

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Dipartimento di Ingegneria Civile e Ambientale

Francesco Cannizzaro

**UN NUOVO APPROCCIO DI MODELLAZIONE
DELLA RISPOSTA SISMICA DEGLI EDIFICI
STORICI**

Tesi di Dottorato in Ingegneria delle Strutture – Ciclo XXIII

Tutor:

Prof. Ing. Ivo Calì

Correlatori:

Dott. Ing. Massimo Marletta

Dott. Ing. Bartolomeo Pantò

Coordinatore:

Prof. Ing. Giuseppe Oliveto

INDICE

Introduzione	1
Bibliografia	4
Capitolo 1.....	7
MODELLAZIONE STRUTTURALE DI EDIFICI STORICI: STATO DELL'ARTE	7
1. Incertezza dei parametri meccanici.....	9
2. Necessità di modelli globali	10
3. Importanza dei particolari costruttivi e dello stato di conservazione della struttura	10
4. Classificazione dei metodi di modellazione e di analisi	11
5. Metodo agli elementi finiti non lineari	12
5.1 Modelli continui	14
5.2 Modelli discontinui.....	17
5.3 Legami costitutivi	19
5.3.1 Cenni su alcuni legami di tipo <i>no tension</i>	20
5.3.2 Legame costitutivo a piani di danneggiamento di Gambarotta e Lagomarsino.....	21
5.3.3 Il modello di plasticità con softening di Lourenço et al. ..	29
5.3.4 Modello agli elementi finiti con funzioni di danneggiamento	32
6. Metodo agli elementi di contorno	35
7. Metodo agli elementi discreti/distinti	36
7.1 I Rigid Body Spring Models.....	40
8. Analisi limite	36
8.1 Analisi limite per macro-blocchi.....	46
8.2 Analisi limite di dettaglio	53
8.3 Modello di Milani et al. per le superfici curve	54
9. Approcci semplificati	62
9.1 Metodo POR.....	64
9.2 Metodo SAM	67
9.3 Modello a ventaglio multiplo	70
9.4 Macromodello a geometria variabile	71

9.5	Macromodello di Brencich e Lagomarsino.....	76
9.6	Macromodello di Calì et al.	84
9.6.1	Modello piano	85
9.6.1.1	La modellazione del comportamento della muratura nel proprio piano	88
9.6.1.2	La modellazione 3D mediante assemblaggio di pareti piane.....	95
9.6.2	Modello spaziale.....	99
9.6.2.1	Interazione tra le pareti e gli impalcati	104
9.6.2.2	Interazione tra le pareti in corrispondenza degli angoli.....	105
10.	Studio del comportamento non lineare di edifici storici	107
	Bibliografia.....	110
	Capitolo 2.....	125
	UN APPROCCIO PER MACRO-ELEMENTI NELLA MODELLAZIONE DELLE STRUTTURE A GEOMETRIA CURVA.....	125
1.	Dal modello fisico alla sua rappresentazione per macro-conci	126
2.	Dalla rappresentazione per macro-conci alla modellazione per macro- elementi	132
2.1	Descrizione del comportamento meccanico della muratura ...	135
3.	Analisi geometrica del quadrilatero articolato	140
3.1	Individuazione dei quadrilateri articolati	141
3.2	Individuazione dei lati rigidi delle interfacce.....	145
3.3	Determinazione del centro di massa di un elemento	151
4.	Analisi cinematica	156
4.1	Analisi del moto deformativo nel piano dell'elemento	157
4.2	Moto rigido del quadrilatero.....	159
4.3	Sovrapposizione dei moti rigido e deformativo del quadrilatero.....	160
5.	Elementi speciali triangolari	161
	Bibliografia.....	165
	Capitolo 3.....	167
	LA CARATTERIZZAZIONE COSTITUTIVA DEL MACRO-ELEMENTO.....	167

1. La strategia di calibrazione del modello	168
2. La calibrazione dei link di interfaccia.....	171
2.1 La calibrazione dei link ortogonali di interfaccia associata ad un legame costitutivo elastico lineare	172
2.1.1 Suddivisione degli elementi in fibre lungo le direzioni principali	173
2.1.2 Individuazione della geometria di ogni singola fibra	175
2.1.3 Rappresentazione delle fibre mediante links	185
2.2 La calibrazione dei link ortogonali di interfaccia associata ad un legame costitutivo elasto-plastico non incrudente	189
2.3 La calibrazione dei link paralleli al piano dell'interfaccia associata ad un legame costitutivo elastico lineare	191
2.3.1 La calibrazione della molla di scorrimento nella direzione dell'asse dell'interfaccia in accordo ad un legame alla Mohr- Coulomb.....	192
2.3.2 La calibrazione delle molle di scorrimento nella direzione ortogonale all'asse dell'interfaccia in accordo ad un legame alla Mohr-Coulomb.....	193
2.3.2.1 Le proprietà elastiche delle molle a scorrimento nella direzione ortogonale all'asse dell'interfaccia	194
2.4 La calibrazione del link diagonale appartenente al piano dell'elemento.....	195
2.4.1 La calibrazione del link diagonale appartenente al piano dell'elemento nella fase a comportamento elastico lineare.....	197
2.4.1.1 La lastra continua a spessore variabile vincolata a deformarsi coerentemente con il campo di spostamenti dell'elemento.....	197
2.4.1.2 Determinazione della rigidità elastica equivalente del link diagonale appartenente al piano dell'elemento	214
2.4.2 La calibrazione del link diagonale appartenente al piano dell'elemento nella fase non lineare.....	217
2.4.2.1 Determinazione dello stato tensionale indotto nella lastra dalla deformazione associata alla distorsione angolare	218
2.4.2.2 Determinazione dello stato tensionale indotto nell'elemento dalle azioni flesso-membranali.....	218

Indice

3. Calcolo delle forze nodali equivalenti	219
Bibliografia.....	228
Capitolo 4.....	229
APPLICAZIONI	229
1. Validazione della modellazione proposta in regime elastico lineare.....	230
1.1 Cupola sferica.....	231
1.2 Volta a botte	238
1.3 Volta cilindrica parabolica.....	246
1.4 Volta a botte a spessore variabile	257
2. Validazione della modellazione proposta in campo non lineare	263
2.1 Cupola sferica.....	264
2.2 Volta a crociera	268
3. Applicazione dell'approccio proposto allo studio di una volta crollata a seguito dell'evento Aquilano del 6 Aprile 2009	273
4. Applicazione dell'approccio proposto ad un ipotetico edificio di culto	277
Bibliografia.....	286
Conclusioni	289

Introduzione

Tutte le tipologie murarie sono accomunate da un'elevata e durevole resistenza a compressione, da un efficiente meccanismo resistivo a taglio, e da una modesta, incerta e poco durevole resistenza a trazione.

Benchè oggi elementi architettonici come volte e cupole abbiano funzione principalmente ornamentale, in passato ricorrere a queste tipologie strutturali era piuttosto una necessità che garantiva solidità, evitava l'insorgere di tensioni di trazione e assicurava un efficace scarico delle forze agli elementi portanti.

L'interesse verso edifici di interesse storico e architettonico non può prescindere dallo studio di questi elementi; e alla luce delle recenti normative introdotte risulta indispensabile una metodologia che consenta la valutazione del comportamento non lineare di queste strutture ma ne garantisca al tempo stesso l'impiego in ambito professionale, con costi computazionali ragionevoli.

I software attualmente disponibili in commercio per la verifica delle strutture ad arco o delle volte sono basati su semplici metodi di statica grafica che non consentono di indagare il comportamento non lineare della struttura né, soprattutto, l'interazione dell'elemento strutturale col resto dell'edificio. I più avanzati programmi agli elementi finiti non lineari, il cui costo computazionale è tale da renderli inapplicabili in ambito professionale, consentono modellazioni accurate in ambito statico non lineare tuttavia non consentono una modellazione attendibile della risposta dinamica non lineare di tali tipologie strutturali.

Questo lavoro si pone l'ambizioso obiettivo di fornire uno strumento impiegabile in ambito professionale per la valutazione del comporta-

mento non lineare di strutture voltate, fino ad arrivare alla possibilità di modellare un edificio intero. A tal fine viene impiegato un approccio per macro-elementi, particolarmente indicato per lo studio delle mura-ture. Secondo tale approccio vengono introdotti un modello discreto, e-quivalente a una porzione della muratura, e delle interfacce regolanti l'interazione tra i macro-elementi.

Lo studio del comportamento d'insieme di un edificio può essere va-lutato dall'analisi delle suddette interazioni. Questo approccio, oltre ad attribuire alla struttura un comportamento più attinente a quello reale, riduce di gran lunga l'onere computazionale richiesto dal calcolo rispetto alla tradizionale modellazione agli elementi finiti, in quanto riduce no-tevolmente i gradi di libertà del sistema.

La lista degli autori che hanno scelto questo approccio è ormai ab-bastanza lunga (Braga, Liberatore et al. 1990,1997; Brancich e Lago-marsino 1997; D'Asdia e Viskovic 1996, Magenes e Calvi 1996).

Il modello proposto in questa tesi prende spunto e vuole essere un'estensione di un macro-modello sviluppato presso l'Università di Ca-tania, che ha preso spunto da una Tesi di Laurea (Pantò, 2003), e poi approfondito ed ampliato con successivi lavori (Caliò et al., 2004, 2005 e 2008, Pantò, 2007), per lo studio di edifici in muratura composti da pa-reti piane.

Tali studi sono tuttavia limitati allo studio del comportamento non lineare di pareti piane. Non si riscontrano tuttavia esempi di macro-modellazione estesi allo studio di strutture a geometria curva.

Lo studio delle strutture murarie piane presenta già notevoli diffi-coltà, legate alla sensibilità dei parametri che ne determinano il com-portamento non lineare, ma quello delle strutture murarie voltate ne e-sibisce certamente anche altre legate alla complessità della geometria. Tali aspetti risultano decisivi ai fini della definizione di un modello che riesca a cogliere il comportamento non lineare di strutture spingenti: l'irregolarità geometrica comporta delle complicazioni che nel presente lavoro sono state affrontate preservando una filosofia di modellazione semplice ed intuitiva, che tuttavia appare efficace.

Il modello è stato implementato in un software e validato con risultati disponibili in letteratura, sia in campo lineare che in quello non lineare.

La tesi è organizzata in quattro capitoli. Il primo è dedicato alla descrizione dello stato dell'arte dei metodi di modellazione degli edifici in muratura, con specifiche attenzioni per quelli a carattere storico e monumentale.

Il secondo e il terzo capitolo sono dedicati al modello proposto. In particolare, nel secondo sono descritte le linee generali dell'approccio di modellazione, ed è introdotto il modello cinematico. Nel terzo capitolo invece si riporta nel dettaglio la formulazione delle procedure di taratura del modello proposto. L'ultimo capitolo, il quarto, è incentrato sulle simulazioni numeriche che hanno consentito di verificare l'attendibilità del modello, mediante confronti con risultati disponibili in letteratura ottenuti da prove sperimentali o simulazioni numeriche condotte con altri approcci.

Bibliografia

- [1] Braga, F., Liberatore, D., 1990 "*A finite element for the analysis of the response of masonry buildings*", Proc. Of the 5th North American Masonry Conference, Urbana, pp.201-212.
- [2] Braga, F., Liberatore, D., Spera, G., 1997, "*A computer program for the seismic analysis of complex masonry buildings*". In G.N. Pande, J. Middleton & B.Kralj (eds.), Computer Methods in Strustural Masonry – 4; Proc. Inter. Symp., Firenze, 3-5 Settembre, 309-316. London: E& FN spon.
- [3] Brencich, A., Lagomarsino, S., 1997, "*Un modello a macroelementi per l'analisi ciclica di pareti murarie*". Atti 8° convegno nazionale ANIDIS, Taormina, 21-24 Settembre.
- [4] Calì, I., Marletta, M., Pantò, B., 2004, "*Un semplice macroelemento per la valutazione della vulnerabilità sismica di edifici in muratura*", XI Convegno ANIDIS "L'Ingegneria Sismica in Italia", Genova, 25-29 Gennaio.
- [5] Calì, I., Marletta, M., Pantò, B., 2005, "*A simplified model for the evaluation of the seismic behaviour of masonry buildings*". 10th International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, Rome (Italy), 30 August - 2 September, Paper no. 195.
- [6] Calì, I., Marletta, M., Pantò, B., 2008. "*A discrete element approach for the evaluation of the seismic response of masonry buildings*", 14th World Conference of Earthquake, October 12 -17, Beijing, China.
- [7] D'Asdia, P., Viskovic, A., 1996, "*Analisi tridimensionale della resistenza di edifici in muratura, storici o recenti, soggetti ad a-*

- zioni orizzontali di tipo sismico*". Convegno nazionale "La meccanica delle murature tra teoria e progetto", Messina.
- [8] Magenes, G., Calvi, G.M., 1996, "*Prospettive per la calibrazione di metodi semplificati per l'analisi sismica di pareti murarie*", Convegno nazionale "La meccanica delle murature tra teoria e progetto", Messina, 18-20 Settembre.
- [9] Pantò, B., 2003, "*Un nuovo macromodello per la valutazione della resistenza sismica di edifici in muratura*", Tesi di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, Relatore Prof. Ing. Ivo Calì, Ottobre 2003.
- [10] Pantò, B., 2007, "*La modellazione sismica degli edifici in muratura. Un approccio innovativo basato su un macro-elemento spaziale*", tesi di dottorato in Ingegneria delle Strutture XX Ciclo, Coordinatore Prof. G. Oliveto, Tutors Prof. Ing. Ivo Calì Dott. Ing. Massimo Marletta.

Capitolo 1

MODELLAZIONE STRUTTURALE DI EDIFICI STORICI: STATO DELL'ARTE

La capacità di un edificio di resistere alle azioni sismiche dipende, oltre che dalla resistenza, dalla capacità della struttura di subire un danneggiamento senza che si determini il collasso strutturale. L'entità della dissipazione energetica associata al danneggiamento dipende dal tipo di meccanismo di danno che si determina nell'elemento strutturale.

La modellazione numerica della risposta sismica di edifici in muratura, e in particolare delle strutture a carattere storico e monumentale, risulta estremamente complessa dovendo essere tale da simulare numericamente comportamenti reali che, sebbene sufficientemente chiari nelle modalità, risultano governati da grandezze fisiche difficilmente valutabili ed estremamente disperse (come ad esempio la resistenza a trazione da attribuire al solido murario), pertanto rimane una questione aperta, per la quale sono proposte in letteratura svariate soluzioni. I vari metodi proposti comprendono da un lato soluzioni rigorose e di dettaglio difficilmente applicabili ad edifici al vero, dall'altro approcci semplificati che mirano alla valutazione della risposta globale sia in campo statico che dinamico.

La maggior parte delle modellazioni semplificate proposte nella letteratura, soprattutto quelle orientate ad un uso pratico, non sono in grado di cogliere tutti gli aspetti associati ai possibili meccanismi di collasso; privilegiano, infatti, un approccio semplificato in molti casi si rivela estremamente efficace, come ad esempio nella progettazione dei nuovi edifici, che può, però, risultare inadeguato soprattutto nei con-

fronti della stima della vulnerabilità sismica di edifici storici, la cui risposta dinamica non sempre può essere schematizzata con modelli semplificati basati sull'ipotesi di comportamento scatolare e materiale isotropo ed omogeneo.

Da questa breve introduzione risultano individuati i due principali ambiti metodologici per lo studio del comportamento sismico di edifici storici, o più in generale, di edifici in muratura: approccio rigoroso e approccio semplificato. Gli approcci rigorosi vengono generalmente condotti nell'ambito degli elementi finiti non lineari, dell'analisi limite, del metodo degli elementi di contorno e del metodo degli elementi distinti. Gli approcci semplificati generalmente prevedono una suddivisione della struttura in macro-elementi (o macro-porzioni) significativi, di cui si stima il comportamento non lineare; il loro assemblaggio restituisce una stima della risposta non lineare dell'intera struttura.

Una classificazione completa dei metodi di modellazione esistenti in muratura risulta difficoltosa, poiché, tra i diversi autori, non c'è spesso accordo circa la nomenclatura delle diverse tecniche di modellazione proposte. In passato alcuni tentativi in questa direzione sono stati operati da Lourenço (2002) e Bosiljkov (2004).

Nel presente capitolo verranno sinteticamente esposte alcune delle principali tecniche per la valutazione della resistenza di edifici in muratura, con particolare attenzione per quelli a carattere storico e monumentale.

Uno dei criteri utilizzati per la classificazione delle tecniche sulla modellazione di edifici storici è quello della complessità dei modelli matematici adottati, connesso a sua volta con il progresso dei mezzi di calcolo, che col tempo diventano sempre più potenti ed efficienti.

Per molti secoli gli unici criteri disponibili per la valutazione della sicurezza strutturale di edifici in muratura sono stati i cosiddetti *metodi semplici*. In tale categoria rientrano i *criteri geometrici*, basati quasi esclusivamente sulle osservazioni sperimentali poi ricondotte, in termini di regole pratiche, sulla disposizione dell'apparecchio murario e sui rapporti geometrici degli elementi resistenti.

Nel XIX secolo si diffusero tecniche di *statica grafica*, utilizzate soprattutto per valutare la sicurezza degli archi e delle volte, basate sulla costruzione della curva delle pressioni.

Tuttavia è solo nel secolo scorso che metodi scientificamente più solidi si affermano. Tra questi, uno dei metodi che ha avuto più ampia diffusione è quello dell'*analisi limite*, di cui fu pioniere Heyman (1969 e 1972) che si occupò in particolare della statica dell'arco, ma anche più in generale, delle volte (1995).

In seguito, soprattutto grazie all'impulso dato dall'introduzione del metodo degli elementi finiti, si sono diffusi *modelli strutturali* sempre più raffinati, supportati anche dal progresso dei mezzi di calcolo. Come verrà descritto dettagliatamente più avanti, uno dei filoni della ricerca si è indirizzato verso l'applicazione di modelli strutturali semplificati, allo scopo di contenere l'onere computazionale delle simulazioni numeriche, e di consentire modellazioni globali di interi edifici. Le metodologie di calcolo facenti uso di modelli strutturali si sono sviluppate sulla base di teorie e approcci spesso molto diversi tra loro, arricchendo fortemente il panorama dei metodi di modellazione al punto che, anche lo stato dell'arte in materia di modellazione di edifici in muratura a carattere storico risulta oggetto di studio orientato al confronto e alla validazione dei diversi approcci.

1. Incertezza dei parametri meccanici

Le strutture murarie sono costituite da un materiale composto, le cui caratteristiche meccaniche sono difficilmente valutabili ed estremamente variabili. Bisogna inoltre valutare che per la muratura a sacco, a due paramenti o per quelle irregolari, risulta problematico persino determinare le proprietà geometriche degli elementi resistenti. A differenza delle strutture in calcestruzzo armato o in acciaio, le cui caratteristiche dipendono in maniera quasi esclusiva dalle proprietà dei materiali componenti, in quelle in muratura le tecniche costruttive giocano un ruolo fondamentale per la determinazione del comportamento meccanico del solido murario.

Dopo avere individuato la tipologia muraria, l'indicazione dei parametri meccanici da utilizzare richiede un serio impegno poiché, a causa di differenti metodologie costruttive o in presenza di difetti locali, si possono avere notevoli differenze anche all'interno del medesimo organismo strutturale.

L'incertezza legata all'individuazione dei parametri meccanici della muratura, soprattutto con riferimento agli edifici storici, in molti casi vanifica gli sforzi associati alla realizzazione di modellazioni molto evolute (basate sull'attribuzione di legami costitutivi 'no tension') peraltro estremamente sensibili alla scelta delle caratteristiche dei materiali.

2. Necessità di modelli globali

Un edificio in muratura può esibire un comportamento più o meno duttile in relazione ai meccanismi di danno che si attivano in occasione di un evento sismico. Gli edifici che esibiscono un comportamento scatolare manifestano un danneggiamento diffuso garantendo un comportamento duttile che, in molti casi, rende l'edificio in grado di fronteggiare eventi sismici di entità anche rilevante. Tale concetto è noto da tempo e ampiamente richiamato nelle normative nazionali che orientano il progetto di nuovi edifici in modo da ottenere strutture dal comportamento scatolare dotate di una significativa duttilità globale. Ciò porta a concludere che, nello studio sismico delle strutture in muratura diviene di fondamentale importanza una modellazione globale dell'organismo strutturale. Modellazioni di tipo semplificate nelle quali vengono considerate singole pareti o singoli componenti strutturali, resi indipendenti dal resto, possono fornire utili indicazioni in termini di resistenza ma, in genere, non consentono una semplice valutazione del comportamento duttile dell'intero organismo strutturale in occasione di eventi sismici.

3. Importanza dei particolari costruttivi e dello stato di conservazione della struttura

Da quanto sinteticamente espresso nei paragrafi precedenti emerge come l'analisi di strutture esistenti in muratura non può prescindere da

un accurato esame del corpo di fabbrica. Tale esame deve essere mirato ad accertare le tecniche costruttive, i materiali utilizzati, nonché lo stato di degrado della struttura e l'eventuale presenza di danneggiamenti locali (dissesti, lesioni, distacchi delle pareti nei cantonali, etc.). Questo passo preliminare è fondamentale per comprendere il comportamento qualitativo della struttura e per individuare i parametri di resistenza e di deformabilità che dovranno poi essere impiegati nelle analisi numeriche e soprattutto per la scelta, non banale, della modellazione da adottare. Tale scelta non può pertanto prescindere da un'attenta analisi dell'esistente e dei dettagli costruttivi. Tuttavia il grado di dettaglio della modellazione deve essere il giusto compromesso tra costi e benefici ovvero tra oneri computazionali e risultati che ci si propone di ottenere. Il peso che può essere attribuito a ognuno dei contrapposti interessi è certamente diverso se le analisi da condurre sono relative a scopi di ricerca o all'ambito professionale. Nel secondo caso viene quasi sempre adoperato un approccio semplice che, pur non cogliendo appieno il comportamento non lineare di dettaglio della struttura, presenta il notevole vantaggio di essere compatibile con le conoscenze della maggioranza dei professionisti del settore e di fornire in tempi brevi risultati facilmente interpretabili purché conservino un'adequata attendibilità.

4. Classificazione dei metodi di modellazione e di analisi

L'estrema complessità delle problematiche associate alla modellazione delle strutture in muratura, nonché l'attualità e l'impatto sociale che riveste il problema della stima della resistenza sismica delle murature, ha orientato la ricerca specifica del settore, negli ultimi decenni, alla formulazione di molteplici metodi di modellazione, parecchio differenti tra loro per complessità, ipotesi di base, grado di dettaglio dei risultati, onere computazionale richiesto.

Quanto segue si predispone a descrivere alcune delle modellazioni recentemente proposte e discusse. Si avrà senz'altro modo di osservare come siano stati utilizzati praticamente tutti i possibili approcci di analisi, propri dell'ingegneria strutturale, segno che la problematica non ammette una via preferenziale di risoluzione univocamente riconosciu-

ta. Il principale discriminante è costituito dall'onere computazionale associato alla modellazione e al tipo di analisi che si intende effettuare, da questo punto di vista è possibile individuare diverse classificazioni sia in termini di modellazione che di analisi.

In termini di modellazione in una prima classificazione generale conviene distinguere tra:

- *modelli agli elementi finiti non-lineari;*
- *modelli agli elementi di contorno;*
- *modelli agli elementi distinti;*
- *modelli discreti o macro-modelli.*

Per ciascuno di queste modellazioni risultano, in linea di principio, applicabili le seguenti tipologie di analisi non-lineare:

- *analisi statica incrementale o push-over;*
- *analisi dinamica incrementale;*
- *analisi limite.*

Tuttavia, l'applicazione dell'analisi limite, a differenza delle altre modellazioni, presuppone l'individuazione a priori dei potenziali meccanismi di crisi o la risoluzione di un problema di ottimizzazione, per questo motivo sono stati proposti e implementati in software specifici alcuni modelli orientati all'applicazione dell'analisi limite, che meritano una trattazione a parte. A seguire si descriveranno pregi e difetti di ciascuna metodologia di modellazione rimandando alla letteratura specifica ulteriori approfondimenti.

5. Metodo agli elementi finiti non lineari

L'approccio agli elementi finiti non lineari è certamente il più versatile nell'ambito degli approcci più accurati disponibili in letteratura. È basato sulla descrizione di elementi finiti piani o solidi, ai quali vengono associati legami costitutivi con diverso comportamento a trazione e a compressione. In particolare le leggi costitutive sono caratterizzate da una resistenza a trazione limitata o nulla. Essendo infatti un materiale con comportamento fratturante, particolare attenzione va prestata al tipo di legame costitutivo e di modello meccanico utilizzati. A tale scopo, in accordo con la classificazione proposta in Lourenço et al. (2007), verranno

sinteticamente descritti i differenti approcci di modellazione per la simulazione del comportamento della muratura mediante elementi finiti non lineari, che possono essere suddivisi in due classi orientate a due diverse scale di modellazione:

- *modelli continui* (o “*macro-models*”), in cui viene utilizzato un unico elemento finito per rappresentare il comportamento della muratura pensata come solido omogeneo;
- *modelli discontinui* (o “*micro-models*”), in cui vengono discretizzati in maniera distinta gli elementi della muratura (blocchi o elementi lapidei) e i giunti di malta.

