R.W. (1970). Design of Earth Retaining Structures for Dynamic Loads, Proc., Specialty Conference on Lateral Stresses in Ground and Design of Earth Retaining Structures, ASCE, Cornell University, Ithaca, new York, USA 1970.
- Stamatopoulos C.A., Velgaki E.G., Modaressi A. et Caballero F-L. (2001). Critical acceleration and seismic displacement of vertical gravity walls by a two body model. Proc. 4th Int. Conf. on Recent Advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics. San Diego, Paper 7.02.
- Stamatopoulos C.A., Velgaki E.G., Modaressi A. et Caballero F-L. (2006). Seismic displacement of gravity walls by a two body model. Bulletin of Earthquake Engineering, (4): 295-318.
- Stewart J.P., Blake T.M. & Hollingsworth R.A., (2003). A screen analysis procedure for seismic slope stability. Earthquake Spectra, 19, 697-712.
- Terzaghi K. (1943). Theoretical Soil Mechanics, John Wiley & Sons, New York, 1943.
- Whitman R.V. (1991). Seismic Design of Earth Retaining Structures, Proc., 2nd International Conference on Recent advances in Geotechnical Earthquake Engineering and Soil Dynamics, St. Louis, Missouri, 1991.
- Wong C.P., (1982). Seismic analysis and an improved design procedure for gravity retaining walls. M.S. Thesis, Research Report R82-32, Dept. of Civ. Eng, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, USA.

RINGRAZIAMENTI

Al termine di questo lavoro di tesi mi sento in dovere di ringraziare per la costante guida e i consigli ricevuti il mio coordinatore nonché tutor Prof. Michele Maugeri ed in modo particolare, per i preziosi suggerimenti riguardanti sia gli aspetti teorici che quelli pratici del tema trattato, per la MASSIMA disponibilità e collaborazione l'ing. Giovanni Biondi.

Non posso non menzionare il mio carissimo amico Salvo Arch. Pappalardo per i suggerimenti relativi alla veste grafica dei diagrammi realizzati.

Infine (ma in realtà sono i primi a cui è rivolto il mio "Grazie") sarebbe impossibile non citare coloro i quali, con non pochi sacrifici, hanno permesso la realizzazione di questo lavoro. Ai miei genitori va la mia profonda stima e riconoscenza ed in particolare a mia madre è rivolta la dedica ufficiale del presente lavoro per tutto quello che ha sempre fatto e continua a fare per me.