I primi si avvalgono di tecniche di omogeneizzazione allo scopo di poter definire un continuo equivalente alla tessitura muraria. In pratica, pur essendo la muratura composta di malta e mattoni, che sono elementi dotati di differenti caratteristiche dei materiali, vengono individuati dei moduli ricorrenti e stabilite delle caratteristiche equivalenti al singolo modulo che può pertanto essere modellato come un continuo.

Nei modelli discontinui, invece, ogni componente (conci e letti di malta) viene modellato separatamente, e a ciascuno vengono attribuite le corrispondenti proprietà costitutive. La micro-modellazione presenta il vantaggio di risultare perfettamente coerente dal punto di vista teorico e formale, elegante dal punto di vista matematico, svincolata dalla necessità di introdurre a priori ipotesi sulla risposta, circostanza che la rende applicabile in modo del tutto generale e la colloca tra i metodi di modellazione più avanzata. Tuttavia essa richiede un onere computazionale estremamente elevato e in molti casi tale da renderla, allo stato attuale, inapplicabile per la simulazione della risposta dinamica di interi edifici. Inoltre l'estrema sensibilità alla scelta di alcuni parametri caratteristici del materiale, primo tra tutti il valore della resistenza a trazione, porta in genere le modellazioni di dettaglio a stime dal basso dell'effettiva resistenza della struttura, a causa di problemi legati alla non convergenza della soluzione o all'instaurarsi meccanismi di collasso locali, irrilevanti da un punto di vista globale, che tuttavia determinano l'interruzione dell'analisi numerica. Occorre comunque riconoscere esse sono attualmente ritenute le più avanzate modellazioni nell'ambito della ricerca scientifica, e anche se oggi non risultano le più adeguate per la

modellazione del comportamento sismico di interi edifici, rivestono, con riferimento alle modellazioni semplificate, un importante ruolo di confronto, verifica e taratura dei parametri.

Per le loro peculiari caratteristiche i modelli continui sono orientati alla modellazione di interi edifici, mentre quelli discontinui sono rivolti a modellazioni di dettaglio.

Nella figura sottostante è riportata una schematizzazione riassuntiva dei principali approcci agli elementi finiti.

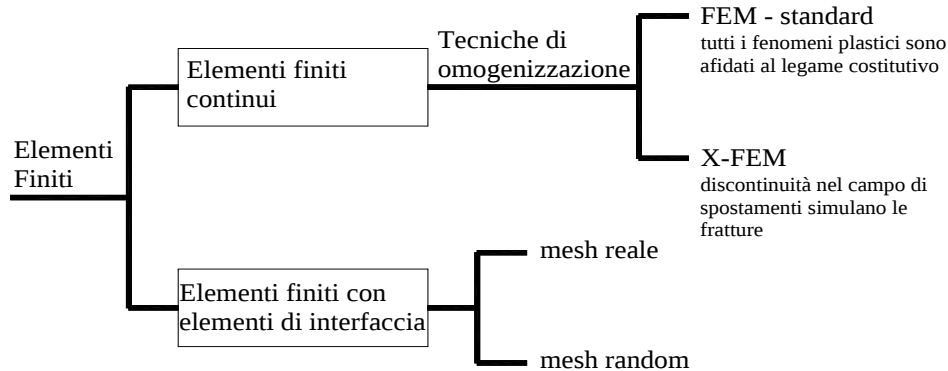


Figura 1.1. Classificazione di modelli FEM

5.1. Modelli continui

La muratura è un materiale composto da mattoni (o blocchi) e malta. Se risulta individuabile una disposizione regolare dei mattoni le tecniche di omogeneizzazione rappresentano un potente strumento per l'analisi strutturale. Le tecniche di omogeneizzazione seguono un approccio di tipo macroscopico, nel quale non si distingue più tra gli elementi che costituiscono la tessitura muraria e i giunti di malta. In questo caso viene introdotto un unico elemento finito, che ha il compito di simulare il comportamento globale del materiale "muratura". L'omogeneizzazione delle proprietà meccaniche ha riscosso negli ultimi decenni l'interesse di parecchi autori e ha portato alla definizione di molteplici procedure di omogeneizzazione, ormai disponibili in letteratura, e che possono seguire diversi approcci.

Un metodo piuttosto generale e rigoroso, almeno in via teorica, consiste nell'utilizzo di un continuo generalizzato alla Cosserat. In quest'ambito le prime proposte sono state formulate da Besdo (1985) e Mühkhaus (1993). Sebbene il continuo alla Cosserat sia stato ripreso recentemente da alcuni autori (Stefanou et al., 2008), limitandosi generalmente al campo lineare, recentemente sono state avanzate alcune proposte per l'estensione del modello anche al campo non lineare (Addessi, 2010). Sono state inoltre condotte alcune simulazioni, mirate al confronto tra continuo alla Cosserat e alla Cauchy (Trovalusci e Masiani 1996, Salerno e De Felice 2009). A causa della sua complessità l'approccio alla Cosserat non è mai stato applicato a casi di studio reali, infatti, si è progressivamente diffuso l'utilizzo di un materiale omogeneo equivalente per la muratura, le cui caratteristiche possono essere assegnate definendo, per stabilire le relazioni che permettono di ottenere un materiale omogeneo equivalente alla muratura è quella di individuare un modulo base ricorrente e definire su di esso delle grandezze medie.

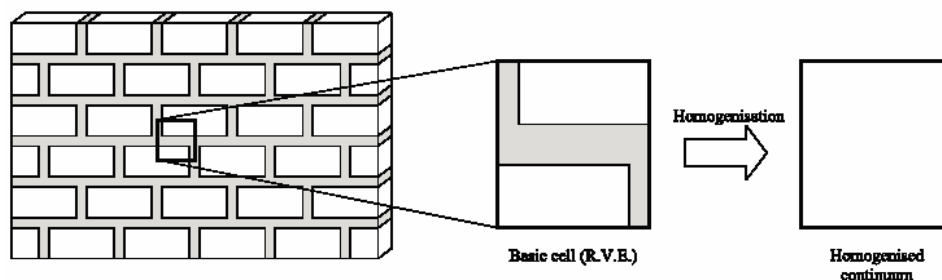


Figura 1.2. Esempio di definizione della cella elementare (Zucchini e Lourenço, 2002)

La formalizzazione della tecnica dell'omogeneizzazione avvenne ad opera di Bakhvalov e Panasenko nel 1989.

Esistono due metodologie principali per la definizione di un modello continuo, entrambe basate sull'individuazione di una cella base. Il primo è basato sulla taratura del modello continuo mediante modellazioni di dettaglio o sperimentazioni dirette condotte esclusivamente sulla cella elementare. La definizione delle caratteristiche equivalenti del modello continuo avviene quindi su tali dati. Tale approccio è sicuramente il più accurato tra i due, ma non consente di ottenere le proprietà da at-

tribuire all'equivalente continuo in una forma chiusa. In accordo con questo tipo di approccio esistono diverse proposte; in particolare tale tecnica è stata introdotta da Anthoine che l'ha prima formalizzata (1995 e 1997) e successivamente applicata con Pegon (1997). Altri autori l'hanno fatta propria e quindi proposta con alcune variazioni (e.g. Urbanski, 1995).

Il secondo approccio consiste nella semplificazione della geometria della cella, allo scopo di individuare delle soluzioni per l'omogeneizzazione in forma chiusa. Tale approccio sebbene approssimato, è di più immediata interpretazione, e, per tanto, più diffuso.

Nell'ambito di tale metodo sono state avanzate numerose proposte: Pande et al. (1989) e di Maier (1991) utilizzano funzioni di danneggiamento, Pietruszczak e Niu (1992), e dopo qualche anno quelle Lee et al. (1996) un modello fratturante, Lourenço (1996) si avvale di un modello plastico, mentre Uva e Salerno (2006) di un modello con danno ed attrito. In tutti questi casi l'approccio consta di due fasi: nella prima una fila di mattoni viene omogeneizzata con i giunti di malta verticali tra loro interposti, mentre nella seconda fase le file di mattoni vengono omogeneizzate le une con le altre. Questa procedura presenta tuttavia il limite di non tenere conto dell'effettiva tessitura muraria.

Sono, quindi, stati introdotti ulteriori modelli che tengono conto di una valutazione più dettagliata dell'interazione tra le diverse componenti della cella base. Tali proposte sono dovute a Lopez et al. (1999), van der Pluijm (1999), e Zucchini e Lourenço (2002 e 2009), aventi affrontato la questione in maniera indipendente.

Altri approcci, formulati da Luciano e Sacco (1997 e 1998), Gamba-rota e Lagomarsino (1997a), De Buhan e De Felice (1997), Lourenço (2000), Sab (2003), Calderini e Lagomarsino (2006 e 2008), Sacco (2009) si basano sull'osservazione che il collasso della muratura avviene con il danneggiamento (a taglio, o a fessurazione) dei giunti di malta. Tali app Nel 2004 autori come Carbone e Codegone, avvalendosi dei principi variazionali, hanno introdotto altri approcci per la derivazione delle proprietà omogeneizzate, seppur limitando lo studio al campo elastico.

Le tecniche di omogeneizzazione, prima applicate al caso piano, sono inoltre state estese al campo tridimensionale, includendo pertanto le

azioni fuori piano. Ad esempio Cecchi, che aveva inizialmente formulato una proposta per il comportamento con Di Marco (2000), con Rizzi (2001) con Sab (2002a), ha successivamente esteso tale formulazione con Sab (2002b) studiando il comportamento tridimensionale nel dettaglio con Milani e Tralli (2005); un'altra proposta è infine dovuta a Chen-qing e Hong (2006).

Le tecniche di omogeneizzazione sono state inoltre estese al caso di murature non regolari, nelle quali cioè non è possibile individuare una cella base modulare (Cluni e Gusella 2003, Stefanou et al. 2010).

5.2. Modelli discontinui

I modelli discontinui consistono nella modellazione separata dei mattoni dei giunti di malta e dell'interfaccia mattone-malta (e.g. Fouchal et al., 2009), adottando per ciascuna di tali componenti un'appropriata legge costitutiva. Questo approccio restituisce risultati molto accurati soprattutto a livello locale.

Esistono poi approcci leggermente più semplificati, secondo i quali le proprietà della malta e dell'interfaccia con i mattoni sono concentrati in un unico elemento. Tali approcci da un lato riducono l'accuratezza della soluzione, dall'altro garantiscono un onere computazionale inferiore. I mattoni vengono in genere modellati mediante elementi rigidi o elastici, mentre gli elementi di interfaccia hanno il compito di simulare il distacco degli elementi contigui a seguito delle tensioni normali di trazione e lo scorrimento. La scelta della mesh e la conseguente disposizione degli elementi di interfaccia può seguire due possibili criteri.

Può essere proposta una mesh che riproduce fedelmente la tessitura muraria con gli elementi e i giunti di malta disposti secondo la reale distribuzione. A partire da Page (1978) e Lofti e Shing (1994) questo approccio è stato applicato frequentemente per una modellazione dettagliata di piccole pareti murarie. In particolare vanno certamente ricordati Lourenço e Rots (1997a), Formica et al. (2002), Pelissou e Lebon (2009), Rekik e Lebon (2010), oltre a Giambanco et al. (1997 e 2001) e Senthivel e Lourenço (2009) che propongono un modello di interfaccia tra i blocchi con spessore nullo.

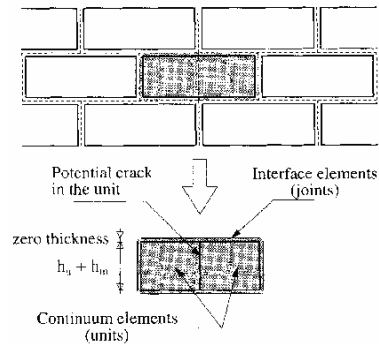


Figura 1.3. Modelli agli elementi finiti con elementi di interfaccia: esempio di modello che riproduce la reale tessitura (Lourenço e Rots, 1997a)

Alcuni studi, inoltre, sono inerenti all'introduzione di specifiche interfacce con particolare riferimento al loro comportamento ciclico (e.g. Oliveira e Lourenço, 2004).

Una tipologia strutturale che ben si presta all'impiego dei modelli discontinui è quella della muratura a blocchi con giunti a secco, per la quale modelli di interfacce coesive riescono a cogliere con efficacia il suo comportamento non lineare. Alcune applicazioni, come quelle proposte da Caddemi et al. (2010) e Rizzo et al. (2010) riguardano valutazioni della risposta non lineare di templi greci.

Un altro procedimento consiste nel considerare una mesh che riproduce mediamente l'effettiva distribuzione dei giunti di malta che in alcuni casi può essere generata in modo casuale.

Un esempio di questo tipo è stato proposto da Beer (1985) e implementato in un software di calcolo denominato *CASTEM 2000*, all'interno del quale sono state sviluppate da Pegon et al. (2001) delle procedure di generazione automatica della mesh.

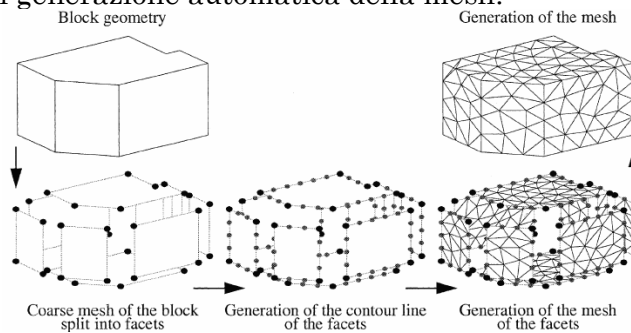


Figura 1.4. Esempio di modello con generazione random automatica della mesh
(Pegon et al., 2001)

Tutti questi modelli vengono tuttavia applicati in un ambito estremamente ristretto, poiché l'altissimo dettaglio con cui vengono modellati gli elementi in muratura comporta un restringimento del campo di impiego; pertanto le applicazioni sono in genere rivolte alla simulazione di prove di laboratorio condotte su piccoli pannelli murari.

5.3. Legami costitutivi

Un aspetto caratteristico dei modelli con elementi finiti è associato alla definizione del legame costitutivo con degrado che deve riprodurre il comportamento fratturante del solido murario. In letteratura vi sono numerosi legami appositamente studiati per la simulazione del comportamento meccanico dei solidi murari, caratterizzato da una esigua resistenza a trazione: Di Pasquale (1992), Gambarotta e Lagomarsino (1996b). Un'ulteriore evoluzione delle modellazioni agli elementi finiti, orientata ad una riduzione dell'onere computazionale, è rappresentata dai cosiddetti *X-FEM* (*eXtended Finite Element Method*), elementi finiti che consentono di avere al loro interno campi di spostamento discontinui o punti di localizzazione delle deformazioni che simulano i fenomeni di frattura. In tale categoria può essere collocato il modello proposto da Pietruszczak e Ushaksaraei (2003) che prevede l'esistenza di un piano critico interno a ciascun elemento, il cui orientamento non viene imposto a priori, ma determinato massimizzando una funzione di collasso.

Nei paragrafi che seguono viene riportata una breve descrizione di alcuni modelli agli elementi finiti di tipo fratturante, implementati in alcuni software di calcolo strutturale e utilizzati soprattutto nell'ambito della ricerca. Successivamente vengono descritti alcuni modelli costitutivi che sfruttano approcci differenti: il primo è quello proposto da Gambarotta e Lagomarsino (1997b), basato su un legame costitutivo riproposto dagli stessi autori anche con riferimento ad una modellazione discreta descritta nel paragrafo relativo alle macro-modellazioni, il secondo è dovuto a Lourenço et al. (1997b) e si basa su un modello di plasticità con softening applicato a materiali ortotropi, infine viene presentato il mo-

dello di Creazza et al. (2002), basato sull'utilizzo di funzioni di danneggiamento.

5.3.1. Cenni su alcuni legami di tipo *no tension*

Alcuni tra i codici di calcolo più evoluti presenti attualmente sul mercato dispongono di elementi finiti non-lineari che consentono di modellare materiali di tipo fessurante.

Nel codice di calcolo *ABAQUS* è disponibile un elemento denominato *concrete*, che consente di modellare materiali con comportamento di tipo fragile quali il calcestruzzo semplice o armato con piccole pressioni di confinamento, e la muratura. Il comportamento del materiale è inizialmente isotropo, ma a seguito della formazione delle fessure si introduce un'anisotropia. Tali fessure provocano un graduale degrado della rigidità. Non vengono prese in considerazione le deformazioni plastiche associate alla chiusura delle fessure che si assume totale al momento in cui lo sforzo normale di trazione ridiviene di compressione. Si utilizza il criterio di rottura Mohr-Coulomb. Ai fini caratterizzazione del comportamento meccanico del materiale, il parametro che caratterizza il comportamento fessurante è l'energia spesa per la formazione di una frattura di area unitaria (*energia di frattura*).

La regola costitutiva è assegnata per mezzo di una legge σ - ε monoassiale e del coefficiente ν di Poisson. Il legame a trazione è di tipo lineare fino alla fessurazione e presenta un successivo softening. I risultati che si ottengono risultano fortemente condizionati dal valore della resistenza a trazione.

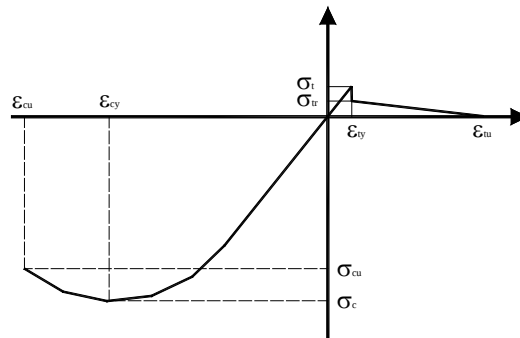


Figura 1.5. Legame costitutivo monodimensionale di tipo fratturante

Anche nel codice di calcolo *ADINA* è implementato un elemento denominato *concrete* pensato soprattutto per descrivere il comportamento del calcestruzzo. In tale modello viene considerato un legame costitutivo ortotropo rispetto agli assi principali di tensione come descritto nel Manuale Utente (2005).

5.3.2. Legame costitutivo a piani di danneggiamento di Gambarotta e Lagomarsino

Tale modello è stato sviluppato da Gambarotta e Lagomarsino (1997b) esplicitamente per la modellazione della muratura. Si considera un continuo omogeneo e ortotropo, con degrado delle caratteristiche meccaniche che può avvenire lungo dei piani di danneggiamento individuati dalla direzione dei giunti di malta orizzontali.

Tale degrado, come verrà meglio descritto in seguito, può essere di due diverse nature: o dal danno causato dal progressivo distacco dei giunti di malta o dallo schiacciamento dei mattoni o dal danno legato agli scorrimenti lungo gli stessi giunti.

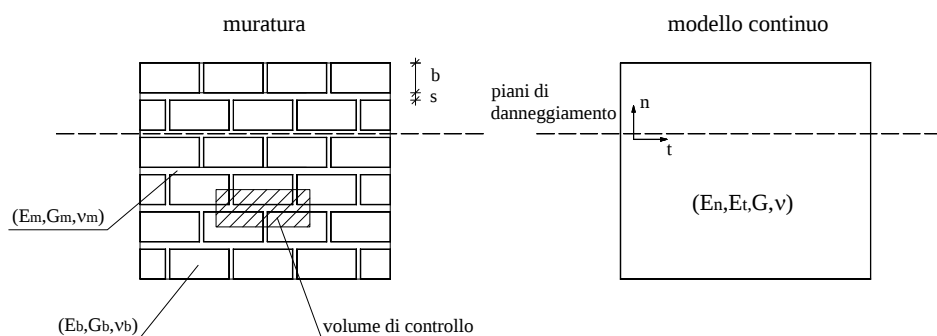


Figura 1.6. Muratura reale e continuo equivalente elastico ortotropo

Il grado di danneggiamento viene caratterizzato da una variabile scalare (α) che evolve, durante l'analisi, dal valore iniziale zero (materiale integro) fino al valore uno che caratterizza le condizioni di rottura del materiale.

Le caratteristiche elastiche del modello continuo omogeneizzato vengono definite, partendo dalle caratteristiche elastiche dei mattoni e della malta.

Si indichino con E_b , G_b , ν_b i parametri elastici dei mattoni, con E_m , G_m , ν_m quelli della malta, con b e s le dimensioni geometriche rispettivamente dei mattoni e dei giunti di malta; allora le caratteristiche dell'insieme omogeneo risultano date da:

$$\begin{aligned} E_n &= \eta_m \cdot E_m + \eta_b \cdot E_b \\ E_t &= \left[\frac{\eta_b}{E_b} + \frac{\eta_m}{E_m} - \frac{\eta_m \cdot \eta_b \cdot E_m \cdot E_b}{E_m} \cdot \left(\frac{\nu_b}{E_b} - \frac{\nu_m}{E_m} \right)^2 \right]^{-1} \\ \nu &= \eta_m \cdot \nu_m + \eta_b \cdot \nu_b \\ G &= \left(\frac{\eta_b}{G_b} + \frac{\eta_m}{G_m} \right)^{-1} \end{aligned}$$

dove η_m e η_b sono due rapporti geometrici e valgono

$$\begin{aligned} \eta_m &= \frac{s}{b+s} \\ \eta_b &= 1 - \eta_m \end{aligned}$$

Con riferimento agli assi n e t indicati in figura, la matrice di flessibilità assume la forma:

$$K_{el}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_n} & -\frac{\nu}{E_n} & 0 \\ -\frac{\nu}{E_n} & \frac{1}{E_t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}$$

Il legame elasto-plastico che governa il modello è dato dalla relazione

$$\sigma = K_{el} \cdot (\varepsilon - \varepsilon^{pl})$$

dove $\sigma = [\sigma, \sigma_n, \tau]^t$ è il vettore delle tensioni

$\varepsilon = [\varepsilon_t, \varepsilon_n, \gamma]^t$, $\varepsilon^{pl} = [0, \varepsilon^*, \gamma^*]^t$ sono rispettivamente il vettore delle deformazioni totali e il vettore delle deformazioni plastiche.

Si noti come vengano trascurate il formarsi di deformazioni plastiche in direzione t .

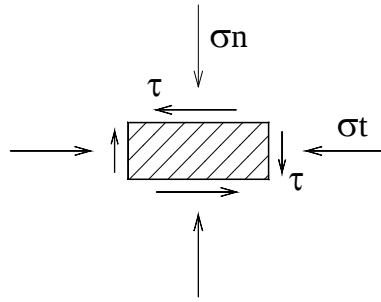


Figura 1.7. Componenti tensionali riferite al sistema di riferimento

Si noti che il vettore delle deformazioni plastiche si ottiene dalla somma del contributo dovuto ai mattoni (ε_b^{pl}) e di quello della malta (ε_m^{pl}).

$$\varepsilon^{pl} = \eta_m \cdot \varepsilon_m^{pl} + \eta_b \cdot \varepsilon_b^{pl}$$

Riferendosi per adesso alla sola malta, viene assunto che le componenti di deformazione plastica possano esprimersi nella forma

$$\varepsilon_m^{pl} = h(\alpha_m) \cdot H(\sigma_n) \cdot \sigma_n$$

$$y_m^{pl} = k(\alpha_m) \cdot (\tau - f)$$

α_m è la variabile che indica lo stato di danneggiamento della malta, f è la forza di attrito che si instaura in corrispondenza dei giunti di malta allorché la tensione normale al giunto stesso è di compressione, H è la funzione gradino di Heaviside definita come segue

$$\begin{cases} H(x) = 0 & \text{per } x < 0 \\ H(x) = 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

Tale funzione consente di considerare il carattere monolatero del vincolo offerto dalla malta. Si suppone, infatti, che essa rappresenti la componente in cui concentrare il danneggiamento in corrispondenza di uno sforzo di trazione, mentre quando la tensione normale al piano di danneggiamento è di compressione, il contatto tra i mattoni adiacenti è il fattore che determina la reazione.

h e k sono due funzioni di α_m . Esse risultano positive e si azzerano solo per $\alpha=0$. Gli autori, al fine di non appesantire la formulazione del modello, definiscono tali funzioni in maniera estremamente semplice come

$$h = c_{mn} \cdot \alpha_m$$

$$k = c_{mt} \cdot \alpha_m$$

L'evoluzione del sistema, vale a dire dell'insieme delle variabili di stato α , f e delle deformazioni plastiche ε_{pl} e γ_{pl} , è governato da due distinte superfici di plasticizzazione e dai relativi legami associati.

La prima condizione di ammissibilità plastica determina l'attivarsi degli scorrimenti angolari ed è da prendere in considerazione solo se la σ_n è di compressione. In termini di leggi di flusso plastico si ha

$$\begin{cases} \varphi_s = |f| + \mu \cdot \sigma_n \leq 0 \\ \dot{\gamma}^{pl} = \text{sign}(f) \cdot \dot{\lambda} \\ \dot{\lambda} \geq 0, \lambda \cdot \varphi_s = \dot{\lambda} \cdot \dot{\varphi}_s = 0 \end{cases}$$

La seconda condizione determina l'attivarsi di incrementi di danno (incrementi di α), e può essere espressa dalle seguenti equazioni

$$\begin{cases} \varphi_{dm} = Y_m - R_m \leq 0 \\ \dot{\alpha}_m \geq 0 \\ \alpha_m \cdot \varphi_{dm} = \dot{\alpha}_m \cdot \dot{\varphi}_{dm} = 0 \end{cases}$$

Il termine Y_m rappresenta l'energia disponibile per compiere il processo di danneggiamento, mentre R_m rappresenta l'energia richiesta affinché si possa estendere il danno, ed è una proprietà del materiale. Si possono avere incrementi di danno solo quando l'energia disponibile eguaglia l'energia richiesta.

La funzione di tenacità viene supposta dipendente solo da α_m , mentre l'energia disponibile (Y_m) si può esprimere nella forma

$$Y_m = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial h}{\partial \alpha} \cdot H(\sigma_n) \cdot \sigma_n^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial k}{\partial \alpha} \cdot (\tau - f)^2 = \frac{1}{2} \cdot c_{mn} \cdot H(\sigma_n) \cdot \sigma_n^2 + \frac{1}{2} \cdot c_{mt} \cdot (\tau - f)^2$$

Allorché si raggiunge il massimo di R_m (convenzionalmente per $\alpha=1$) il materiale giunge a rottura, con una conseguente fase di softening nella quale l'energia richiesta per successivi incrementi di danno decresce, tendendo asintoticamente a zero per α che tende a infinito.

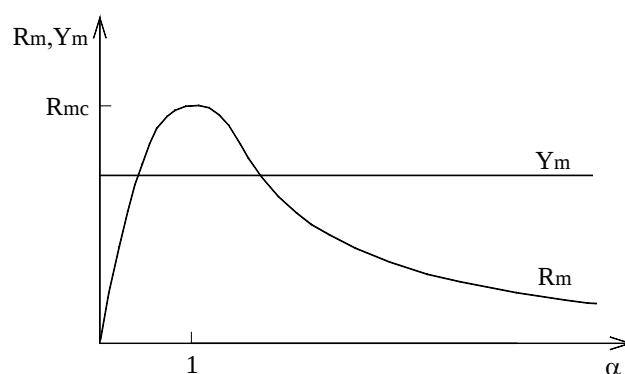


Figura 1.8. Funzione di tenacità

Dalla condizione $\phi_{dm}(\alpha=1)=0$ si ricava il dominio di rottura, rappresentato in figura, assieme al dominio di primo snervamento che racchiude tutti gli stati tensionali caratterizzati da un valore del danno nullo.

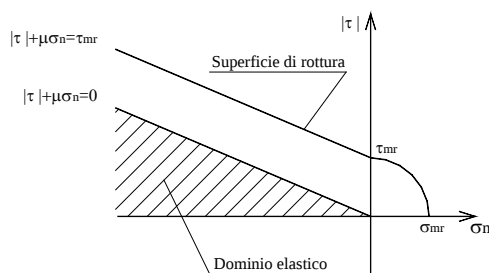


Figura 1.9. Dominio elastico e di rottura

I termini σ_{mr} e τ_{mr} possono essere considerati convenzionalmente come i valori della resistenza a trazione e a taglio della malta, e risultano

$$\sigma_{mr} = \sqrt{2 \cdot R_{mc} / c_{mn}}$$

$$\tau_{mr} = \sigma_{mr} * \sqrt{c_{mn} / c_{mt}}$$

La figura sottostante riporta i risultati di una simulazione numerica che riproduce una prova di trazione monoassiale sulla muratura. Si nota il successivo degrado delle caratteristiche meccaniche dovute al danneggiamento per la progressiva fessurazione dei giunti di malta.

La rottura avviene, coerentemente con il dominio di rottura precedentemente illustrato, in corrispondenza di un valore della tensione pari a σ_{mr} . Lo scarico per un valore della tensione corrispondente al materiale fessurato avviene secondo un andamento lineare con rigidezza orientata all'origine, in modo da simulare chiusura completa delle fessure se il carico viene completamente rimosso.

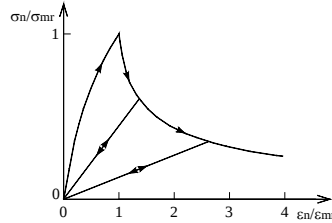


Figura 1.10. Simulazione numerica di una prova a trazione monoassiale sulla malta

La figura seguente illustra invece la simulazione di una prova a scorrimento in cui si considera σ_n costante. L'ordinata del grafico riporta le tensioni tangenziali normalizzate rispetto a $\tau_r^* = \tau_{mr} - \mu\sigma_n$.

Superato il valore di picco della resistenza si ha una fase di softening con tensione tangenziale che tende asintoticamente a $\mu\sigma_n$.

La figura mostra anche il complesso comportamento isteretico, si nota subito come la rigidezza elastica di scarico si degradi man mano che aumenta lo scorrimento da cui si parte a scaricare, e allo stesso tempo aumenta l'area del ciclo di isteresi.

Scaricando completamente il carico, non si ha il recupero completo delle deformazioni ma si ha uno scorrimento residuo.

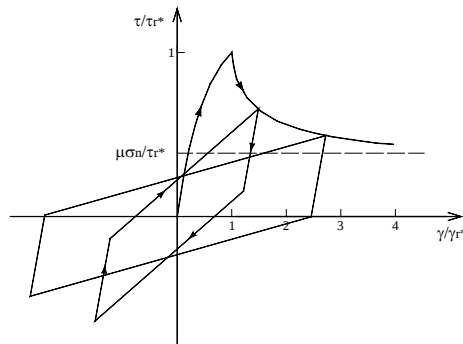


Figura 1.11. Simulazione numerica di una prova a scorrimento sulla malta

Il modello plastico dei mattoni è del tutto analogo a quello previsto per la malta. In particolare le deformazioni plastiche si possono scrivere nella forma

$$\varepsilon_b^{pl} = c_{bn} \cdot \alpha_b \cdot H(-\sigma_n) \cdot \sigma_n$$

$$Y_b^{pl} = c_{bt} \cdot \alpha_b \cdot \tau$$

Si noti che, mentre la malta poteva danneggiarsi solo a seguito di sforzi di trazione, il danneggiamento dei mattoni è previsto solo se si è in presenza di sforzi di compressione. In sintesi il modello concentra il danneggiamento per trazione della muratura in corrispondenza della malta e quello per compressione in corrispondenza dei mattoni.

La condizione limite che regola il danno per i mattoni è solo quella per compressione (manca una condizione limite di scorrimento analoga alla malta). Tale condizione, in maniera analoga al caso della malta, è definita come differenza tra l'energia disponibile per la propagazione del danno (Y_b) e l'energia richiesta (R_b) e si aggiungerà alle due condizioni di danneggiamento della malta per la risoluzione del problema incrementale

$$\begin{cases} \varphi_{db} = Y_b - R_b \leq 0 \\ \dot{\alpha}_b \geq 0 \\ \alpha_b \cdot \varphi_{db} = \dot{\alpha}_b \cdot \dot{\varphi}_{db} = 0 \end{cases}$$

L'energia disponibile si può scrivere come

$$Y_b = \frac{1}{2} \cdot c_{bn} \cdot H(-\sigma_n) \cdot \sigma_n^2 + \frac{1}{2} \cdot c_{bt} \cdot \tau^2$$

La soluzione del problema incrementale si può pertanto ottenere risolvendo il seguente problema complementare:

- Caso di giunti in compressione ($\sigma_n < 0$)

$$\begin{cases}
\varphi_s = |f| + \mu \cdot \sigma_n \leq 0 \\
\varphi_{dm} = Y_m - R_m \leq 0 \\
\varphi_{db} = Y_b - R_b \leq 0 \\
\dot{\gamma}_m^{pl} = \text{sign}(f) \cdot \dot{\lambda} \\
\dot{\lambda} \geq 0, \dot{\alpha}_m \geq 0, \dot{\alpha}_b \geq 0 \\
\lambda \cdot \varphi_s = \dot{\lambda} \cdot \dot{\varphi}_s = 0 \\
\alpha_m \cdot \varphi_{dm} = \dot{\alpha}_m \cdot \dot{\varphi}_{dm} = 0 \\
\alpha_b \cdot \varphi_{db} = \dot{\alpha}_b \cdot \dot{\varphi}_{db} = 0
\end{cases}$$

- Caso di giunti in trazione ($\sigma_n > 0$)

$$\begin{cases}
\varphi_{dm} = Y_m - R_m \leq 0 \\
\varphi_{db} = Y_b - R_b \leq 0 \\
\dot{\alpha}_m \geq 0, \dot{\alpha}_b \geq 0 \\
\alpha_m \cdot \varphi_{dm} = \dot{\alpha}_m \cdot \dot{\varphi}_{dm} = 0 \\
\alpha_b \cdot \varphi_{db} = \dot{\alpha}_b \cdot \dot{\varphi}_{db} = 0
\end{cases}$$

Il dominio completo, mostrato in figura, si ottiene considerando il precedente e aggiungendo la condizione di rottura per i mattoni che si esprime come $\phi_{db}(\alpha_b=1)=0$.

Le resistenze a compressione e a taglio dei mattoni sono date da

$$\begin{aligned}
\sigma_{br} &= \sqrt{2 \cdot R_{bc} / c_{bn}} \\
\tau_{mr} &= \sigma_{br} \cdot \sqrt{c_{bn} / c_{bt}}
\end{aligned}$$

Le funzioni di tenacità R , assumono invece la seguente forma

$$\begin{cases}
R(\alpha) = R_c \cdot \alpha & \text{se } 0 < \alpha < 1 \\
R(\alpha) = R_c \cdot \alpha^{-\beta} & \text{se } \alpha > 1
\end{cases}$$

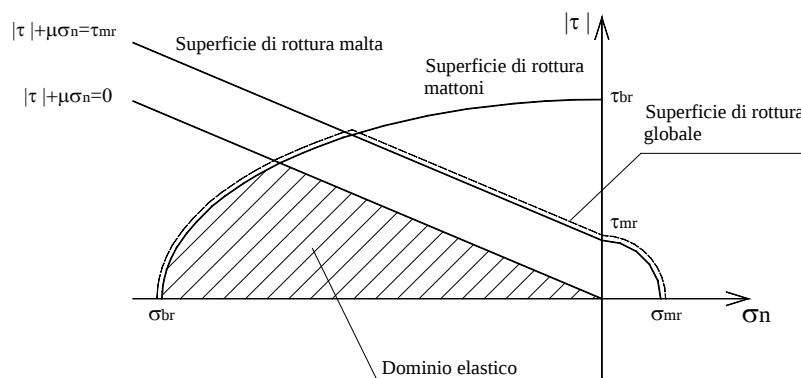


Figura 1.12. Dominio elastico e di rottura globale

Si conclude la descrizione di questo modello con alcune osservazioni. In precedenza si è notato come il danneggiamento globale della muratura è stato attribuito per intero alla malta nel caso in cui le tensioni normali ai piani di danneggiamento fossero di trazione, e interamente ai mattoni nel caso di compressione. Ne deriva che i parametri di resistenza e deformabilità che caratterizzano le condizioni di rottura a trazione della malta, devono essere visti come parametri di resistenza e deformabilità a trazione della muratura. In egual modo i parametri che caratterizzano il comportamento a compressione dei mattoni, rappresentano la resistenza a compressione dell'intera muratura.

Essi si ottengono attraverso prove sperimentali effettuate sui singoli componenti e su campioni di muratura.

5.3.3. Il modello di plasticità con softening di Lourenço et al.

L'approccio proposto da Lourenço et al. (1997b), applicato ad elementi piani, è basato su legami costitutivi con softening applicati a materiali ortotropi. Vengono distinti i criteri di rottura a trazione e a compressione: per la trazione si fa riferimento al criterio di rottura di Rankine, mentre per la compressione viene utilizzato il criterio di Hill. Si consideri dapprima il comportamento a trazione.

Con riferimento alla prima direzione principale, per tener conto del softening, la formulazione di Rankine viene così generalizzata:

$$f_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} - \overline{\sigma}_t(\kappa_t)$$

in cui la funzione $\overline{\sigma}_t(\kappa_t)$ descrive il comportamento softening del materiale e lo scalare κ_t controlla il livello di softening.

L'ipotesi di comportamento isotropico non è, però, facilmente applicabile per materiali fragili o quasi-fragili, poiché questi possono essere caricati lungo una direzione fino al raggiungimento della resistenza a trazione, anche quando un danneggiamento sia già avvenuto nella direzione perpendicolare. Pertanto gli autori propongono una formulazione del criterio di Rankine estesa al caso ortotropo, utilizzando, tuttavia, un'unica variabile scalare di controllo del softening. Tale variabile indica il livello simultaneo di softening lungo le due direzioni materiali, pur considerando due distinti valori di energie di frattura nelle medesime direzioni. Introducendo allora una distinzione tra le tensioni di snervamento rispetto alle due direzioni materiali, il criterio di Rankine viene modificato come segue:

$$f_1 = \frac{(\sigma_x - \overline{\sigma}_{tx}(\kappa_t)) + (\sigma_y - \overline{\sigma}_{ty}(\kappa_t))}{2} + \sqrt{\left(\frac{(\sigma_x - \overline{\sigma}_{tx}(\kappa_t)) - (\sigma_y - \overline{\sigma}_{ty}(\kappa_t))}{2}\right)^2 + \alpha \cdot \tau_{xy}^2}$$

in cui α rappresenta un parametro che regola il contributo delle tensioni tangenziali al collasso e vale

$$\alpha = \frac{f_{tx} \cdot f_{ty}}{\tau_{u,t}^2}$$

I parametri f_{tx} , f_{ty} e $\tau_{u,t}$ rappresentano rispettivamente le resistenze a trazione uni assiali lungo le due direzioni materiali e la resistenza di puro taglio per il materiale considerato.

La funzione di softening considerata è di tipo esponenziale nel piano tensioni equivalenti-deformazioni, per entrambe le direzioni materiali, cui sono tuttavia associate differenti energie di frattura (G_{fx} e G_{fy}). Si ha infatti:

$$\overline{\sigma_{tx}} = f_{tx} \cdot \exp\left(-\frac{h \cdot f_{tx}}{G_{fx}} \kappa_t\right), \quad \overline{\sigma_{ty}} = f_{ty} \cdot \exp\left(-\frac{h \cdot f_{ty}}{G_{fy}} \kappa_t\right)$$

essendo h la *lunghezza equivalente*, corrispondente ad una dimensione rappresentativa della larghezza della discretizzazione tale che i risultati siano attendibili. Gli autori utilizzano un'espressione di h legata all'area dell'elemento A_e . In ogni caso, con riferimento all'asse materiale i , tale parametro deve rispettare la seguente condizione

$$h \leq \frac{G_{fi} \cdot E_i}{f_{ti}^2}$$

Rimane da indicare la relazione tra la funzione di softening κ_t e le grandezze cinematiche. Tale valore risulta proprio pari alla deformazione principale plastica massima. In termini incrementali si ha:

$$\dot{\kappa}_t = \dot{\epsilon}_1^p = \frac{\dot{\epsilon}_x^p + \dot{\epsilon}_y^p}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\dot{\epsilon}_x^p - \dot{\epsilon}_y^p)^2 + (\dot{\gamma}_{xy}^p)^2}$$

Per il comportamento a compressione gli autori fanno riferimento al criterio di Hill. Il dominio di Hill può essere rappresentato da un ellissoide nel piano completo delle tensioni, e assume la seguente forma:

$$f_2 = A \cdot \sigma_x^2 + B \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y + C \cdot \sigma_y^2 + D \cdot \tau_{xy}^2 - 1 = 0$$

I coefficienti dell'equazione di questo ellissoide possono essere espressi in funzione dei parametri β e γ . Il primo regola l'accoppiamento tra le tensioni normali e richiede la conoscenza della resistenza a compressione f_{45° in una prova monoassiale condotta lungo una direzione intermedia tra i due assi materiali, mentre il secondo indica il contributo delle tensioni tangenziali al collasso. Essi risultano così definiti:

$$\beta = \left(\frac{1}{f_{45^\circ}^2} - \frac{1}{f_{cx}^2} - \frac{1}{f_{cy}^2} \right) \cdot f_{cx} \cdot f_{cy}; \quad \gamma = \frac{f_{cx} \cdot f_{cy}}{\tau_{u,c}^2}$$

In funzione di questi due parametri i coefficienti dell'ellissoide risultano pari a:

$$A = 1 / \left(\overline{\sigma_{cx}}(\kappa_c) \right)^2, \quad B = \beta / \left(\overline{\sigma_{cx}}(\kappa_c) \cdot \overline{\sigma_{cy}}(\kappa_c) \right)$$

$$C = 1 / \left(\overline{\sigma_{cy}}(\kappa_c) \right)^2, \quad D = \gamma / \left(\overline{\sigma_{cx}}(\kappa_c) \cdot \overline{\sigma_{cy}}(\kappa_c) \right)$$

Le funzioni $\overline{\sigma_{cx}}(\kappa_c)$ e $\overline{\sigma_{cy}}(\kappa_c)$ sono, rispettivamente le tensioni di snervamento lungo i due assi materiali. La legge inelastica adottata dagli autori è di tipo parabolico nella fase di hardening, mentre nella fase di softening presenta una fase parabolica seguita da una fase esponenziale che si attesta su un valore residuo $\overline{\sigma_{ri}}$ pari a 1/10 di quello di picco $\overline{\sigma_{pi}} = f_{ci}$. Analogamente al comportamento in trazione i indica in questo caso uno dei due assi materiali. La resistenza di picco $\overline{\sigma_{pi}}$, indipendentemente dall'asse materiale considerato, si ha in corrispondenza di un valore di κ_c pari a κ_p , che rappresenta un ulteriore parametro del materiale.

I criteri di snervamento a trazione e compressione, nell'ipotesi che i regimi di tensione a trazione e compressione siano disaccoppiati, possono infine essere combinati in un'unica superficie di snervamento combinata.

5.3.4. Modello agli elementi finiti con funzioni di danneggiamento

Si descrive brevemente di seguito un modello di danneggiamento studiato da Creazza et al. (2002).

Questo modello propone un elemento con caratteristiche che omogeneizzano quelle delle singole componenti della muratura (mattoni e malta) e consente pertanto una mesh meno fitta di quanto un micromodello richiederebbe.

L'elemento consente di cogliere i principali meccanismi di collasso della muratura, cioè:

- scorrimento in un punto soggetto a bassi valori di tensione normale;
- rottura delle unità di muratura (mattoni, blocchi, ecc.);
- rottura per fessurazione diagonale delle unità di muratura per valori di tensione normale sufficienti a sviluppare un comportamento di tipo *frictional* nei punti;

- rottura delle unità di muratura sotto sforzo come risultato della dilatazione della malta ad alti valori dello sforzo normale.

Molti studi recenti hanno dimostrato la necessità di valutare la resistenza a trazione della muratura, a causa della sua significativa influenza sulla sua resistenza ultima. L'uso di una legge costitutiva di tipo *no-tension* può condurre a una poco accurata stima della distribuzione del danneggiamento e della capacità ultima oltre a favorire l'insorgere di problemi numerici.

Questo modello fa propria la teoria del danneggiamento. L'approccio proposto (Creazza et al., 1995) riunisce in sé efficienza e semplicità. In particolare risultano decisive la definizione della funzione di danneggiamento e l'introduzione dell'ortotropia, tipica delle strutture in muratura.

Analogamente a quanto osservato per il modello proposto di plasticità con softening di Lourenço et al., in questo approccio vengono introdotte delle funzioni di danneggiamento, tuttavia in questo caso viene trascurato il comportamento ortotropo della muratura. Le proprietà meccaniche della muratura sono ricavate a partire dal comportamento delle sue componenti (mattoni e malta) attraverso una tecnica di omogeneizzazione. L'introduzione dell'ortotropia, legata sia alle proprietà insite nel materiale sia ai processi di danneggiamento, è invece rimandata ad ulteriori studi.

La teoria di danneggiamento, scelta per la descrizione del comportamento della muratura, è quella proposta da Faria et al. (1998) e da Saetta et al. (1999). L'approccio introduce delle inevitabili approssimazioni a causa della modellazione del danneggiamento spalmata su un continuo e non puntuale. Tuttavia le tecniche di omogeneizzazione, consentendo una mesh più rada rispetto a quella reale, rendono possibili le modellazioni di strutture di dimensioni significative.

Il modello isotropico introduce due parametri di danneggiamento interno indipendenti d^+ e d^- , funzioni delle effettive tensioni di trazione e compressione $\bar{\tau}^+$ e $\bar{\tau}^-$, e legate ad esse mediante le relazioni

$$d^+ = 1 - \frac{r_0^+}{\tau^+} e^{\left[A^+ \left(1 - \frac{\tau^-}{r_0^+} \right) \right]}$$

$$d^- = 1 - \frac{r_0^-}{\tau^-} (1 - A^-) - A^- e^{\left[B^- \left(1 - \frac{\tau^-}{r_0^-} \right) \right]}$$

dove r^+ ed r^- indicano il danneggiamento corrente, e i loro valori sono indice dell'espansione della superficie danneggiata. Queste equazioni definiscono i rami di incrudimento e poi di softening a compressione, e quello di softening a trazione. I parametri A^- e B^- sono parametri ottenuti imponendo il passaggio della curva per due punti ottenuti sperimentalmente, mentre A^+ è ottenuto imponendo che l'energia di deformazione accumulata in una prova di compressione sia pari all'energia di frattura specifica propria del materiale.

L'introduzione di due parametri indipendenti consente di separare i contributi dell'effettivo stato tensionale in due componenti $\bar{\sigma}_{ij}^+$ e $\bar{\sigma}_{ij}^-$, ottenendo infine la relazione

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = (1 - d^+) \frac{\partial \Psi_0^+}{\partial \varepsilon_{ij}^e} + (1 - d^-) \frac{\partial \Psi_0^-}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = (1 - d^+) \bar{\sigma}_{ij}^+ + (1 - d^-) \bar{\sigma}_{ij}^-$$

dove Ψ_0^+ e Ψ_0^- sono le energie libere elastiche dovute alle componenti di trazione e compressione dell'effettivo stato tensionale.

Questo modello di danneggiamento, inizialmente pensato per descrivere il comportamento delle strutture in cemento armato e in muratura, è stato successivamente adattato allo studio di strutture a geometria curva. I legami costitutivi sono ottenuti a partire dalle resistenze ultime a trazione e compressione del materiale sottoposto a prove in regime monoassiale, e dal modulo di elasticità. I legami costitutivi sono del tipo riportato in figura 1.13.

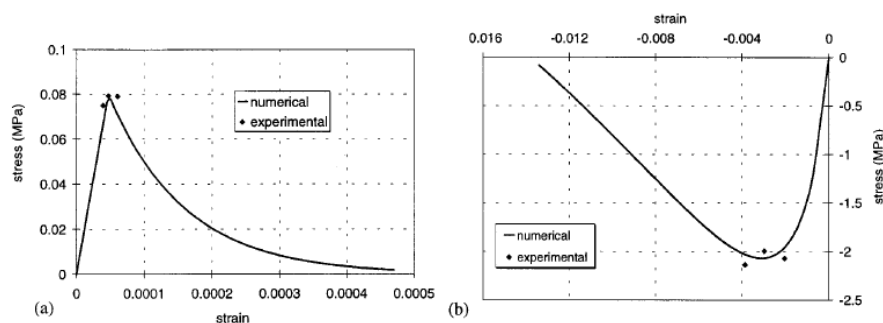


Figura 1.13. Legami costitutivi della muratura: (a) trazione e (b) compressione

È interessante inoltre osservare l'andamento del legame tra la deformazione monoassiale e i parametri di danneggiamento, di seguito riportati (fig. 1.14).

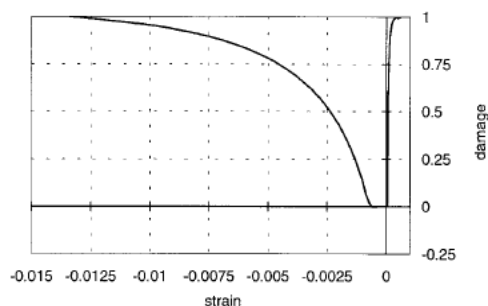


Figura 1.14. Parametri di danneggiamento in funzione della deformazione

6. Metodo agli elementi di contorno

Il metodo agli elementi di contorno, o *Boundary Element Method (BEM)*, consiste nella discretizzazione del contorno dell'elemento strutturale. Esso è stato inizialmente proposto con riferimento a problemi geotecnici, ed è stato successivamente esteso a quelli strutturali.

L'estensione al campo non lineare di questo metodo ha consentito di studiare la propagazione della frattura e il comportamento di materiali fragili come il calcestruzzo. Tuttavia rimangono molto limitate le applicazioni al campo delle strutture murarie. In particolare, un approccio

proposto da un team di ricercatori dell'Università di Palermo, dal quale è stato derivato *KARNAK SBGM*, un software ad uso commerciale (Cucco et al., 2002), mira all'interpretazione del quadro fessurativo di strutture murarie e studia il comportamento elastico di strutture in presenza di sconnessioni (Panzeca et al., 2008). Altre proposte, come quelle di Rashid et al. (1997) e Hatzigeorgiou e Beskos (2002), sono invece mirate a considerare il comportamento non lineare della muratura.

Esistono poi degli approcci ibridi, che combinano l'uso degli elementi di contorno con quello degli elementi finiti. Un esempio di questo approccio applicato alle strutture murarie è quello dovuto a Papia (2005). L'autore si occupa dello studio di *infilled frames* e propone di condurre analisi statiche, includendo sia le non linearità meccaniche che quelle geometriche, utilizzando il boundary element method (BEM) per la muratura e dividendo opportunamente il telaio in elementi finiti, considerando la mutua interazione dei due sottosistemi come tensioni distribuite al contorno per la muratura e forze nodali per il telaio. Questo approccio consente, inoltre, di considerare il distacco tra le due sottostrutture quando insorgono tensioni di trazione all'interfaccia.

7. Metodo agli elementi discreti/distinti

Uno dei metodi di modellazione che si è imposto per la modellazione di strutture in muratura, vista anche l'eterogeneità nei materiali, è il metodo degli *elementi distinti* (o *discreti*). Il doppio nome è stato volutamente lasciato poiché non c'è accordo tra gli autori; altri nomi utilizzati per il medesimo approccio, come evidenziato da Lemos (2007), sono *rigid block analysis* e *discontinuous deformation analysis*.

L'approccio è applicabile a tutti sistemi che possono essere considerati come assemblaggio di elementi (o blocchi), in genere rigidi interagenti tra loro. Sia sul comportamento meccanico degli elementi distinti, che sul tipo di interazione sono state proposte molte soluzioni, mentre dal punto di vista cinematico in genere viene assunta l'ipotesi di grandi spostamenti. In genere blocchi contigui vengono fatti interagire con vincoli di contatto di tipo unilatero, non reagenti a trazione ed elastici (o elasto-plastici) a compressione, mentre lo scorrimento è generalmente di

tipo attrittivo. Nell'utilizzo classico del metodo non viene prevista nessuna omogeneizzazione o alterazione della reale tessitura muraria che nel modello viene fedelmente riprodotta.

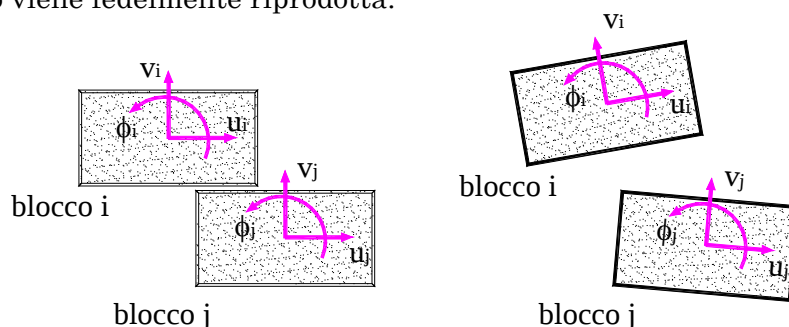


Figura 1.15. Raffigurazione di due blocchi contigui nella configurazione indeformata e in quella corrente

Tale metodologia è stata proposta per la prima volta da Cundall (1971) come approccio numerico a questo modello concettuale, ed è stata inizialmente applicata a settori anche molto distanti dalla modellazione di elementi murari (soprattutto geo-materiali come rocce e altri tipi di suolo).

Il modello iniziale, con comportamento piano e costituito da elementi rigidi, è stato nel corso degli anni arricchito variamente introducendo, ad esempio, il comportamento tridimensionale (Cundall 1988, Hart et al. 1988).

I gradi di libertà del modello coincidono con i gradi di libertà degli elementi, nessun grado di libertà è infatti associato al contatto. Il numero di gradi di libertà del modello sarà quindi pari a $3N$ nel caso di modelli piani e $6N$ nel caso di modello tridimensionali, dove con N si sta indicando il numero totale di elementi.

Dal punto di vista dell'onere computazionale, considerare i blocchi come elementi rigidi si traduce in una notevole riduzione dei gradi di libertà del sistema. Tuttavia, tali modelli risultano spesso caratterizzati da un numero elevato di elementi (soprattutto per le modellazioni di dettaglio) per cui richiedono tempi di elaborazione importanti.

Le applicazioni nel campo delle strutture murarie sono state avviate solo qualche anno dopo. Pagnoni (1994) e Pagnoni e Vanzi (1995),

hanno applicato il metodo degli elementi distinti ad archi e pannelli murari, utilizzando il software CICE, implementato da Hocking et al. (1987). Quasi contemporaneamente, Jean (1995) e Acary e Jean (1998) sviluppano il *metodo dei contatti dinamici* per la simulazione dell'interazione tra gli elementi distinti, basato su un legame attritivo alla Coulomb e sull'integrazione delle equazioni dinamiche del sistema. Successivamente, Boffi e Casolo (1998), introducono un modello basato su elementi rigidi, a due a due connessi con tre contatti elementari (assiale, a momento e a taglio), il cui comportamento non lineare è considerato mediante l'introduzione di leggi isteretiche.

Tuttavia, il metodo degli elementi distinti sembra adattarsi meglio alla tipologia strutturale della muratura a blocchi squadrate con dimensioni rilevanti; una tipologia costruttiva cioè di tipo storico monumentale, i cui esempi possono essere archi, antichi templi, volte a conci, ecc, come quelle mostrate in figura.

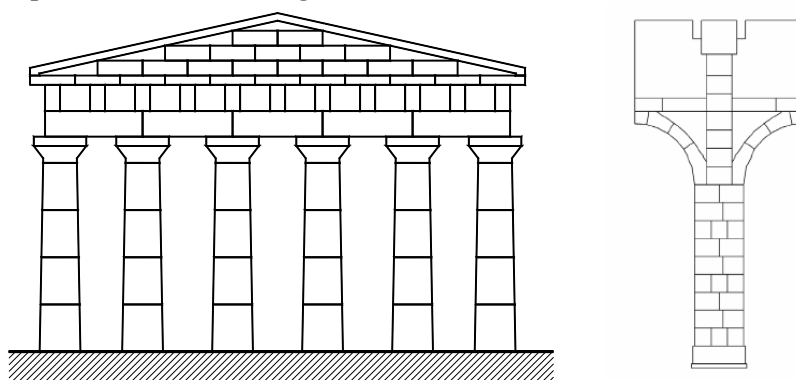


Figura 1.16. Esempi di strutture a blocchi: tempio greco e portale ad archi

Tale predisposizione è dovuta alla circostanza singolare derivante dal fatto che in strutture del genere il numero di elementi risulta, comunque, relativamente contenuto, e l'estrema regolarità della tessitura muraria rende possibile una modellazione realistica della struttura. Viceversa nel caso di muratura ordinaria la tessitura muraria, ammesso che sia nota, può presentarsi di tipo irregolare o variabile da punto a punto della struttura rendendo sostanzialmente inapplicabile tale metodo nella sua formulazione più semplice. Esistono tuttavia delle appli-

cazioni anche con riferimento a murature a tessitura irregolare: in questo caso gli elementi lapidei sono modellati come corpi rigidi mentre elementi di contatto deformabili dotati di coesione ed attrito simulano il comportamento dei giunti di malta.

Casolo ha introdotto ulteriori modelli per la simulazione del comportamento di strutture murarie che sfruttano corpi rigidi interagenti mediante molle che, per l'affinità col modello proposto in questo lavoro, verranno considerati in maniera più approfondita. Altre applicazioni sono invece state indirizzate verso la simulazione del comportamento del calcestruzzo (Mayorca e Meguro, 2003).

Sulla base del metodo agli elementi distinti, sono stati proposti dei metodi ibridi, a metà col metodo agli elementi finiti. In particolare Munjiza (2004) definisce *metodo agli elementi finiti-discreti* una formulazione numerica per la simulazione del comportamento fratturante dei materiali. Applicazioni di questa metodologia alle strutture murarie sono dovute allo stesso Munjiza (1995) e a Brookes e Mehrkar-Asl (1998), che considerano blocchi deformabili con mesh di elementi triangolari, che possono distaccarsi e separarsi nel corso dell'analisi, sulla base di criteri derivati dalla meccanica della frattura. Altre proposte, che rientrano nel metodo agli elementi discreti finiti, considerano invece una formulazione classica agli elementi finiti per ciascuno dei blocchi (Barbosa 1996, Mamaghani e al. 1999).

Un altro approccio sviluppato sulla base del metodo degli elementi distinti è il *DDA (Discontinuous Deformation Analysis)*, basato sull'assunzione di comportamento deformabile per tutti i blocchi, con comportamento *rigido* dei contatti. Proposto da Shi e Goodman (1988) con riferimento a problemi di meccanica delle rocce, è stato successivamente applicato alle strutture murarie da Ma et al. (1996) e Bicanic et al. (2001).

Un confronto tra la metodologia agli elementi discreti implementata nel codice UDEC, e quelle agli elementi finiti non lineari, sia mediante tecniche di omogeneizzazione (ABAQUS) che mediante micromodellazione (Visual CASTEM 2000), è stato effettuato da Giordano et al. (2002). Sono state condotte analisi statiche non lineari su un edificio

storico, dimostrando la comparabilità dei risultati tra le metodologie proposte.

7.1. I Rigid Body Spring Models

Come già accennato in un altro paragrafo, Siro Casolo si è occupato di modellazione di edifici in muratura, formulando proposte nell'ambito del metodo agli elementi distinti. Inizialmente erano stati sviluppati dei modelli di calcolo per lo studio della muratura fuori dal proprio piano (2000), ma studi successivi hanno riguardato l'impiego dei *Rigid Body Spring Models* nello studio di strutture murarie.

Allo scopo di ridurre i gradi di libertà in gioco nella modellazione degli edifici in muratura, rispetto a quanto richiesto dal metodo agli elementi finiti, Casolo (2004) propose un modello semplificato per la simulazione del comportamento strutturale di pareti piane in muratura, che rientra nell'ambito dei *Rigid Body Spring Models (RBSM)*, basato su un semplice schema meccanico che, con opportune procedure di taratura, è in grado di cogliere il comportamento meccanico della muratura.

Per affinità con quanto proposto nella presente tesi, tale modello verrà di seguito descritto in maniera più approfondita. Casolo propone l'uso di elementi rigidi per la simulazione di pareti in muratura a tessitura regolare. Ciascun pannello murario è modellato mediante una mesh arbitraria di elementi rigidi piani di forma quadrata. Gli elementi sono connessi gli uni con gli altri da due molle ortogonali e una molla a taglio su ciascun lato dell'elemento. Le caratteristiche meccaniche gli elementi di connessione sono definiti tenendo in conto anche gli effetti della tessitura muraria: in particolare, la *rotazione locale* dei blocchi è ottenuta assegnando rigidezze diverse alle molle a taglio, secondo il loro orientamento, mentre la rigidezza flessionale è ottenuta disponendo in posizione appropriata le due molle ortogonali.

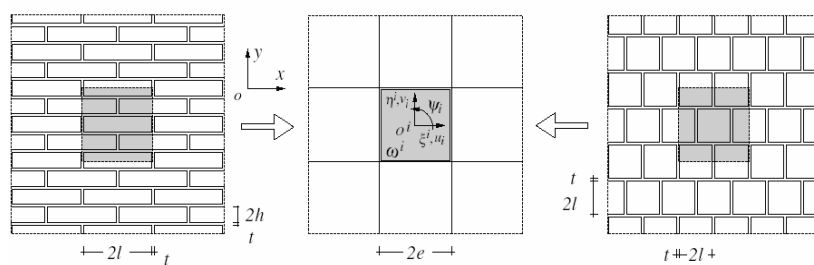


Figura 1.17. Schema del modello discreto proposto da Casolo, discretizzazione della muratura in una mesh regolare (Casolo, 2004)

Le molle flessionali orizzontali (k_x) e verticali (k_v) e le molle a scorrimento (k_s) vengono tarate imponendo una equivalenza di tipo energetico tra il modello discreto e un modello di dettaglio agli elementi finiti della cella elementare, soggetti entrambi a regimi di carico assiale in direzione parallela e ortogonale ai giunti di malta, a taglio e flessionale.

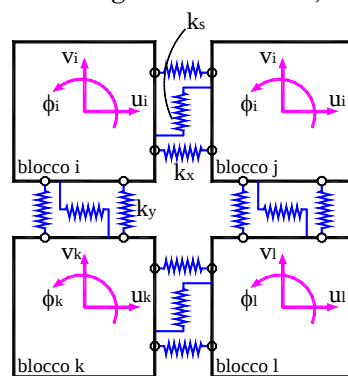


Figura 1.18. Schema del modello discreto proposto da Casolo, particolare del modulo base

In particolare le rigidezze delle molle flessionali vengono tarate con riferimento ai carichi di tipo assiale, le molle a scorrimento facendo riferimento al carico tagliante, ed infine mediante i carichi di tipo flettente vengono determinati gli interessi secondo cui disporre le molle flessionali.

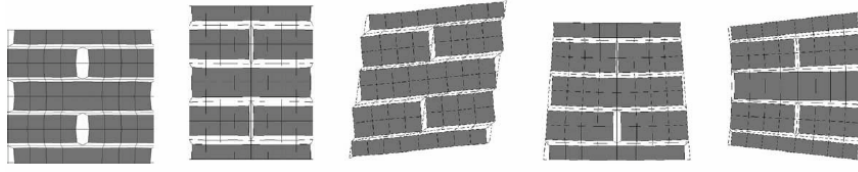


Figura 1.19. Stati di sollecitazione applicati alla cella elementare: compressione, trazione, taglio e stati di sollecitazione flessionali

Il tipo e la geometria della tessitura muraria intervengono così nella determinazione dei parametri meccanici degli elementi discreti condizionando il comportamento della cella elementare. In questo modo il modello discreto conserva una *memoria* della tessitura originale.

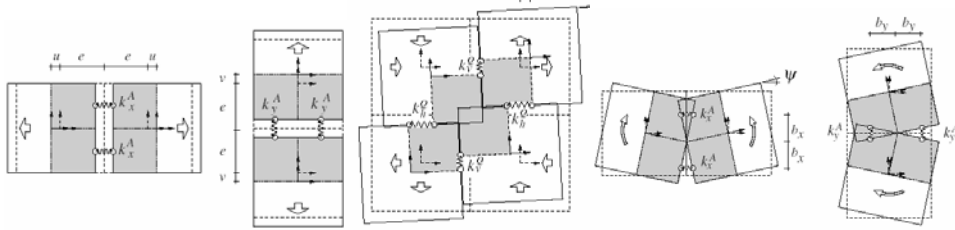


Figura 1.20. Stati di sollecitazione riprodotti dal modello discreto: compressione, trazione, taglio e stati di sollecitazione flessionali

Tale modello differisce in modo sostanziale dai comuni modelli agli elementi distinti e assume alcuni aspetti salienti di un modello agli elementi finiti, ad esempio l'utilizzo di elementi quadrati in sostituzione della reale disposizione degli elementi. Tuttavia conserva la caratteristica saliente di un modello agli elementi distinti che fa uso di elementi discreti.

Lo stesso Casolo (2006) ha inoltre condotto uno studio per valutare la corrispondenza tra il modello discreto che ha proposto e la classica teoria del continuo di Cosserat.

Il modello, inizialmente studiato in campo statico lineare, è stato successivamente esteso da Casolo e Peña (2007) anche al caso dinamico con comportamento isteretico. Il modello proposto da Casolo, visto l'esiguo numero di gradi di libertà necessari per la definizione della cinematica dell'elemento (tre gradi di libertà nel piano), si adatta perfet-

tamente all'impiego di analisi dinamiche, ed è suscettibile di estensioni poiché consente di separare fenomenologicamente i diversi meccanismi possibili (comportamento assiale delle molle ortogonali e quello a taglio) ma anche di metterli facilmente in relazione attraverso, ad esempio, il criterio di Mohr-Coulomb.

La modellazione per elementi rigidi, è stata applicata dallo stesso Casolo e Sanjust (2009), per lo studio del comportamento sismico di un edificio monumentale (il Castello Maniace presso Siracusa). Nello studio viene utilizzato un approccio 'ibrido'. È stato infatti inizialmente implementato un modello tridimensionale lineare agli elementi finiti dell'intero complesso strutturale. Una volta compreso il comportamento d'insieme e individuate le zone più deboli, è stato predisposto un modello piano RBSM di una parete allo scopo di valutarne la resistenza sismica mediante analisi statiche e dinamiche non lineari. Pur non essendo stata effettuata una modellazione globale dell'edificio tenendo conto del comportamento non lineare dello stesso, il lavoro rappresenta un significativo passo verso la simulazione del comportamento sismico di edifici in muratura (in particolare il caso di studio è un edificio monumentale) mediante approcci semplificati.

8. Analisi limite

L'analisi limite è stato uno dei primi metodi 'scientifici' impiegati per la valutazione della sicurezza di elementi strutturali. Sin dalla sua nascita, grande attenzione è stata riservata allo studio di strutture a geometria curva.

I primi tentativi finalizzati allo studio dell'equilibrio di cupole in muratura, ancora esclusivamente grafici, risalgono al XVIII secolo e sono dovuti a Bouguer (1734), Bossut (1778) e Mascheroni (1785), che fecero uso di semplici equazioni di equilibrio monodimensionali, trascurando il ruolo delle sollecitazioni circonferenziali. Una trattazione approfondita delle teorie sulle volte in muratura può essere trovata in un trattato di Benvenuto (1991).

Il padre della moderna analisi limite, così come è concepita attualmente, è Jacques Heyman, che diede per la prima volta un taglio scien-

tifico basato su ipotesi chiare alla valutazione del carico ultimo delle strutture murarie: il suo lavoro ha rappresentato l'impulso decisivo verso le moderne teorie dell'analisi limite.

L'analisi limite consiste nella valutazione del carico ultimo di una struttura sottoposta a certe condizioni, e si basa principalmente sull'assunzione che il comportamento meccanico dei materiali sia di tipo rigido-plastico. I metodi orientati all'applicazione dell'analisi limite consentono una valutazione del carico ultimo e del relativo meccanismo di collasso senza fornire informazioni sulla storia dello stesso (Massonet e Save, 1980). Il vantaggio dell'applicazione di questa metodologia, come evidenziato da Suquet (1983), consiste nella possibilità di ottenere informazioni significative sul collasso della struttura, impiegando un numero di parametri meccanici dei materiali ridotto rispetto alle analisi strutturali.

Applicazioni interessanti di questa teoria sono state per tanti anni limitate al caso piano e a settori dell'ingegneria non direttamente riguardanti le strutture in muratura. In particolare, molte applicazioni riguardano problemi geotecnici come la stabilità dei pendii (Sloan, 1988) e le terre armate (Yu e Sloan, 1997).

Le applicazioni nel campo delle strutture murarie si sono sviluppate in accordo a due principali approcci: uno basato sull'estensione di tradizionali metodi grafici, che mirano alla determinazione della *linea delle pressioni* su strutture discretizzate a blocchi (Block et al., 2006), l'altro basato sui teoremi dell'analisi limite e che fa uso della *programmazione lineare*. Con riferimento a quest'ultimo approccio è possibile classificare le metodologie in letteratura secondo due diversi criteri:

- un primo criterio, coerentemente con quanto osservato per il metodo agli elementi finiti, considera la distinzione tra modelli continui e modelli disomogenei;
- il secondo criterio considera la distinzione tra gli approcci tenendo conto del livello di scala degli elementi.

La suddivisione in modelli disomogenei e continui distingue tra i modelli che tendono ad attribuire delle proprietà meccaniche differenti ai materiali componenti la tessitura muraria (malta e mattoni), e quelli

che si avvalgono di tecniche di omogeneizzazione per definire delle proprietà equivalenti del complesso malta-mattone.

Tra le tecniche che modellano esplicitamente mattoni e giunti di malta una delle più significative è quella dovuta a Sutcliffe et al. (2001), che si avvale di legami costitutivi alla Mohr-Coulomb.

Tuttavia, l'impiego dell'analisi limite per strutture in muratura ha subito posto l'ostacolo della simulazione del comportamento tridimensionale della muratura, includendo cioè i meccanismi di primo modo nella valutazione del comportamento della muratura. Nonostante molti studi abbiano riguardato il semplice comportamento piano della muratura (e.g. Gilbert et al., 2006), buona parte degli sforzi sono stati spesi nella direzione della definizione di adeguate procedure di simulazione dell'interazione malta-mattone fuori piano. In particolare appaiono significativi i lavori di Baggio e Trovalusci (1998), Casapulla e D'Ayala (2001).

Le recenti tendenze in materia di analisi limite applicate alle strutture in muratura mirano alla valutazione del carico ultimo di strutture per le quali è necessario l'impiego di legami costitutivi più sofisticati, come le murature armate (Roca et al., 2007) e quelle rinforzate con FRP (Milani, 2009), o di strutture complesse dal punto di vista geometrico, come quelle a geometria curva (Milani et al., 2008).

Il secondo criterio per la classificazione dei metodi dell'analisi limite prevede la distinzione tra un primo approccio, più tradizionale e di facile applicazione (denominato nel seguito *per macroblocchi*) che consiste nell'ipotizzare un congruo numero di meccanismi di collasso plausibili che coinvolgono l'intera struttura o parti di essa, e nel ricavare i relativi moltiplicatori cinematici, il minore dei quali viene assunto come il reale moltiplicatore di collasso; il secondo approccio (denominato nel seguito *analisi limite di dettaglio*) consiste nel discretizzare la struttura mediante una mesh di elementi attraverso l'utilizzo di elementi finiti o elementi discreti, e nel valutare il moltiplicatore ultimo dei carichi e il relativo meccanismo di collasso risolvendo un problema di ottimizzazione matematica. Questo secondo modo di procedere permette quindi di svincolarsi dalla necessità di ipotizzare a priori un meccanismo di collasso e

permette di determinare la distribuzione delle tensioni al collasso con un buon livello di dettaglio.

8.1. Analisi limite per macro-blocchi

L'analisi limite per macro-blocchi prevede che la muratura venga modellata come un insieme di corpi rigidi (macro-blocchi), liberi di ruotare attorno a delle cerniere cilindriche la cui distribuzione risulta nota non appena viene ipotizzato il meccanismo di collasso.

I carichi agenti si possono suddividere in carichi stabilizzanti, rappresentati dai pesi propri più i sovraccarichi, e in carichi ribaltanti, rappresentati dalle forze orizzontali supposte proporzionali ai pesi propri e portati, e applicate in corrispondenza dei baricentri dei macro-blocchi.

Il rischio nell'impiego di questa procedura è che non si stia contemplando il reale meccanismo di collasso con una conseguente sovrastima del carico ultimo della struttura.

La procedura è estremamente semplificata, tuttavia essa può costituire in tante circostanze un utile strumento di verifica dei risultati ottenuti con altri metodi più evoluti ed evitare così errori grossolani. In altri contesti (edilizia monumentale o murature storiche) essa può rappresentare l'unica procedura applicabile a causa della complessità geometrica che impedisce l'impiego di tecniche più accurate. L'analisi limite per macro-blocchi è, pertanto, il metodo più semplice per eseguire delle valutazioni di vulnerabilità sismica nei confronti nei meccanismi di primo modo.

L'aspetto più delicato nell'applicazione del metodo consiste nell'individuazione dei potenziali meccanismi di collasso dell'intera struttura, che sono ottenuti combinando i meccanismi di collasso elementari dei singoli elementi murari.

Nel seguito vengono riportati alcuni esempi relativi all'applicazione dell'analisi limite per la determinazione del moltiplicatore di collasso associato ai cinematismi che interessano le pareti nel proprio piano e fuori-piano.

Meccanismo a mensole indipendenti: le fasce di piano giungono a rottura e i maschi murari allineati verticalmente si comportano come un'unica mensola. L'accoppiamento delle mensole è garantito dalla capacità di trasferire sforzo normale da parte delle fasce, come mostrato in figura. Un meccanismo del genere approssima bene il comportamento ultimo di pareti in cui le fasce raggiungono la rottura per taglio prima dei maschi.

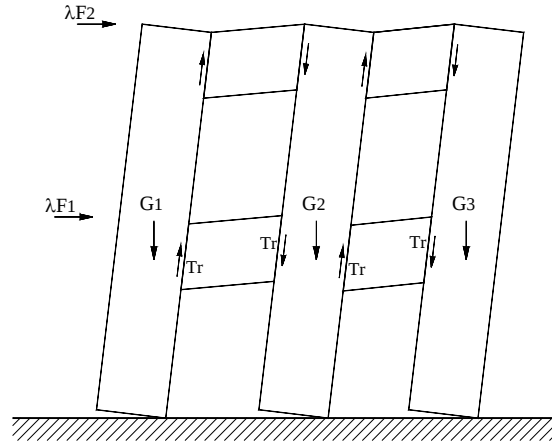


Figura 1.21. Meccanismo di collasso per ribaltamento delle mensole murarie

Supponendo che le fasce in condizioni ultime riescano a trasmettere un taglio residuo (T_r) e imponendo l'equilibrio limite, si ha

$$\lambda \cdot \sum_{n=1}^{n_p} F_n \cdot h_n = \sum_{i=1}^{n_m} \left(G_i \cdot \frac{b_i}{2} + b_i \cdot \left(\sum_{n=1}^{n_p} T_{ri}^n \right) \right) = M_{stabilizzante}$$

$$\lambda = \frac{M_{stabilizzante}}{\sum_{n=1}^{n_p} F_n \cdot h_n}$$

dove sono state fatte le seguenti assunzioni:

- F_n è la forza corrispondente all' n -esimo impalcato;
- h_n è la quota dell' n -esimo impalcato;
- n_p è il numero di impalcati;
- G_i è il peso dell' i -esima mensola;
- b_i è la larghezza dell' i -esima mensola;
- n_m è il numero di mensole;

- T_{ri} è il taglio trasmesso all' i -esima mensola dalla fascia del piano n -esimo.

Ribaltamento dei maschi murari di un piano: tutti i maschi murari di un piano ribaltano rigidamente. Se i maschi hanno tutti le stesse dimensioni, si può ammettere che le fasce si mantengano integre (come mostrato in figura), altrimenti si deve contemplare una rottura a taglio delle stesse per garantire la congruenza degli spostamenti verticali, considerato che tutti i maschi devono subire lo stesso spostamento orizzontale.

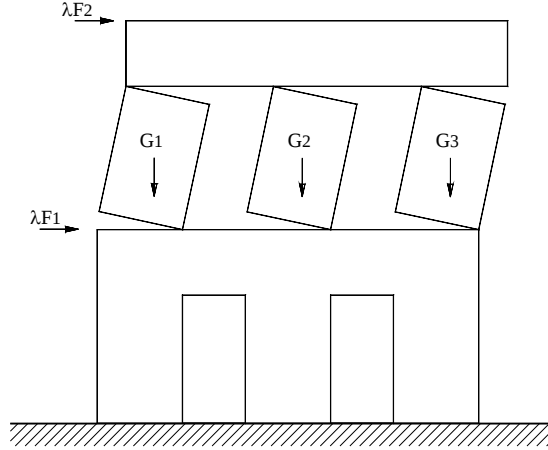


Figura 1.22. Meccanismo di collasso per ribaltamento di tutti i maschi murari appartenenti ad un piano

$$\lambda \cdot \sum_{n=n^*}^{n_p} F_n \cdot \Delta h_n = \sum_{i=1}^{n_m} \left(G_i \cdot \frac{b_i}{2} + N_i \cdot b_i \right) = M_{stabilizzante}$$

$$\lambda = \frac{M_{stabilizzante}}{\sum_{n=n^*}^{n_p} F_n \cdot \Delta h_n}$$

dove sono state fatte le seguenti assunzioni:

- n^* è il piano in corrispondenza del quale si sta concentrando il meccanismo di collasso;
- Δh_n è la differenza tra la quota del piano n -esimo e quella del piano n^* ;
- n_p è il numero di piani;

- n_i è il numero di maschi al piano n^* ;
- G_i è il peso dei maschi;
- b_i è il peso dei maschi;
- N_i è lo scarico verticale sull' i -esimo maschio.

Rottura diagonale e ribaltamento dei maschi murari di un piano: un elemento murario tozzo manifesta generalmente una modalità di collasso per fessurazione diagonale, la cui inclinazione non è a priori ipotizzabile, e solo una porzione di esso subisce il ribaltamento, come mostrato in figura.

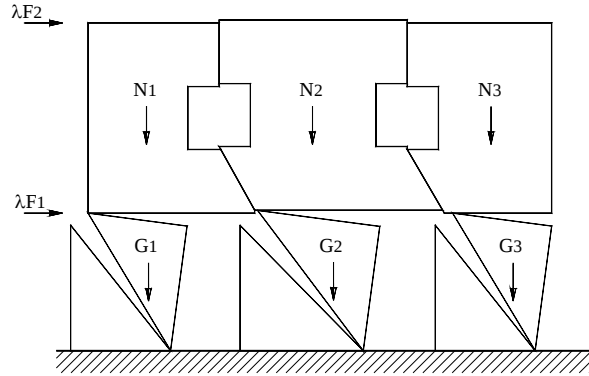


Figura 1.23. Meccanismo di collasso per ribaltamento delle mensole murarie

L'espressione del moltiplicatore di collasso dei carichi è del tutto analoga al caso precedente, a meno dei termini G_i , che stavolta indicano il peso delle porzioni di maschi che ruotano e non il peso totale.

$$\lambda \cdot \sum_{n=n^*}^{n_p} F_n \cdot \Delta h_n = \sum_{i=1}^{n_m} \left(G_i \cdot \frac{b_i}{2} + N_i \cdot b_i \right) = M_{\text{stabilizzante}}$$

$$\lambda = \frac{M_{\text{stabilizzante}}}{\sum_{n=n^*}^{n_p} F_n \cdot \Delta h_n}$$

Nell'esempio proposto, si è supposto che i maschi si fessurino lungo la diagonale, tuttavia andrebbe verificato il moltiplicatore dei carichi associato alla fessurazione diagonale con inclinazioni diverse. Il modo corretto di procedere per determinare il moltiplicatore relativo a tale meccanismo è quello di mantenere l'inclinazione (α) della fessura gene-

rica e calcolare $\lambda=\lambda(\alpha)$. Il moltiplicatore e la direzione corretti saranno quelli per cui tale funzione ha un minimo.

Al variare dell'angolo α da 0° a 90° , se la fessura interseca il lato verticale del maschio, l'espressione del moltiplicatore dei carichi va modificata relativamente ai termini G_i e ai corrispondenti bracci che generano i momenti stabilizzanti. Se invece la fessura interseca la sezione superiore del maschio, il contributo relativo agli scarichi N_i andrà modificato.

L'analisi limite viene applicata soprattutto con riferimento ai meccanismi di collasso di primo modo. In questo contesto l'utilizzo del metodo dell'analisi limite per macro-blocchi rappresenta lo strumento più diffuso per la valutazione di tali meccanismi. Alcune proposte nell'ambito dell'analisi limite per macro-blocchi sono dovute a Cavaleri et al. (1999), Lagomarsino et al. (2000, 2001, 2002a-b, 2005), Irizarry et al. (2002) Podestà et al. (2005).

Le figure sottostanti, tratte da Giuffrè (1993), mostrano come si può giungere all'individuazione dei più probabili meccanismi di collasso, sfruttando l'osservazione del quadro fessurativo.

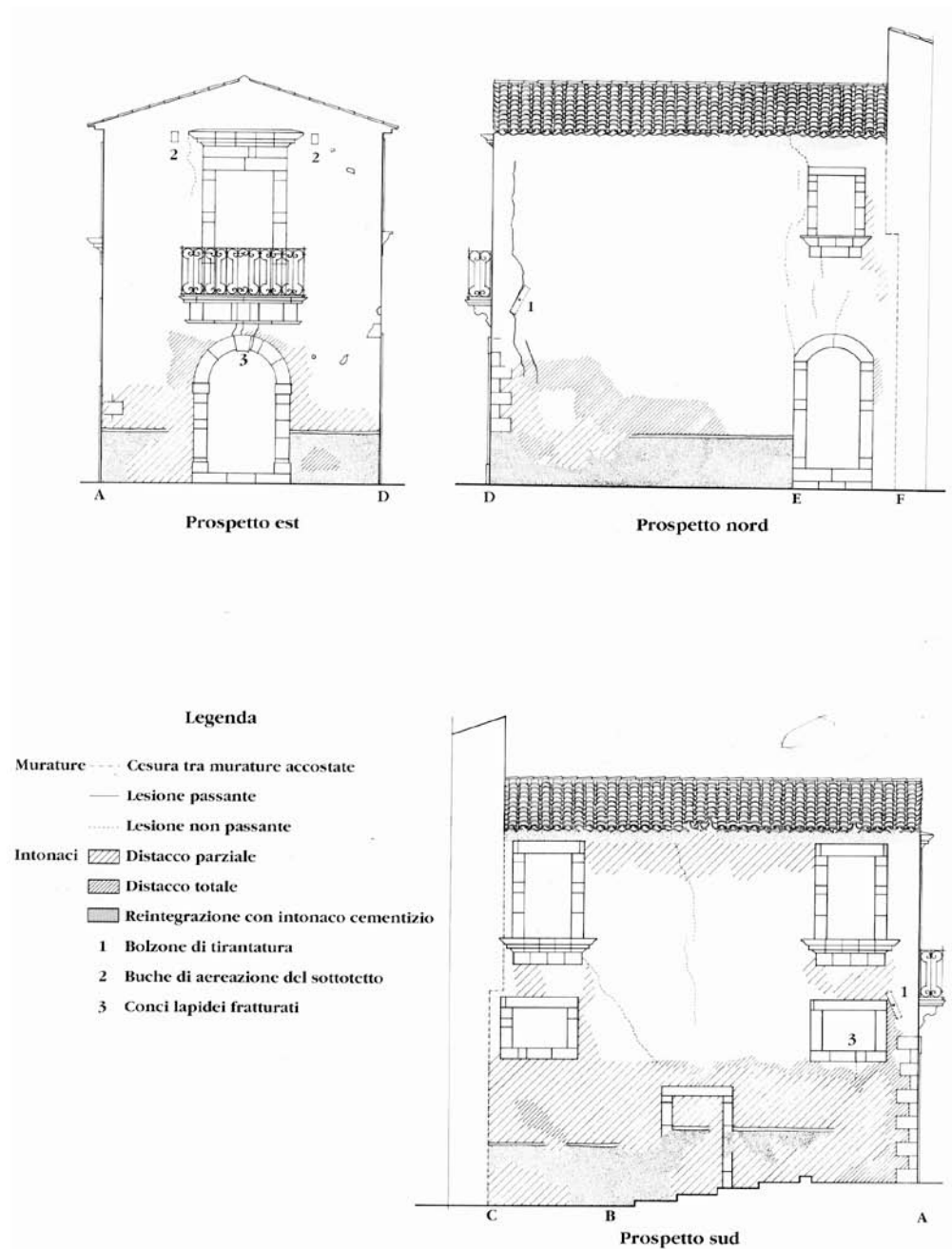


Figura 1.24. Rilievo di un quadro fessurativo (Giuffrè, 1993)

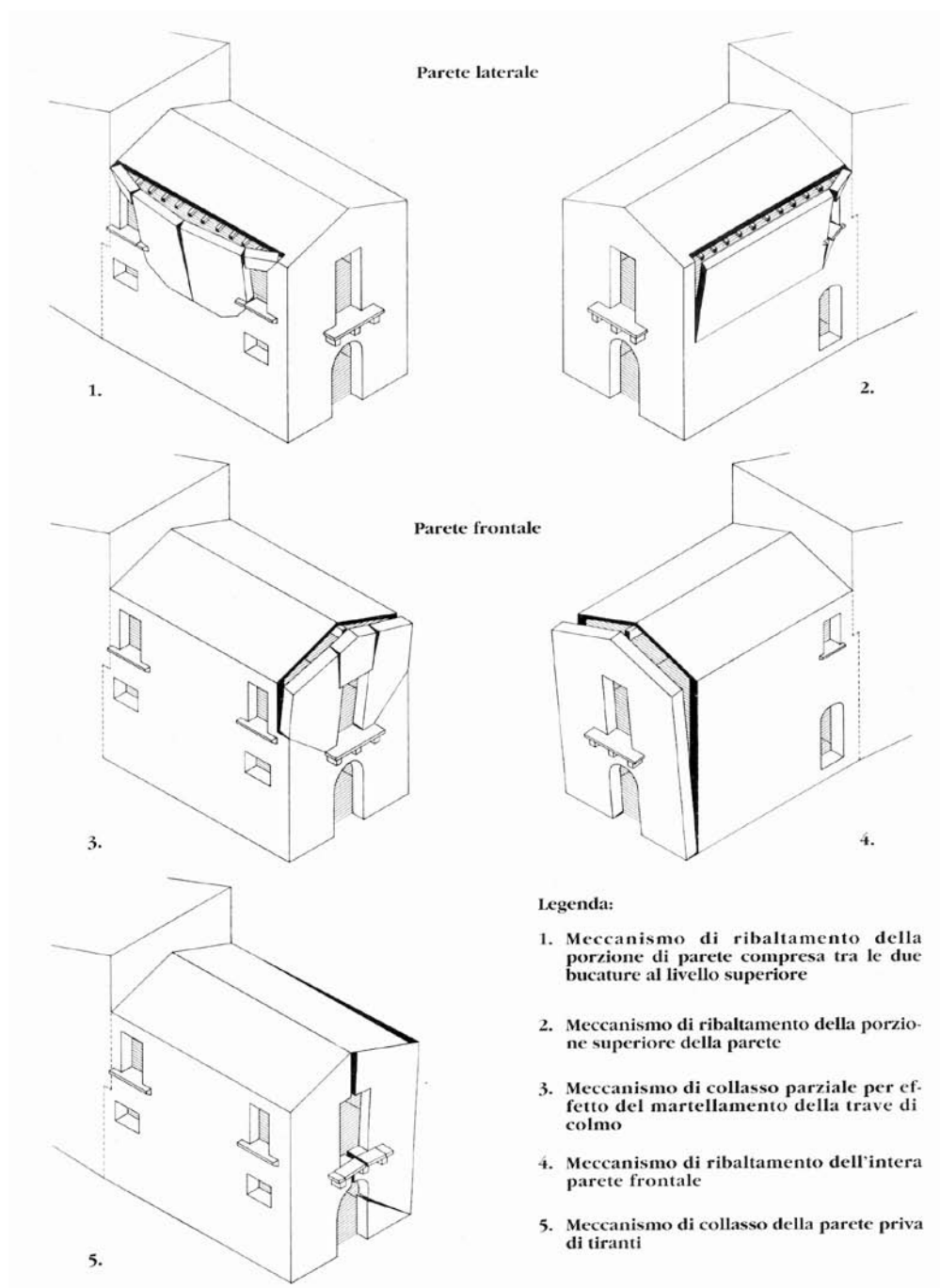


Figura 1.25. Individuazione dei meccanismi di collasso (Giuffrè, 1993)

8.2. Analisi limite di dettaglio

L'analisi limite di dettaglio consiste nell'applicare il metodo dell'analisi limite tenendo conto della possibilità di apertura delle fessure e di possibili scorrimenti tra i conci murari lungo i giunti di malta. Dalla risoluzione di un problema di *ottimizzazione matematica non lineare* si giunge alla determinazione del moltiplicatore ultimo dei carichi, del meccanismo di collasso e della distribuzione delle tensioni a collasso.

Esempi di questo tipo si possono trovare nei lavori di Orduña e Lourenço (2003, 2005a, 2005b) in cui tale metodo viene applicato allo studio di pannelli murari caricati nel proprio piano e fuoripiano.

Molti autori, sfruttando le tecniche di omogeneizzazione formulate per il metodo agli elementi finiti, hanno proposto alcuni modelli per la valutazione del carico ultimo di strutture in muratura, considerandone sia il comportamento nel piano (Milani et al., 2006a e 2006b), che quello fuori piano (Milani et al., 2006c, Cecchi et al. 2007). Nel caso della valutazione del comportamento fuori piano è necessario effettuare un'analisi del comportamento della piastra tenendo conto del suo spessore, spesso facendo ricorso alla formulazione di Reissner e Mindlin. Con questa tecnica, proposta inizialmente per piccole strutture, è stato possibile spingersi fino alla valutazione della risposta di interi edifici sottoposti a carichi orizzontali (Milani et al., 2007).

Le questioni connesse alla risoluzione di problemi di ottimizzazione non lineare in presenza di fonti di non linearità quali softening (De Saxcé, 1998) sono ancor oggi oggetto di numerosi studi specifici.

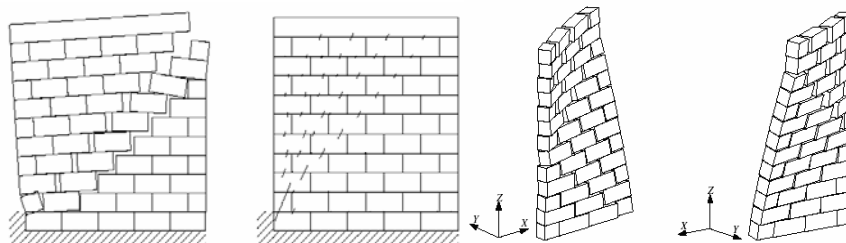


Figura 1.26. Analisi limite applicata a modelli discreti sia sollecitati nel piano, che fuori piano (da Orduña e Lourenço, 2005b)

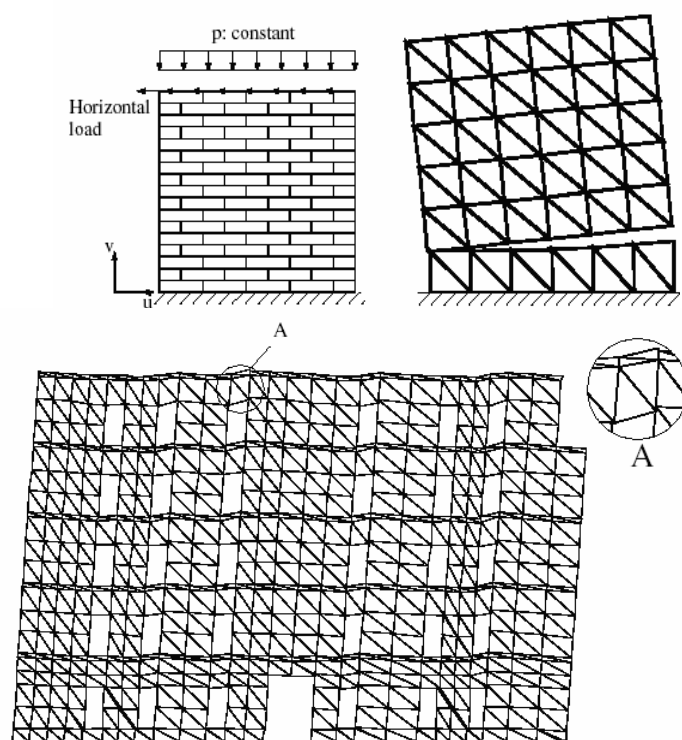


Figura 1.27. Analisi limite applicata a modelli continui, pannelli murari e parete piana appartenente ad un edificio (da Milani et al., 2006b)

8.3. Modello di Milani et al. per superfici curve

Una delle proposte più significative degli ultimi anni è quella dovuta a Milani et al. (2008), che avanzano un approccio per la valutazione del carico limite di strutture murarie a geometria curva. Negli anni precedenti lo stesso team di ricercatori aveva formulato delle significative proposte per la valutazione del carico ultimo di strutture murarie caricate sia nel proprio piano che fuori piano, giungendo anche alla valutazione del carico ultimo di interi edifici in muratura.

Nel lavoro per lo studio delle volte murarie, gli autori prendono spunto dai loro precedenti articoli e lo estendono al caso di shell curve, in accordo con una procedura di omogeneizzazione agli elementi finiti.

La dissipazione plastica nelle interfacce tra elementi contigui può avvenire come combinazione di diverse caratteristiche della sollecitazione: momento flettente, torsione, taglio fuori piano.

È assunta l'ipotesi di comportamento di piastra spessa alla Reissner-Mindlin, che rappresenta il più semplice modello di piastra tra quelli che tengono conto della deformabilità a taglio. Le teorie di Reissner-Mindlin è basata sulle seguenti ipotesi e assunzioni cinematiche:

- spessore costante h della piastra;
- la generica fibra trasversale di lunghezza h subisce un atto di moto rigido caratterizzato da una velocità di traslazione trasversale $v(x)$ pari a quella del suo punto medio $x \in \Pi$, piano della lastra, e da un atto di rotazione rigida di tipo flessionale con vettore assiale $\omega(x) \in \Pi$.

Gli autori propongono una tecnica di omogeneizzazione rigorosa basata su una cella per la quale viene univocamente individuato un sistema di riferimento locale a partire da una terna di versori locali ottenuti come segue:

- y_1 parallelo al versore $\underline{r}$ che individua la direzione ortogonale al primo piano principale di curvatura;
- y_2 parallelo al versore $\underline{s}$ che individua la direzione ortogonale al secondo piano principale di curvatura;
- y_3 che individua la normale alla superficie voltata in corrispondenza della superficie media.

Gli autori introducono delle grandezze medie macroscopiche rappresentative delle sollecitazioni membranali ($\mathbf{N}$) e dei corrispondenti tensori di deformazione ($\mathbf{E}$), delle sollecitazioni flettenti ($\mathbf{M}$) e dei tensori di curvatura ($\boldsymbol{\chi}$), e delle sollecitazioni a taglio e scorrimento fuori piano ($\mathbf{T}_3$) e dei corrispondenti tensori di deformazione ($\mathbf{I}_3$). Tali grandezze sono ottenute integrando su tutto il volume dell'elemento le grandezze locali. Si ha pertanto:

$$\mathbf{E} = [E_{ij}] = \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) dV \quad (i, j = 1, 2)$$

$$\mathbf{N}/t = \left[\frac{N_{ij}}{t} \right] = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} dV \quad (i, j = 1, 2)$$

$$\boldsymbol{\chi} = [\chi_{ij}] = \left\langle \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \mathbf{y}} \right\rangle = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{y}} dV \quad (i, j = 1, 2)$$

$$\mathbf{M} = [M_{ij}] = \langle \boldsymbol{\sigma} y_3 \rangle = \frac{1}{V} \int_V \boldsymbol{\sigma} y_3 dV \quad (i, j = 1, 2)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_3 = [\gamma_3] = \left\langle \left| \frac{\partial u_3}{\partial y_1} + \frac{\partial u_1}{\partial y_3}; \frac{\partial u_3}{\partial y_2} + \frac{\partial u_2}{\partial y_3} \right| \right\rangle = \frac{1}{V} \int_V \gamma_3 dV$$

$$\mathbf{T}_3/t = [\tau_3] = \langle |\boldsymbol{\sigma}_{13}; \boldsymbol{\sigma}_{23}| \rangle = \frac{1}{V} \int_V \tau_3 dV$$

dove

- V è il volume della cella;
- $\mathbf{y}$ indica la posizione di un punto della cella elementare nel sistema di riferimento locale;
- t è lo spessore;
- $\mathbf{u}$ è il vettore degli spostamenti;
- $\boldsymbol{\varepsilon}$ e $\boldsymbol{\sigma}$ sono rispettivamente tensioni e deformazioni locali;
- $\langle * \rangle$ è l'operatore *media*.

Gli autori propongono l'impiego di un elemento rigido triangolare a sei nodi, per il quale sono possibili discontinuità nelle velocità lungo i suoi lati, cioè lungo le interfacce che lo connettono con gli elementi contigui.

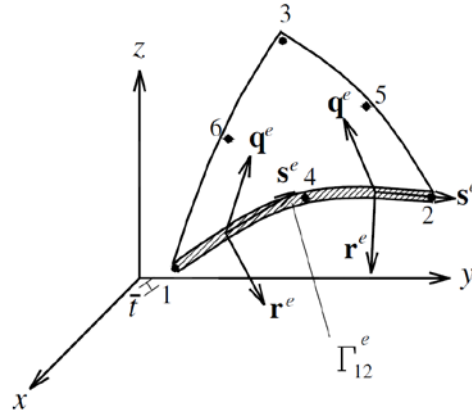


Figura 1.28. Elemento curvo a sei nodi e indicazione del sistema di riferimento curvilineo locale (da Milani et al., 2008)

Sono pertanto le interfacce gli elementi all'interno delle quali si concentra la dissipazione plastica. Tali elementi sono individuati sulla superficie media del solido murario, quindi in generale l'asse dell'interfaccia traccia una curva nello spazio. Al fine di determinare le coordinate spaziali di ciascun punto dell'interfaccia e i tre versori del sistema di riferimento curvilineo locale dell'elemento, vengono introdotti due parametri t e p che consentono di stabilire una corrispondenza biunivoca tra un sistema di riferimento in coordinate intrinseche, e ciascun punto dell'elemento. Ad esempio, per l'interfaccia corrispondente al lato 1-4-2, lungo il quale si ha $p=0$, le coordinate cartesiane del generico punto sono date da:

$$P = P(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} x(t) = x_{p1} + (-3x_{p1} - x_{p2} + 4x_{p4})t + 2[(x_{p1} + x_{p2}) - 2x_{p4}]t^2 \\ y(t) = y_{p1} + (-3y_{p1} - y_{p2} + 4y_{p4})t + 2[(y_{p1} + y_{p2}) - 2y_{p4}]t^2 \\ z(t) = z_{p1} + (-3z_{p1} - z_{p2} + 4z_{p4})t + 2[(z_{p1} + z_{p2}) - 2z_{p4}]t^2 \end{cases}$$

mentre la terna dei versori del sistema di riferimento curvilineo locale è data, per ciascun punto appartenente al lato 1-2, da

$$\mathbf{r}^e = -(\partial P / \partial t) / \|\partial P / \partial t\| \times (\partial P / \partial p) / \|\partial P / \partial p\|$$

$$\mathbf{s}^e = \frac{dP(t)}{dt} / \left\| \frac{dP(t)}{dt} \right\|$$

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{s}^e \times \mathbf{r}^e$$

È allora possibile introdurre un vettore $\mathbf{t}^I$ delle sollecitazioni dell'interfaccia definito come

$$\mathbf{t}^{I^T} = [N_{qq}^I \quad N_{ss}^I \quad M_{nn}^I \quad M_{nt}^I \quad T_{rr}^I]$$

costituito dalle azioni membranali lungo gli assi locali $\mathbf{q}^e$ (N_{qq}^I) e $\mathbf{s}^e$ (N_{ss}^I), dal momento flettente (M_{nn}^I), dalla torsione (M_{nt}^I) e dal taglio fuori piano (T_{rr}^I). Una rappresentazione delle sollecitazioni è riportata nella figura sottostante.

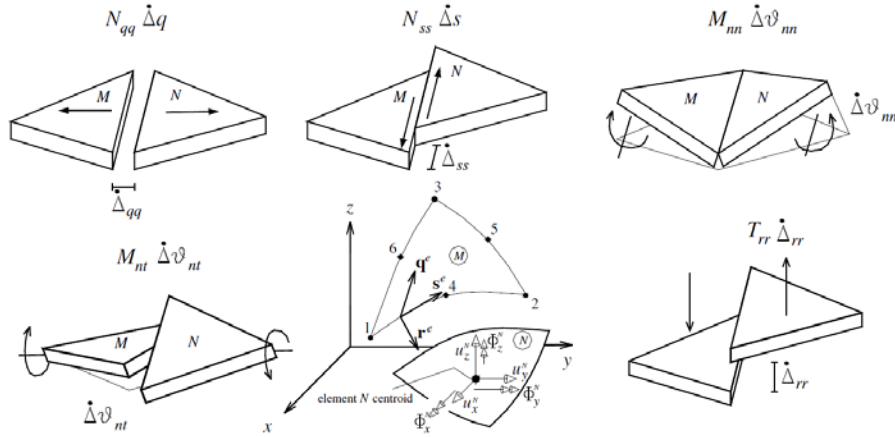


Figura 1.29. Sollecitazioni agenti sull'elemento curvilineo triangolare (da Milani et al., 2008)

Il dominio di resistenza S_{hom} del materiale macroscopico omogeneizzato può essere espresso nella seguente forma:

$$S^{\text{hom}} \equiv \begin{cases} \lambda = \min_{v^{\text{per}}, \dot{\tilde{E}}, \dot{\tilde{\chi}}, \dot{\tilde{F}}} \frac{1}{V} \int_Y P(\dot{\mathbf{d}}) dV & \dot{d}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial y_j} + \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \right) \\ N^0 : \dot{\tilde{E}} + M^0 : \dot{\tilde{\chi}} + T^0 : \dot{\tilde{F}} = 1 \\ \mathbf{v} = \dot{\tilde{E}} \mathbf{y} \mathbf{y}^T + \dot{\tilde{\chi}}_3 \mathbf{y} + \dot{\tilde{v}}_{\text{per}} \end{cases}$$

dove

- λ è il moltiplicatore cinematico delle sollecitazioni macroscopiche assegnate;
- $\dot{\tilde{E}}$ è il campo degli incrementi macroscopici di deformazione;
- $\dot{\tilde{\chi}}$ è il campo degli incrementi macroscopici di curvatura;
- $\dot{\tilde{F}}$ è il campo degli incrementi macroscopici di scorrimento fuori piano;
- M^0, N^0, T^0 sono rispettivamente le azioni flettenti, membranali e a taglio fuori piano unitari, indicando solo la direzione nel dominio di resistenza per la quale λ è calcolato;
- $\mathbf{v}$ è il campo delle velocità,
- $\mathbf{v}_{\text{per}}$ è il campo delle velocità periodiche;
- $P(\dot{\mathbf{d}})$ è la potenza dissipata nella cella elementare;
- $\dot{\mathbf{d}}$ è il campo degli incrementi delle micro-deformazioni.

Per ciascuna interfaccia si indichi con L_{ij} la sua lunghezza, dove i e j sono gli indici dei nodi di estremità. Si supponga di disporre del dominio di resistenza omogeneizzato dell'interfaccia e linearizzato mediante m^I piani. Il generico piano di linearizzazione q^I avrà un'equazione del tipo

$$A_{qq}^{q^I} N_{qq}^I + A_{ss}^{q^I} N_{ss}^I + B_{nn}^{q^I} M_{nn}^I + B_{nt}^{q^I} M_{nt}^I + A_{rr}^{q^I} T_{rr}^I = C_I^{q^I}$$

Al fine di ridurre il costo computazionale e di consentire l'elaborazione di complesse analisi tridimensionali, la dissipazione plastica, con riferimento all'interfaccia tra i nodi 1 e 2, viene posta nella forma

$$P^I = \sum_{q^I}^{m^I} \left(W_1 \dot{\lambda}_{q^I}^{I,1} + W_4 \dot{\lambda}_{q^I}^{I,4} + W_2 \dot{\lambda}_{q^I}^{I,2} \right) C_I^{q^I}$$

essendo

- $W_1=W_2=L_{12}/6$;
- $W_4=2L_{12}/3$;
- $\dot{\lambda}_{q^I}^{I,i}$ è l'incremento del moltiplicatore plastico relativo all'interfaccia I , associato alla linearizzazione della superficie di resistenza condotta col piano q^I , relativo al punto i dell'elemento.

La potenza esterna dissipata può essere scritta come

$$p^{ex} = \left(\mathbf{P}_0^T + \lambda \mathbf{P}_1^T \right) \mathbf{w}$$

con

- $\mathbf{P}_0^T$ vettore dei carichi permanenti;
- λ moltiplicatore dei carichi per la struttura considerata;
- $\mathbf{P}_1^T$ vettore dei carichi variabili;
- $\mathbf{w}$ vettore delle velocità dell'elemento triangolare.

Il problema di programmazione lineare da risolvere al fine di ottenere il moltiplicatore dei carichi che porta al collasso la struttura la minimizzazione di una funzione obiettivo assunta come la differenza tra la potenza totale interna dissipata e la potenza esterna dissipata dai carichi permanenti. In notazione matematica si ha:

$$\begin{cases} \min \left\{ \mathbf{P}_0^T \dot{\lambda}^{I,ass} - \mathbf{P}_1^T \dot{\lambda}^{I,ass} \mathbf{w}_0^T \right\} \\ \text{con} \quad \begin{cases} \mathbf{A}^{eq} \mathbf{U} = \mathbf{b}^{eq} \\ \dot{\lambda}^{I,ass} \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

dove

- $\mathbf{U}$ è il vettore delle incognite globali che comprende il vettore delle velocità ($\mathbf{w}$) e delle rotazioni ($\boldsymbol{\Phi}$) degli elementi, e il vettore degli incrementi di moltiplicatore plastico delle interfacce ($\dot{\lambda}^{I,ass}$);
- $\mathbf{A}^{eq}$ è la matrice dei vincoli e contiene le condizioni di normalizzazione, le condizioni al contorno della velocità, e le leggi del flusso plastico;

- $\mathbf{P}_I^{in,ass}$ contiene i coefficienti $W_i C_I^{q_i}$ di tutte le interfacce.

Il modello è stato applicato su piccole strutture (volte a botte, a crociera e sferiche) testate sperimentalmente, ottenendo buon accordo di risultati. Inoltre sono state eseguite analisi di sensitività valutando la sensibilità del modello alla mesh e ai parametri costitutivi del materiale. Analisi per macro-elementi

Dall'osservazione che alcuni elementi strutturali si ritrovano in maniera ricorrente negli edifici storici (in particolare quelli di culto), deriva la definizione di *macro-elemento* utilizzata da alcuni autori e introdotta da De Luca (2004). Numerose ricognizioni su edifici storici a seguito eventi sismici hanno dimostrato la particolare vulnerabilità di alcune tipologie di tali macro-elementi che hanno riportato i danni più severi.

Alcuni autori, che osservano come gli edifici storici possano spesso essere visti come assemblaggio di macro-porzioni più semplici, propongono di scomporli in macro-elementi al fine di semplificarne la geometria, e di razionalizzare la valutazione della resistenza.

Lo studio di tali macro-elementi, condotto per mezzo dell'analisi limite (sotto le ipotesi di Heyman), è basato sull'identificazione dei potenziali meccanismi di collasso, e sulla valutazione semplificata del carico ultimo che li porterebbe al collasso.

Gli studi sono validati da confronti con codici agli elementi finiti, e sono quindi estesi a geometrie diverse in modo da fornire un utile strumento semplificato per la valutazione della resistenza di queste tipologie strutturali.

Con tale metodologia sono stati studiati sia gli archi (De Luca, 2004), che i portali in muratura (De Luca, 2007).

9. Approcci semplificati

Gli approcci semplificati per la modellazione di edifici in muratura mirano ad una sostanziale riduzione dell'onere computazionale essendo basati su una modellazione discreta in cui l'elemento base è concepito per modellare, secondo un approccio semplificato, una porzione finita di muratura che può anche rappresentare un intero maschio murario e/o una fascia di piano.

La definizione di *macro-elemento* per indicare ciascuno di questi elementi è quindi significativamente diversa da quella introdotta da De Luca per indicare intere porzioni di edificio (archi trionfali, portali, ecc.).

L'intera struttura viene ottenuta per assemblaggio di macro-elementi e si ottiene così un modello globale dell'edificio su cui possono essere effettuate analisi statiche e dinamiche non-lineari. Il principale vantaggio che offre tale approccio è quello di ridurre considerevolmente l'onere computazionale dell'analisi rispetto alla modellazione agli elementi finiti, in quanto viene sostanzialmente ridotto il numero dei gradi di libertà ed inoltre il comportamento non lineare dell'elemento base viene generalmente descritto mediante legami costitutivi definiti in ambito mono-dimensionale.

Tutti i parametri che caratterizzano un macro-elemento sono da intendersi come grandezze medie, l'informazione di ciò che avviene localmente all'interno della porzione di struttura rappresenta una grandezza generalizzata.

Le maggiori difficoltà che si riscontrano nello sviluppo di un modello a macro-elementi (o macromodello) risiedono nelle procedure di taratura dei parametri che lo caratterizzano, specialmente se questi non hanno un significato fisico immediato o se risentono dell'influenza di diversi fattori.

Nell'ambito dello studio del comportamento sismico di edifici in muratura a comportamento scatolare, allo stato attuale, questo approccio sembra quello ottimale, in quanto consente di ottenere modelli più raffinati rispetto alla schematizzazione di tipo POR, e nel contempo evita di ricorrere all'utilizzo eccessivamente laborioso degli elementi finiti e quindi alla definizione di un legame costitutivo locale per la muratura, operazione questa che risulta essere molto onerosa a causa del comportamento non-lineare e alla presenza di stati tensionali pluriassiali.

Diversi autori hanno sviluppato macro-modelli, sia a geometria fissa che variabile, capaci di rappresentare un intero pannello murario. Nell'ambito dei macro-modelli è possibile fare un'ulteriore importante distinzione tra:

- *modelli a telaio;*

- *modelli piani.*

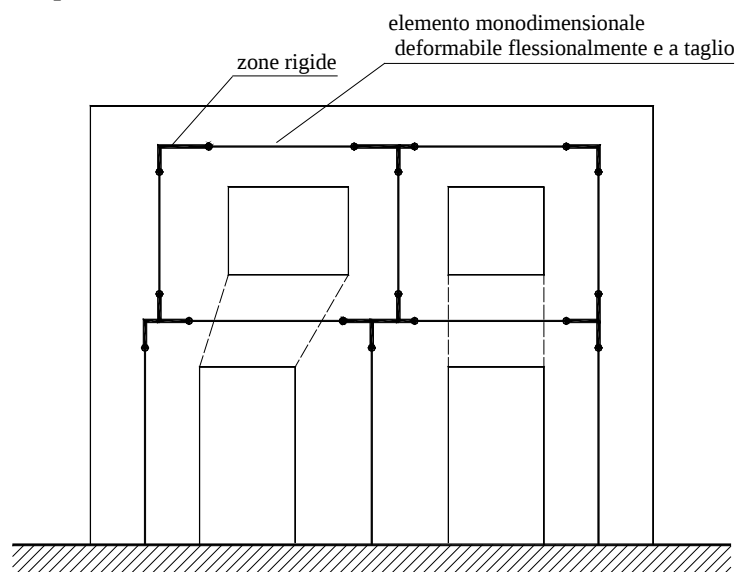


Figura 1.30. Schema tipico di un telaio equivalente alla muratura

I modelli a telaio costituiscono una importante categoria e hanno avuto origine dal pionieristico metodo POR descritto nel seguito. Nei modelli a telaio ogni parete muraria dell'edificio viene schematizzata attraverso un telaio equivalente costituito da elementi rigidi connessi ad aste il cui legame costitutivo è non lineare.

Tali metodi si applicano a strutture murarie con distribuzione regolare di aperture, in cui sono facilmente riconoscibili i maschi murari collegati a fasce di piano tramite una porzione di muratura compresa tra i due. Sia i maschi murari che le fasce di piano vengono modellati con elementi monodimensionali; alle estremità di ogni elemento si prevedono delle zone rigide che modellano la muratura di collegamento.

I modelli piani considerano una rappresentazione piana dell'elemento murario che viene modellato o attraverso uno schema discreto equivalente, oppure mediante elementi piani suscettibili di una variazione geometrica. Essi risultano in genere computazionalmente più onerosi rispetto ai modelli a telaio, tuttavia consentono una descrizione del comportamento d'insieme di un intero edificio con un costo computa-

zionale sensibilmente ridotto rispetto ad una modellazione agli elementi finiti non-lineari.

Nel seguito si riporta una breve descrizione delle principali macro-modellazioni proposte nella letteratura.

9.1. Metodo POR

Il metodo POR si può considerare il primo dei modelli a telaio. Per la sua semplicità è ancora oggi diffuso in ambito professionale, sebbene presenti numerose limitazioni. Tale metodo è applicabile esclusivamente ad edifici bassi con impalcati di piano sufficientemente rigidi, poiché si basa sull'ipotesi fondamentale di impalcati infinitamente rigidi, sia assialmente che flessionalmente, perfettamente ammorsati alle pareti. Tale assunzione, comunque molto approssimata, risulta accettabile nel caso di edifici con solai in latero-cemento, i quali, oltre ad offrire una maggiore rigidezza flessionale rispetto a tutte le altre tipologie di orizzontamenti, risultano usualmente ben ammorsati alle pareti.

Nel caso di edifici con differenti tipologie di impalcato, come solai in legno o volte portanti, entrambi frequentemente riscontrabili in edifici storici, le ipotesi formulate risultano molto meno accettabili. In questo caso, infatti, i solai risultano più deformabili e non sempre l'impalcato è sufficientemente ammorsato alle pareti verticali.

Il metodo risulta, invece, del tutto inapplicabile a edifici privi di impalcati. Tale situazione si riscontra in diverse tipologie di costruzioni a carattere monumentale, come ad esempio le chiese.

Assumendo gli impalcati infinitamente rigidi, le pareti di ogni piano si comportano come un sistema di molle in parallelo che collegano due impalcati contigui. La rigidezza assiale dei setti viene trascurata, pertanto il sistema presenta complessivamente tre gradi di libertà per ogni impalcato. Spesso viene trascurata anche la rigidezza fuori piano delle pareti in quanto risulta notevolmente inferiore rispetto alla rigidezza nel piano. I setti vengono modellati come molle alla traslazione nella direzione della parete stessa, il legame costitutivo ad esse assegnato è elastico, perfettamente plastico con duttilità limitata.

Le analisi in campo inelastico vengono condotte applicando le forze orizzontali nel centro di massa di ogni impalcato. Tali forze si distribuiranno inizialmente a seconda delle rigidezze elastiche delle molle. Durante l'analisi, quando una parete giunge al proprio limite di snervamento inizia a deformarsi senza incrementare il proprio carico, fino al raggiungimento del valore ultimo dello spostamento. A questo punto tale parete viene eliminata dallo schema di calcolo in quanto non è più in grado di portare carico. L'analisi procede finché è possibile garantire l'equilibrio.

Originariamente il metodo POR prevedeva esclusivamente la rottura a taglio diagonale che portava a valutare il taglio ultimo con la formula proposta da Turnsek e Cacovic (1971). Validato con l'osservazione dei risultati di diverse prove sperimentali (Tomazevic, 1990 e 1996), tale criterio si basa sull'assunzione che la rottura avviene quando la tensione principale di trazione, nella zona centrale del pannello, eguaglia la resistenza a trazione della muratura.

La formula che esprime tale criterio si ricava facilmente mediante l'ipotesi di distribuzione parabolica delle tensioni tangenziali lungo la sezione del pannello, con valore massimo pari a $1.5*V/A$ in corrispondenza dell'asse baricentrico, e deriva da semplici considerazioni sullo stato tensionale. Basta, infatti, ricavare l'espressione della tensione principale di trazione in corrispondenza proprio dell'asse del pannello, di seguito riportata:

$$\sigma_t = \sqrt{p^2 + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{P}{A}\right)^2 + \left(1.5\frac{V}{A}\right)^2}$$

essendo

σ_t la tensione principale di trazione;

P lo sforzo normale agente sul pannello;

p la pressione media;

V il taglio agente;

B e t la base e lo spessore del pannello;

$A=B*t$ l'area della sezione trasversale.

Uguagliando questa espressione con la resistenza convenzionale a trazione, l'espressione del taglio ultimo assume la forma

$$V_d = \frac{\sigma_{tu} Bt}{1.5} \cdot \sqrt{1 + \frac{p}{\sigma_{tu}}}$$

Il termine σ_{tu} rappresenta la resistenza a trazione della muratura; tale parametro è in linea teorica una grandezza puntuale, tuttavia in quest'ambito deve essere interpretato come un parametro di tipo globale, dato che è riferito all'intero pannello. Non è detto inoltre che esso debba coincidere con la resistenza a trazione misurabile con una prova a trazione sulla muratura; esso va piuttosto determinato eseguendo una prova di taglio che permetta di ricavare il taglio ultimo, e poi invertendo la formula di Cacovic. Per marcare il carattere macroscopico e non locale del parametro σ_{tu} , esso spesso viene indicato come *resistenza convenzionale a trazione*.

La formula di Cacovic viene spesso riportata in funzione del parametro τ_k che rappresenta la tensione tangenziale media in condizioni ultime (V_d/A) in assenza di sforzo normale, e non in termini di σ_{tu} . È facile notare che questi due parametri sono legati dalla relazione $\tau_k = \sigma_{tu}/1.5$. Con queste posizioni la formula di Cacovic può essere scritta come

$$V_d = \tau_k Bt \cdot \sqrt{1 + \frac{p}{1.5 \cdot \tau_k}}$$

Il parametro τ_k presenta il vantaggio di avere un riscontro fisico più immediato rispetto alla tensione convenzionale a trazione. Se infatti si esegue una prova di taglio su un campione di muratura (in assenza di sforzo normale), per determinare τ_k basta dividere il valore del taglio ultimo che si registra per l'area della sezione trasversale del pannello esaminato.

In successive versioni del metodo si è cercato di tenere conto anche della possibilità di una rottura per presso-flessione del maschio murario, considerando quindi anche un criterio di rottura a presso-flessione (*POR-flex*).

Il carico ultimo della struttura determinato attraverso il metodo POR risulta essere una stima per eccesso di quello reale. Ciò è conseguenza dell'ipotesi di impalcati rigidi, che corrisponde ad un vincolo alla rotazione sulle facce superiore ed inferiore dei pannelli murari. Un pannello inserito in una struttura si trova, in realtà, in una condizione di

vincolo intermedia tra quella di parete libera in testa e quella di parete vincolata in testa alla rotazione. L'effettivo grado di vincolo dipende dalla rigidezza delle fasce di piano e dalla presenza o meno del cordolo di piano. Non è detto inoltre che tale condizione di vincolo resti immutata durante tutta l'analisi, ma è piuttosto probabile che cambi a seguito di eventuali rotture o plasticizzazioni che interessano gli elementi a contatto col pannello stesso (fasce di piano, cordoli, ecc.).

9.2. Metodo SAM

Un approccio che schematizza una diversa condizione di vincolo nei maschi murari, denominato metodo SAM, è stato proposto nella sua prima versione da Magenes e Calvi (1996). Il modello è stato successivamente implementato in un apposito codice di calcolo da Magenes e Della Fontana (1998). Esso riconduce la generica parete a un telaio composto da elementi asta che, a differenza dei metodi di tipo POR, modellano sia i maschi murari che le fasce di piano. Inoltre vengono previste delle zone rigide alle estremità di ogni asta che simulano le porzioni murarie di collegamento tra maschi e fasce di piano. Ad ogni maschio murario viene associata una legge taglio-spostamento orizzontale di tipo elastoplastico, come mostrato in figura, e il valore del taglio ultimo è dato dal minore tra i valori corrispondenti ai diversi meccanismi di rottura (rottura per flessione, rottura per scorrimento, rottura per fessurazione diagonale). Lo spostamento limite viene fissato in termini di distorsione ultima. In Magenes e Calvi (1997) viene messo in luce che lo spostamento (δ_{ultimo}) ultimo può essere espresso in termini di scorrimento ultimo. Tale valore, per pareti caratterizzate da un meccanismo di collasso per taglio con fessurazione diagonale, risulta essere un parametro stabile. Molti autori, a seguito di prove sperimentali, propongono un'espressione dello scorrimento ultimo data da

$$\gamma_{ultimo} = \delta_{ultimo} / H \cong 0.5\%$$

dove con δ_{ultimo} si indica lo spostamento orizzontale ultimo della sezione di sommità della parete e con H l'altezza della parete.

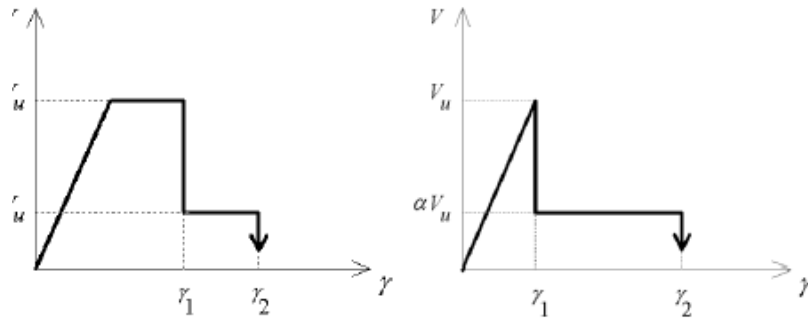


Figura 1.31. Legami costitutivi: comportamento flessionale dei maschi e della fasce e comportamento a taglio dei maschi, e comportamento a taglio delle fasce

Il legame costitutivo degli elementi che modellano le fasce è lineare fino al valore del taglio massimo, raggiunto il quale si ha una rottura fragile. Per la valutazione del taglio ultimo, per tali elementi, si considerano solo i meccanismi di rottura a scorrimento e per fessurazione diagonale, mentre non viene considerata la possibilità che una fascia possa rompersi per flessione.

L'analisi con il metodo SAM viene condotta per incrementi fissati del carico. Il primo passo consiste nel determinare la distribuzione dei tagli nei maschi che equilibra il carico, secondo la rigidezza di ognuno, imponendo l'eguaglianza degli spostamenti orizzontali di tutti i punti afferenti a un impalcato.

Noti i tagli, si determinano i momenti alle estremità dei maschi, considerando come punto di nullo del diagramma del momento quello di inizio passo. A inizio analisi vanno inoltre fissate le posizioni iniziali dei punti di nullo per tutti i maschi; tale valutazione verrà fatta in base alla condizione di vincolo di ciascun elemento.

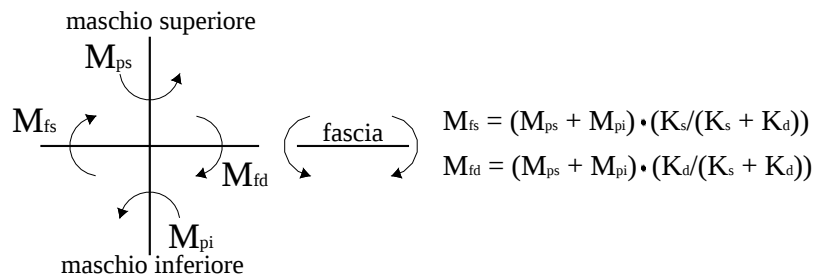


Figura 1.32. Particolare del nodo trave colonna dello schema a telaio

La procedura di calcolo prevede che venga imposto l'equilibrio alla rotazione di ogni nodo, come mostrato in figura, al fine di ricavare i momenti alle estremità delle fasce, e quindi i tagli agenti in ogni fascia. Lo sforzo normale agente nelle fasce è direttamente valutabile dai tagli di estremità dei maschi; inoltre è possibile verificare se a fine passo i tagli agenti nelle fasce superano il valore corrente del taglio ultimo. Se in qualche fascia si è superato il taglio limite, si riporta il valore del taglio al valore massimo, e l'eccedenza di momento che ne scaturisce viene ridistribuita agli elementi dei nodi che afferiscono a tale fascia secondo le rigidezze di ognuno. Tutti gli elementi interessati dalla ridistribuzione subiscono una variazione del diagramma del momento, mentre viene mantenuto costante il taglio agente. I punti di nullo dei momenti nei maschi subiscono quindi delle variazioni, e tale circostanza implica che sono state mutate le condizioni di vincolo dei maschi interessati dalla rottura di una fascia.

Dopo aver effettuato tutte le ridistribuzioni relative alle fasce rotte, si determinano gli sforzi normali agenti nei maschi, imponendo l'equilibrio alla traslazione verticale dei nodi.

Per ogni maschio si dispone sia dei tagli che degli sforzi normali di fine passo e si può effettuare una verifica sull'ammissibilità del valore dei tagli rispetto ai criteri di snervamento prescelti. Se si riscontrano valori di taglio maggiori del taglio massimo corrente, si procede a ridistribuire l'eccedenza di taglio a tutti gli elementi ancora elastici, e la rigidezza del maschio che è giunto a snervamento, nel passo successivo, verrà considerata nulla.

Il metodo nella sua semplicità ha il pregio di tenere in considerazione molti aspetti essenziali della risposta di una parete muraria:

- coglie la variazione di sforzo normale nei maschi durante l'analisi, elemento essenziale poiché influenza la resistenza a taglio dei maschi stessi;
- prevede tutti i meccanismi di rottura cui può essere soggetto un pannello murario;
- prevede la variazione delle condizioni di vincolo cui è soggetto un maschio murario a seguito della rottura di una fascia.

Il metodo SAM è stato applicato a diverse pareti benchmark, di cui si conosceva con sufficiente approssimazione la risposta a carichi orizzontali, sia in termini di taglio ultimo che di meccanismo di collasso.

Una descrizione approfondita del metodo SAM, confrontato con altre metodologie semplificate, è riportata in Magenes et al. (2000).

9.3. Modello a ventaglio multiplo

Il primo tentativo di modellare la muratura tramite un macroelemento è probabilmente quello proposto da Braga e Liberatore (1990 e 1997), con l'introduzione di un macroelemento bidimensionale, denominato a ventaglio multiplo poiché è composto da una serie di conci elementari di forma triangolare compressi, come mostrato nella figura sottostante.

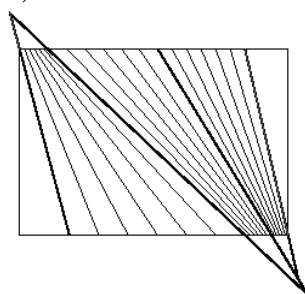


Figura 1.33. Macromodello a ventaglio multiplo

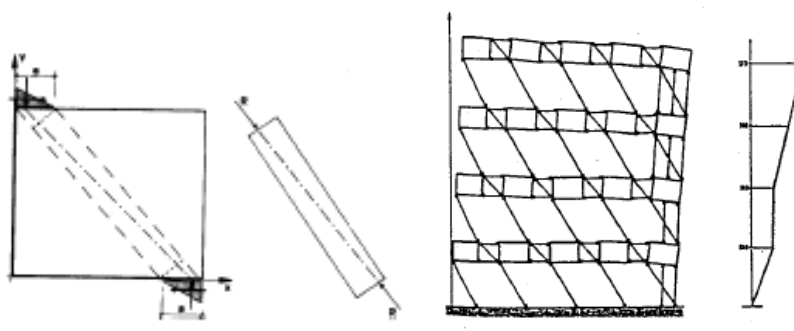


Figura 1.34. Modello a puntone equivalente: individuazione della sezione e della inclinazione del puntone equivalente al pannello, e intera parete modellata con i puntoni equivalenti

Il modello si basa su alcune ipotesi formulate sullo stato tensionale, che mirano a simulare una resistenza a trazione della muratura nulla. I parametri cinematici che governano il modello sono sei, assunti coincidenti con le due traslazioni e con la rotazione dei punti medi delle sezioni di estremità del pannello.

Le applicazioni eseguite utilizzando tale modello, mostrano generalmente una sovrastima del carico ultimo della struttura. Tale circostanza è dovuta probabilmente al fatto che tale modello non prende in considerazione in alcun modo i meccanismi di rottura a taglio e a scorrimento che possono verificarsi in un pannello murario.

9.4. Macromodello a geometria variabile

Il modello è stato proposto da D'Asdia e Viskovic (1993) per lo studio di pareti piane caricate da forze orizzontali nel proprio piano. Successivamente è stato aggiornato dagli stessi autori (1996) per essere applicato allo studio di strutture tridimensionali.

Il modello si presta bene a modellare strutture regolari, nelle quali si distinguono nettamente gli elementi “maschio” e “fascia di piano” da quelli “nodo di collegamento”, connessione rigida tra maschi e fasce.

Il modello è basato sulla introduzione di macroelementi costituiti da un numero limitato di elementi finiti elastico-lineari di forma triangolare. Tali elementi finiti sono a deformazione costante, caratterizzati cioè da un campo di spostamenti che dipende linearmente dagli spostamenti dei vertici.

Le dimensioni dei singoli elementi finiti sono paragonabili a quelle del pannello; tale scelta è giustificata dalla considerazione che il materiale è elastico lineare a compressione e dall'assunzione di conservazione delle sezioni piane. In tali circostanze, infatti, gli stati deformativo e tensionale di un corpo sono completamente determinabili tramite gli spostamenti dei vertici, per cui si possono utilizzare elementi finiti di dimensioni paragonabili al pannello stesso.

Vengono definiti due macroelementi distinti, rappresentati nella figura seguente: il primo è pensato per modellare i pannelli murari costituiti dai maschi murari e dalle fasce di piano di un edificio, il secondo,

invece, serve a modellare la porzione di muratura che funge da collegamento proprio tra i maschi e le fasce.

Il principio di base del modello è di modificare la geometria dell'elemento pannello al fine di escludere la porzione di muratura in cui le tensioni di trazione superano il valore di resistenza della muratura, in modo da riprodurre la parzializzazione progressiva della sezione trasversale del pannello, con conseguente degrado di rigidezza globale del sistema.

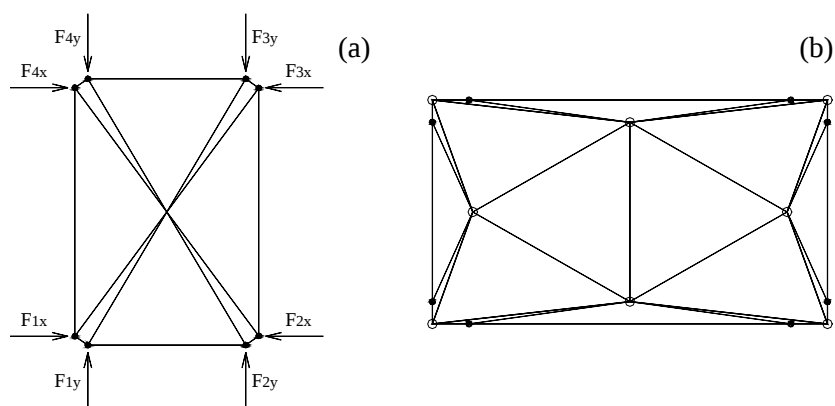


Figura 1.35. a) Rappresentazione del macro-elemento per la modellazione di un pannello murario e indicazione delle forze nodali che caratterizzano lo stato tensionale nel pannello; b) Rappresentazione del macroelemento per la modellazione della muratura di collegamento tra maschi e fasce di piano

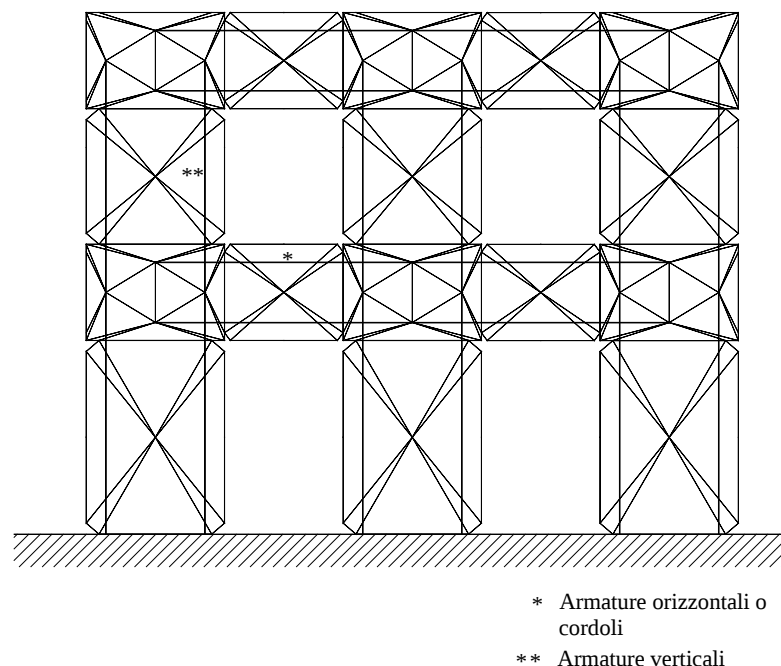


Figura 1.36. Assemblaggio di una parete piana

Gli elementi finiti, nel pannello, sono disposti in maniera tale che, variando la forma dei singoli triangoli, la geometria del pannello possa essere variata, durante l'analisi, in funzione dello stato tensionale agente sul pannello stesso, in modo da escludere la porzione di sezione in cui la trazione ha superato il limite ammissibile.

Nella figura sottostante una possibile configurazione variata della geometria del pannello per simulare la parzializzazione della sezione. Si è indicato lo stato tensionale nelle sezioni di estremità in termini di sforzo normale (N), taglio (T) e momento (M). Inoltre si considera che la muratura possa offrire una piccola resistenza a trazione.

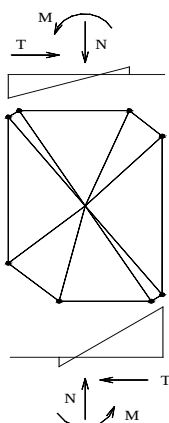


Figura 1.37. Pannello con geometria variata

I triangoli esterni dell'elemento di collegamento sono quelli che possono variare la loro forma per seguire le variazioni di geometria dei maschi o delle fasce che collegano. I nodi e i triangoli interni, invece, sono a geometria fissata. Nel rappresentare l'elemento di collegamento, si sono indicati con un cerchio vuoto i nodi a geometria fissa e con un cerchio pieno i nodi la cui posizione viene aggiornata durante l'analisi.

Nella figura seguente è schematizzato l'assemblaggio tra due pannelli (maschio e fascia) tramite un elemento di collegamento, in configurazione variata, nella quale cioè la geometria dei pannelli è stata aggiornata a causa della parzializzazione della sezione.

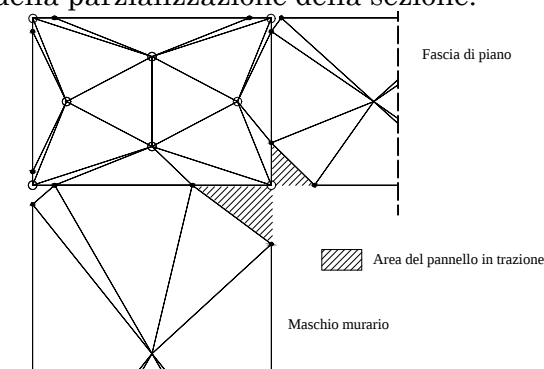


Figura 1.38. Assemblaggio di un maschio murario e una fascia, mediante l'interposizione di un elemento di collegamento, in configurazione variata

Si può notare inoltre la variazione di forma che devono subire i triangoli esterni dell'elemento di collegamento per continuare a garantire la congruenza.

L'analisi viene condotta per passi successivi di carico; alla fine di ogni passo si determinano le forze nodali e quindi la risultante in termini di sforzo assiale, taglio e momento agente nel pannello.

In base a tale risultante, si determina la distribuzione degli sforzi lungo la sezione, e viene quindi variata la posizione dei nodi esterni in maniera da escludere la zona fessurata. La geometria così ottenuta sarà quella di partenza per il passo successivo.

E' interessante notare come, all'aumentare della parzializzazione della sezione, la forma e il comportamento del pannello si avvicinano sempre più a quelli di un puntone, cogliendo in pieno la reale tendenza della muratura a resistere ai carichi assumendo configurazioni di equilibrio con sviluppo di sole tensioni di compressione.

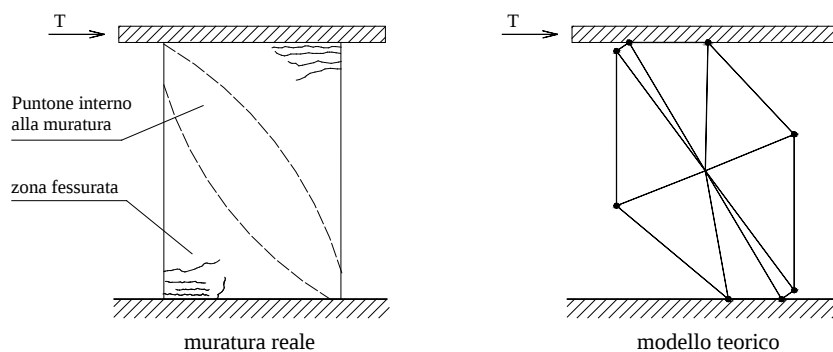


Figura 1.39. Comportamento a puntone della muratura reale e del macroelemento a geometria variabile

La procedura non è iterativa nel passo, quindi perché i risultati siano sufficientemente accurati, bisogna che i passi di carico siano piccoli.

Il modello si presta bene all'inserimento di elementi *truss* in corrispondenza dei nodi fissi dell'elemento di collegamento. Tali elementi consentono facilmente di schematizzare barre di armatura e il comportamento assiale di cordoli di piano. Non vi è tuttavia la possibilità di modellare l'interazione flessionale tra i cordoli di piano e la muratura.

9.5. Macromodello di Brencich e Lagomarsino

Trattasi di un macromodello, introdotto da Brencich e Lagomarsino (1997), idealmente suddiviso in tre moduli. Uno centrale (*pannello*), deformabile solo a taglio, e due moduli periferici (*interfacce*) in corrispondenza delle sezioni di base e di testa, che possono subire solo deformazioni di tipo flessionale. Le due interfacce hanno dimensioni nulle; solo per comodità di rappresentazione in figura queste presentano dimensioni finite.

Considerando il vincolo di rigidità a taglio dei due moduli periferici e il vincolo di rigidità flessionale del modulo centrale, il macro-elemento presenta complessivamente otto gradi di libertà. Come parametri lagrangiani vengono scelte le traslazioni e le rotazioni dei punti medi delle sezioni di base e di testa $u_{est}=[u_1, v_1, \phi_1, u_2, v_2, \phi_2]$, nonché la traslazione e la rotazione del baricentro della zona centrale $u_{pan}=[\delta, \phi_c]$.

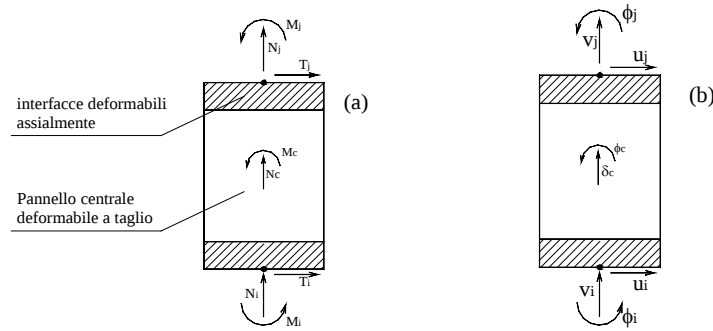


Figura 1.40. Schematizzazione del macro-elemento: (a) forze nodali, (b) spostamenti nodali

Viene mantenuta l'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, quindi il vettore u_{est} caratterizza completamente la deformata esterna del macro-elemento. Per l'assemblaggio dei vari elementi che costituiscono l'intera struttura sono necessari esclusivamente i gradi di libertà u_{est} .

Il vettore u_{pan} è essenziale per caratterizzare la cinematica del modulo centrale, in modo tale da poter determinare gli spostamenti relativi tra le interfacce di estremità e il modulo centrale stesso. Da questi deri-

vano le deformazioni flessionali delle interfacce e la deformazione a taglio del pannello centrale.

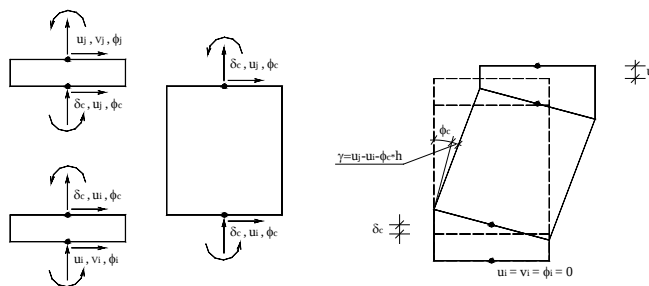


Figura 1.41. Cinematica dei vari moduli del macromodello

Si osservi che tale modello permette di imporre la congruenza in corrispondenza di una sola coppia di lati paralleli (interfacce), pertanto ogni macro-elemento può essere affiancato ad altri solo lungo tali due lati, mentre gli altri due devono rimanere liberi.

Tale circostanza non comporta alcuna limitazione nella modellazione di maschi murari e fasce di piano. Risulta, invece, essere un limite nella modellazione della porzione di muratura che collega i maschi con le fasce, che difatti gli autori del macromodello considerano rigida. Questa ipotesi è avvalorata dalla considerazione che l'azione di confinamento che questa zona riceve dai maschi murari, dalle fasce di piano e da eventuali cordoli o pareti sovrastanti gli conferisce una elevata rigidezza e che eventuali fessurazioni, probabilmente, si localizzeranno in corrispondenza dell'attacco con i pannelli. Peraltro, considerare la zona di collegamento rigida oppure elastica non è un'ipotesi inusuale: viene utilizzata, ad esempio, nella schematizzazione a telaio e trova giustificazione nelle osservazioni di edifici colpiti da eventi sismici, nei quali raramente si riscontrano danneggiamenti in tali zone di collegamento.

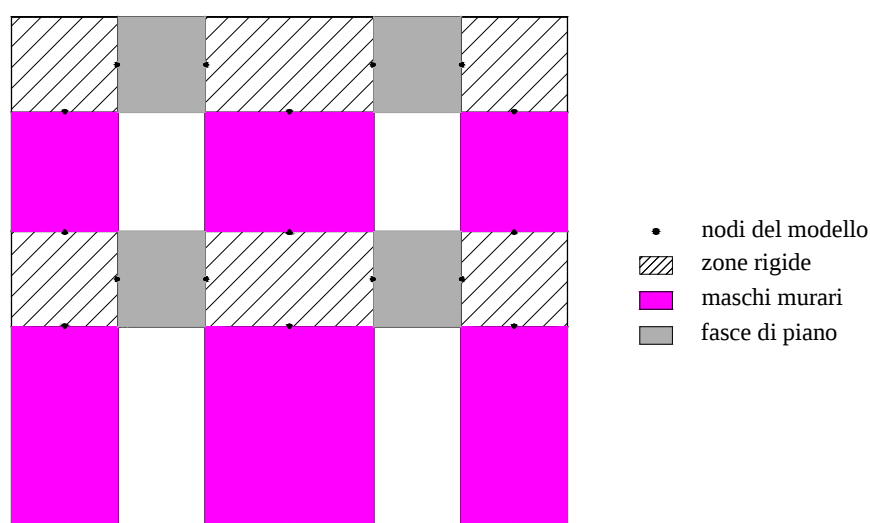


Figura 1.42. Parete piana ottenuta tramite assemblaggio di macroelementi e zone rigide

Tuttavia, in molti casi, il modello considerato può risultare parecchio limitativo a causa dell'impossibilità di affiancare lateralmente due macro-elementi. Non è infatti possibile modellare un pannello murario attraverso più macroelementi allo scopo di ottenere una risposta più dettagliata. Analoghe difficoltà si riscontrano nel caso di strutture con geometria complessa o con una disposizione irregolare delle aperture.

Pur considerando geometrie semplici, può risultare inoltre difficile l'inserimento nel modello di elementi strutturali che interagiscono con la muratura, come ad esempio un cordolo di piano, a meno di non correggere opportunamente i legami costitutivi del macro-elemento.

Le interfacce sono costituite da un insieme continuo di molle non reagenti a trazione e a comportamento elastico-lineare in compressione. Tali molle sono caratterizzate dalla rigidità per unità di superficie k .

Il comportamento a taglio del pannello centrale è caratterizzato da una fase iniziale elastica con successivo sviluppo di deformazioni plastiche e di degrado, secondo una formulazione analoga al legame costitutivo a piani di danneggiamento, appena descritto.

La rigidezza iniziale a taglio del pannello centrale, considerando una distribuzione uniforme delle tensioni tangenziali in tutte le sezioni, risulta

$$K_T = \frac{G \cdot A}{h}$$

essendo G il modulo di elasticità tangenziale iniziale della muratura, h l'altezza del pannello e A la sua area della sezione trasversale.

Se si considera inizialmente un comportamento elastico lineare sia per le interfacce che per il pannello centrale, la matrice di rigidezza elastica sarà data da

$$K_{el} = \begin{bmatrix} GA/H & 0 & 0 & -GA/h & 0 & 0 & 0 & -GA \\ 0 & kA & 0 & 0 & 0 & 0 & -kA & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12}kAb^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12}kAb^2 \\ -GA/h & 0 & 0 & \frac{GA}{h} & 0 & 0 & 0 & GA \\ 0 & 0 & 0 & 0 & kA & 0 & -kA & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12}kAb^2 & 0 & -\frac{1}{12}kAb^2 \\ 0 & -kA & 0 & 0 & -kA & 0 & 2kA & 0 \\ -GA & 0 & -\frac{1}{12}kAb^2 & GA & 0 & -\frac{1}{12}kAb^2 & 0 & GAh + \frac{1}{6}kAb^2 \end{bmatrix}$$

con riferimento ai gradi di libertà

$$u = [u_i \quad v_i \quad \varphi_i \quad u_j \quad v_j \quad \varphi_j \quad \delta_c \quad \varphi_c]$$

e alle forze (e momenti) nodali

$$F = [T_i \quad N_i \quad M_i \quad T_j \quad N_j \quad M_j \quad 0 \quad 0]$$

La non linearità dovuta al contatto monolatero nelle interfacce e al legame a taglio del pannello centrale sono prese in considerazione, non attraverso l'aggiornamento della matrice di rigidezza, che viene mantenuta costante, bensì attraverso l'introduzione di un vettore di pseudo forze, che contiene i contributi, in termini di forze nodali, delle non linearità.

$$F^* = [T_i^* \quad N_i^* \quad M_i^* \quad T_j^* \quad N_j^* \quad M_j^* \quad N_c^* \quad M_c^*]$$

Tale vettore, in generale, può essere definito attraverso semplici considerazioni sulla formulazione del legame elasto-plastico. Si può infatti scrivere la seguente relazione tra le forze nodali e gli spostamenti elastici

$$F = K_{el} \cdot u_{el}$$

Esplicitando la parte plastica degli spostamenti si ottiene

$$F = K_{el} \cdot (u - u_{pl})$$

Introducendo il vettore delle pseudo forze esterne (F^*) come segue

$$F^* = -K_{el} \cdot u_{pl}$$

il legame si può scrivere in funzione della rigidezza elastica, dato che i termini relativi alle non linearità sono racchiusi nel vettore appena definito. Si ha infatti

$$F - F^* = K_{el} \cdot u$$

L'analisi deve essere condotta in termini incrementali e ad ogni passo, a partire dalla deformata corrente si può determinare il vettore $F^*(u)$. Qualora il vettore delle pseudo-forze non sia nullo, occorre effettuare alcune interazioni fin quando non si ottenga tale condizione.

Le componenti del vettore F^* possono essere determinate distinguendo tra i termini relativi alle interfacce e i termini relativi al comportamento tagliante. Le componenti del vettore F^* relative al comportamento assiale-flessionale $\left(\begin{bmatrix} T_i^* & N_i^* & M_i^* & T_j^* & N_j^* & M_j^* \end{bmatrix} \right)$, sono dovute esclusivamente ai distacchi, essendo il legame costitutivo lineare a compressione e possono essere facilmente calcolate a partire dalla distribuzione delle tensioni di trazione relative a un comportamento elastico lineare, sia a compressione che a trazione.

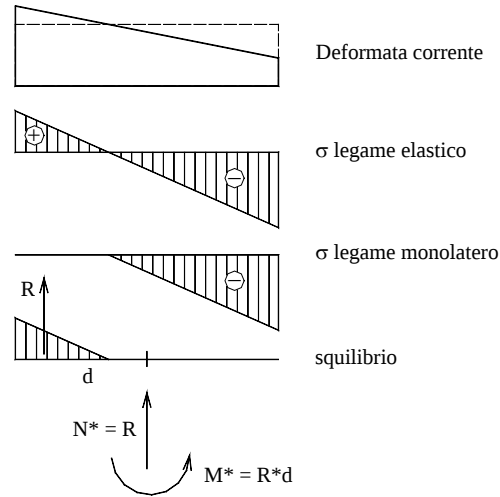


Figura 1.43. Diagrammi delle tensioni normali relative al legame elastico, al legame monolatero e allo squilibrio

$$N_n^* = \frac{k \cdot A}{8 \cdot |\varphi_n - \varphi_c|} \cdot \left[|\varphi_n - \varphi_c| \cdot b + 2 \cdot (\delta_c - v_n) \right]^2 \cdot H(|e_n| - b/6)$$

$$M_n^* = \frac{k \cdot A}{24 \cdot b \cdot |\varphi_n - \varphi_c| \cdot (\varphi_n - \varphi_c)} \cdot \left[(\varphi_n - \varphi_c) \cdot b - (\delta_c - v_n) \right] \cdot \left[|\varphi_n - \varphi_c| \cdot b + 2 \cdot (\delta_c - v_n) \right]^2 \cdot H(|e_n| - b/6)$$

Nelle espressioni delle caratteristiche della sollecitazione si indichi con il pedice n l'estremo dell'elemento considerato (i o j); b indica la larghezza del pannello, $A=b \cdot s$ l'area trasversale, H la funzione a gradino di Heaviside che fa consente di annullare i termini relativi al vettore delle pseudo-forze se la sezione non è parzializzata.

Rimane da esplicitare il termine relativo alle deformazioni plastiche di taglio. Con ragionamento analogo a quello visto per i termini del vettore delle pseudo-forze F^* si può scrivere

$$T^* = -\frac{G \cdot A}{h} \cdot \delta_{pl}$$

dove δ_{pl} è la componente plastica della deformazione totale a taglio δ subita dal pannello centrale.

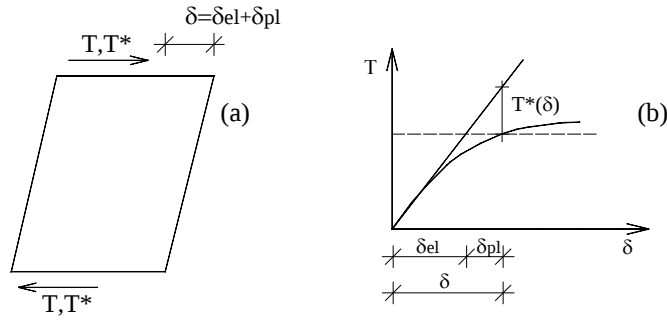


Figura 1.44. (a) Versi positivi della sollecitazione di taglio e dello squilibrio, (b) rappresentazione dello squilibrio

Come già accennato, il legame costitutivo a taglio è analogo a quello definito nel modello continuo a piani di danneggiamento, che in questo caso si potrà formulare in termini di variabili globali, grazie all'ipotesi di stato tensionale e deformativo uniformi all'interno del pannello centrale.

Si consideri la relazione che esprime lo scorrimento plastico in funzione delle due variabili di stato α e f

$$\gamma_{pl} = c \cdot \alpha \cdot (\tau - f)$$

essendo α una variabile scalare di danno e f la tensione tangenziale dovuta all'attrito. Attraverso passaggi elementari si esplicita l'espressione precedente in γ_{pl}

$$\gamma_{pl} = c \cdot \alpha \cdot \left[G(\gamma - \gamma_{pl}) - f \right]$$

$$\gamma_{pl} (1 + G \cdot c \cdot \alpha) = G \cdot \left[c \cdot \alpha \cdot \gamma - \frac{f}{G} \right]$$

$$\gamma_{pl} = G \cdot \frac{c \cdot \alpha}{1 + G \cdot c \cdot \alpha} \cdot \left[\gamma - \frac{f}{G} \right]$$

Poiché si hanno tensioni e deformazioni uniformi, si possono introdurre le grandezze globali al posto delle locali. Si considererà, quindi, la forza totale di attrito F al posto di f e lo scorrimento totale a taglio (δ) anziché γ .

$$f = \frac{F}{A}$$

$$\delta = \gamma \cdot h$$

e sostituendo

$$\delta_{pl} = G \cdot \frac{c \cdot \alpha}{1 + G \cdot c \cdot \alpha} \cdot \left[\delta - \frac{h}{G \cdot A} \cdot F \right]$$

Lo scorrimento globale del pannello si può esprimere in funzione degli spostamenti nodali

$$\delta = u_j - u_i - \phi_c \cdot h$$

Infine si ottiene

$$\delta_{pl} = G \cdot \frac{c \cdot \alpha}{1 + G \cdot c \cdot \alpha} \cdot \left[(u_j - u_i - \phi_c \cdot h) - \frac{h}{G \cdot A} \cdot F \right]$$

Il resto delle relazioni, che unitamente all'espressione appena trovata, governano il comportamento a taglio del pannello centrale e vanno riferite a variabili globali.

Le condizioni limite sono

$$\begin{cases} \varphi_s = |F| + \mu \cdot N_i \leq 0 \\ \varphi_d = Y - R(\alpha) \leq 0 \end{cases}$$

R è definita analogamente al modello di elementi finiti introdotto da Lagomarsino e Gambarotta ed è caratterizzata dai parametri c e $R_c = R(\alpha=1)$.

$$Y_m = \frac{1}{2} \cdot c \cdot (T - F)^2$$

Il dominio di rottura a taglio è dato da

$$|T| - \mu \cdot N_i \leq T_r = \sqrt{\frac{R_c}{c}}$$

Tornando al calcolo dello squilibrio, si ottiene

$$T^* = -\frac{G \cdot A}{h} \cdot \delta_{pl} = \frac{G \cdot A}{h} \cdot \frac{G \cdot c \cdot \alpha}{1 + G \cdot c \cdot \alpha} \cdot \left[(u_i - u_j + \phi_M \cdot h) + \frac{h}{G} \cdot F \right]$$

Le componenti di F^* , risultano

$$T_i^* = T^*$$

$$T_j^* = -T^*$$

I parametri che caratterizzano il modello sono E e k per il comportamento assiale-flessionale, il modulo G della muratura, la resistenza limite a taglio in assenza di sforzo normale (T_r), il coefficiente di attrito (μ), e i parametri c , β per che regolano la duttilità e la fase di softening per il comportamento a taglio.

Essi sono tutti facilmente determinabili attraverso prove di compressione semplice e di taglio su campioni di muratura. È importante sottolineare che sarebbe inutile condurre prove sui singoli elementi visto che si intende riprodurre il comportamento macroscopico dell'elemento strutturale.

9.6. Macro-elemento di Calìo et al.

Il modello discreto descritto a seguire viene introdotto da Calìo et al. (2005). Poiché il modello proposto nel presente lavoro costituisce un'estensione di questo macro-elemento, esso verrà descritto in maniera più dettagliata rispetto a quelli sinora riportati.

La ricerca si è sviluppata in due fasi principali. In un primo tempo è stato introdotto un elemento piano, atto a modellare pareti piane caricate nel proprio piano; l'ambiente di modellazione è stato poi arricchito inserendo nuovi elementi come diaframmi e aste, che consentono di valutare l'interazione della muratura con gli altri elementi strutturali di un edificio, ed estendendo il modello alla valutazione del comportamento non lineare di intere strutture in muratura con comportamento scatolare. Successivamente il modello piano è stato esteso al caso tridimensionale dagli stessi autori (2008), includendo i gradi di libertà fuori piano e consentendo la valutazione del comportamento sismico di strutture murarie anche a comportamento non scatolare, consentendo quindi di cogliere anche i meccanismi di primo modo.

Questo macro-elemento, data la sua notevole versatilità e adattabilità ai numerosi problemi che la modellazione di edifici in muratura comporta, rappresenta il valido punto di partenza da cui questo lavoro prende spunto.

9.6.1. Modello piano

Il modello, nella sua prima versione proposto da Pantò (2003), è rappresentato da un modello meccanico equivalente, grazie al quale una porzione di muratura viene schematizzata mediante un quadrilatero articolato i cui vertici sono collegati da molle diagonali non lineari (Figura 1.45) e i cui lati rigidi interagiscono con i lati degli altri macro-elementi mediante delle interfacce discrete con limitata resistenza a trazione.

Pertanto il modello si può pensare suddiviso in due elementi principali: un *elemento pannello* costituito dal quadrilatero articolato (Figura 1.45) e da un *elemento di interfaccia* costituito da un insieme discreto di molle che determinano il legame che caratterizza l'interazione non-lineare tra quadrilateri adiacenti o con i supporti esterni, come si evince dalla figura 1.46.

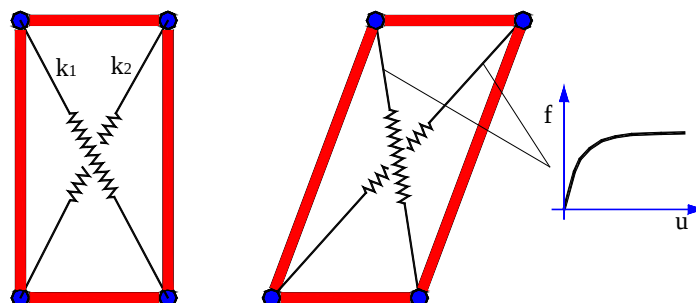


Figura 1.45. Pannello

Le molle diagonali dell'elemento pannello simulano la deformabilità a taglio della muratura. Nelle molle poste in corrispondenza delle interfacce è concentrata la deformabilità assiale e flessionale di una porzione di muratura corrispondente a due pannelli contigui.

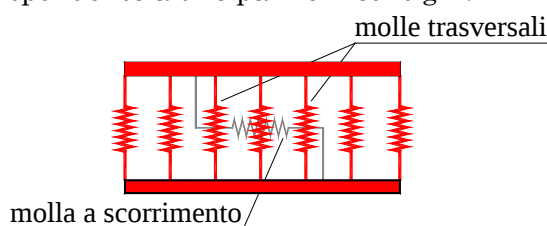


Figura 1.46. Elemento di interfaccia

Le molle non-lineari (*NLink*), nel loro insieme, consentono di simulare i principali meccanismi di collasso della muratura nel proprio piano. Il numero delle molle per ciascuna interfaccia è arbitrario, e viene determinato in base al grado di dettaglio che si intende raggiungere; è importante tuttavia evidenziare che all'aumentare del numero di molle non corrisponde un aumento del numero di gradi di libertà totali, pur aumentando l'onere computazionale associato alla non-linearità degli elementi deformabili. La figura 1.46 riporta uno schema meccanico relativo al comportamento piano dell'interfaccia, in esso si può osservare una fila di molle flessionali (ortogonali all'interfaccia) e un'unica molla longitudinale per la modellazione dello scorrimento nel piano.

È evidente che l'interazione con altri elementi può avvenire su ciascuno dei lati di un pannello, e che l'elemento di interfaccia può interessare un intero lato di un elemento o solo parte di esso. Il modello prevede la presenza di un'interfaccia ogni qualvolta un pannello abbia un lato, o una porzione di esso, in comune con un altro pannello o con un supporto esterno (Figura 1.45).

Questo approccio permette di modellare agevolmente anche schemi strutturali che presentano geometrie complesse e irregolari (ad esempio aperture non allineate).

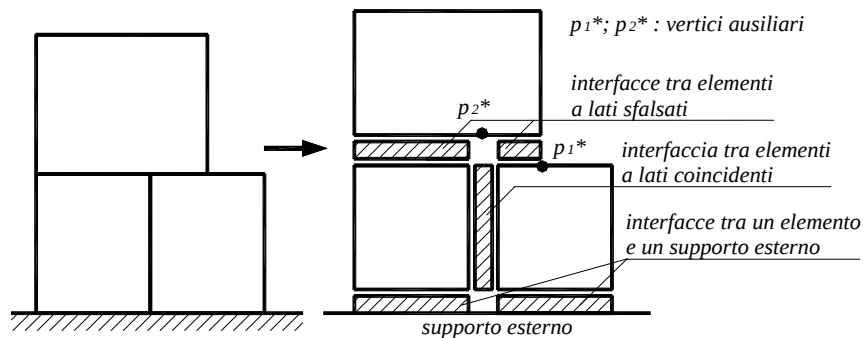


Figura 1.47. Esempio di individuazione degli elementi di interfaccia

Il fatto che il pannello possa interagire lungo ciascuno dei suoi lati è uno degli aspetti originali del modello. Tale circostanza determina numerosi vantaggi poichè consente una modellazione efficiente delle fasce di piano in cui l'eventuale azione di confinamento agisce in direzione o-

rizzontale, rende agevole la valutazione dell'effetto di interazione tra la muratura ed altri elementi (ad es. cordoli di piano), e consente inoltre di modellare una parete di muratura sia con una mesh di macro-elementi minima che mediante una discretizzazione più fitta (Figura 1.49).

La possibilità di suddividere l'elemento murario in una mesh di più elementi più piccoli sembrerebbe ricalcare la filosofia tipica dei modelli agli elementi finiti; tuttavia appare necessario evidenziare che l'utilizzo di una mesh di macro-modelli rappresenta una possibilità e non una necessità, come nel caso dei modelli agli elementi finiti. In questo caso infatti, un singolo macro-elemento è già concepito per simulare la risposta del pannello murario che rappresenta a prescindere dalla sua estensione; tuttavia una mesh più fitta consente una descrizione più dettagliata della cinematica e la possibilità di cogliere con maggiore accuratezza il meccanismo di collasso.

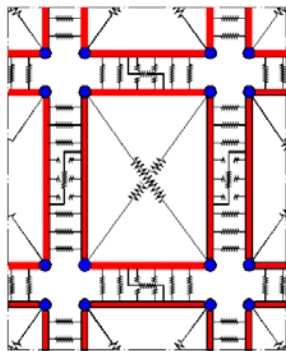


Figura 1.48. Muratura modellata mediante una mesh di macro-elementi

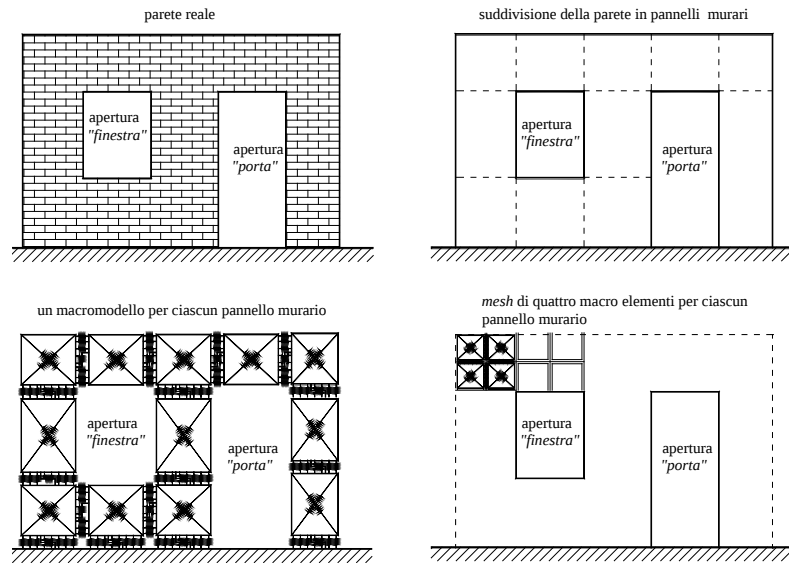


Figura 1.49. Modellazione di un prototipo di parete mediante due differenti mesh: discretizzazione della parete

L'irregolarità geometrica e di disposizione delle aperture può costituire senz'altro un esempio per il quale il ricorso a una mesh più fitta rispetto a quella di base può essere auspicabile non tanto ai fini della valutazione di una più accurata valutazione della resistenza globale della struttura, quanto invece al fine di migliorare il livello di dettaglio nella valutazione del meccanismo di collasso, come risulta chiaro dalla figura 1.49.

9.6.1.1. La modellazione del comportamento della muratura nel proprio piano

Il collasso di un elemento murario caricato verticalmente e sollecitato nel proprio piano con azioni orizzontali crescenti si manifesta secondo tre possibili meccanismi come rappresentato in figura 1.50. Il meccanismo indicato in figura 1.50 (a) è di natura prevalentemente flessionale (rocking), in esso la rottura è associata alla fessurazione in corrispon-

denza delle fibre tese e/o allo schiacciamento in corrispondenza delle fibre compresse. Gli altri due meccanismi di collasso rappresentati nelle figure 1.50, (b) e (c), sono meccanismi di rottura a taglio associati rispettivamente alla fessurazione diagonale e allo scorrimento.

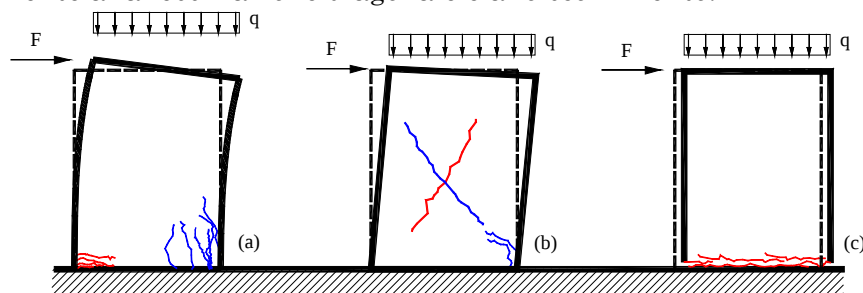


Figura 1.50. Meccanismi di rottura nel piano di un pannello murario; (a) rottura per schiacciamento/ribaltamento; (b) rottura a taglio per fessurazione diagonale; (c) rottura a taglio per scorrimento

Il modello meccanico equivalente, con la sua cinematica, consente di cogliere tutte queste tipologie di meccanismo di collasso nel piano come mostrato in figura 1.51, nella quale sono rappresentati i meccanismi di collasso del modello equivalente, corrispondenti a quelli reali già riportati nella figura precedente.

Come già noto, il meccanismo di collasso flessionale nel piano può manifestarsi secondo due diverse modalità: da una parte la progressiva fessurazione che porta alla parzializzazione della sezione del pannello e quindi alla rotazione intorno ad un estremo; dall'altra il possibile schiacciamento della muratura in prossimità del bordo compresso. Il modello riproduce tale meccanismo mediante le molle di interfaccia disposte ortogonalmente all'interfaccia stessa, per le quali può essere previsto un legame con limitata resistenza a compressione e comportamento elasto-fragile a trazione. Lo schiacciamento della muratura sarà quindi associato alla progressiva plasticizzazione a compressione delle molle, mentre la fessurazione verrà associata alla rottura per trazione delle stesse (fig. 1.52). È evidente che in questo modo si tiene conto implicitamente della dipendenza dallo sforzo normale che tale meccanismo presenta.

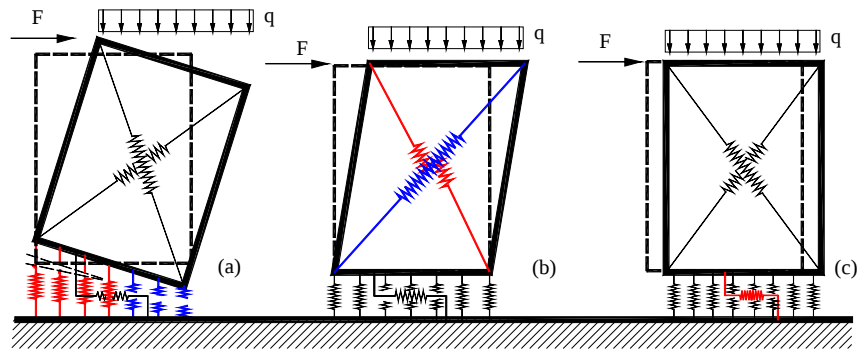


Figura 1.51. Simulazione dei meccanismi di collasso nel piano di un pannello murario; (a) rottura per schiacciamento/ribaltamento; (b) rottura a taglio per fessurazione diagonale; (c) rottura a taglio per scorrimento

Il meccanismo di collasso a taglio per fessurazione diagonale rappresenta senz'altro il più importante e diffuso meccanismo di collasso nel piano. Esso è caratterizzato da un quadro fessurativo costituito da fessure diagonali nella porzione centrale del pannello che si determinano lungo le isostatiche di compressione a causa della limitata resistenza a trazione. Il modello è capace di simulare tale meccanismo mediante l'attribuzione di un legame costitutivo non-lineare ad hoc alle molle diagonali (Figura 1.53).

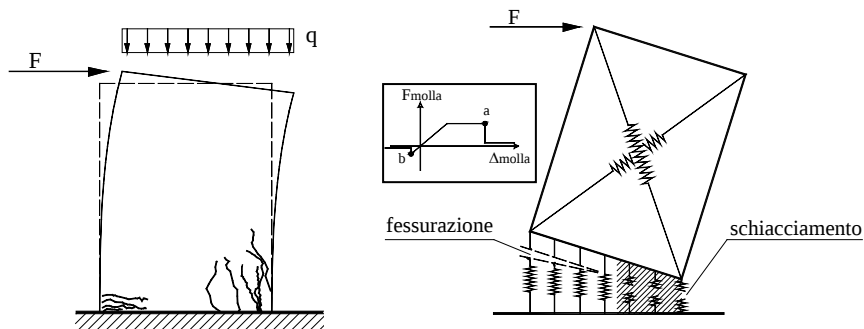


Figura 1.52. Meccanismo di collasso per flessione nei modelli continuo e discreto

Il meccanismo di collasso per scorrimento, che nelle applicazioni pratiche non riveste generalmente molta importanza, diviene possibile

solo in presenza di bassi valori di sforzi normali o a seguito di consistenti parzializzazioni delle sezioni. Esso si manifesta con mutui scorrimenti tra due pannelli lungo la i giunti di malta, orizzontali o verticali, con la progressiva formazione di macrofratture orientate (Figura 1.54). Viene simulato mediante un'unica molla longitudinale di interfaccia, alla quale viene associato un legame costitutivo che tenga conto della dipendenza di questo meccanismo dalle tensioni normali, considerando ad esempio un dominio di resistenza alla Mohr-Coulomb.

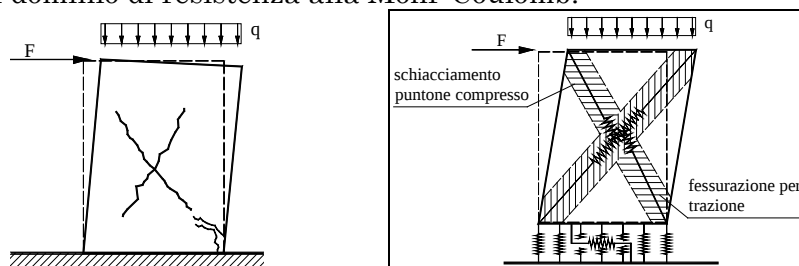


Figura 1.53. Meccanismo di collasso a taglio per fessurazione diagonale nei modelli continuo e discreto

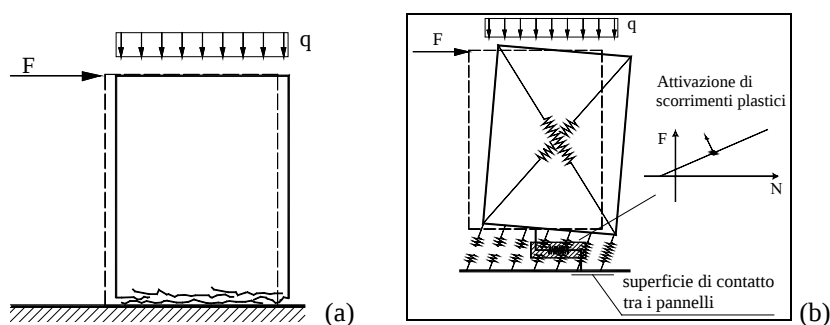


Figura 1.54. Meccanismo di collasso a taglio per scorrimento nei modelli continuo e discreto

Il modello consente di cogliere anche l'instaurarsi di eventuali meccanismi combinati.

Nella rappresentazione piana il pannello possiede i tre gradi di libertà associati ai moti rigidi piani a cui occorre aggiungere il grado di libertà che lo rende articolato. Come parametri lagrangiani atti a de-

scrivere la cinematica nel piano, sono stati considerati le quattro traslazioni di ciascuno dei lati rigidi lungo la propria direzione ai quali è possibile associare le relative forze duali nel piano (Figura 1.55).

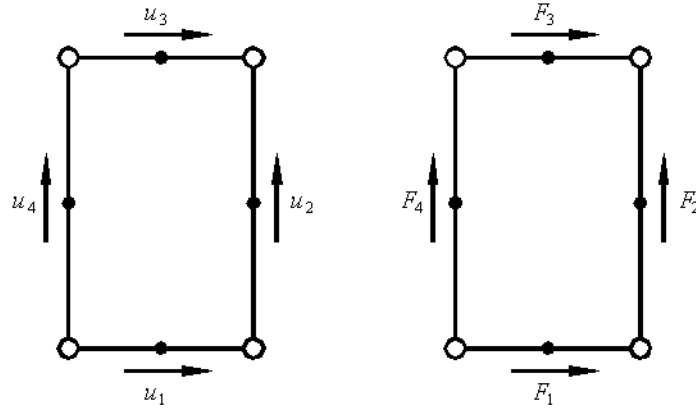


Figura 1.55. Gradi di libertà e forze duali nel piano

Per ogni interfaccia è conveniente individuare due punti estremi (o nodi), che verranno indicati con i e j (figura 1.56). Nel caso di una interfaccia che connette due elementi, a ognuno dei nodi corrispondono in realtà due nodi del modello, appartenenti ciascuno a uno dei due elementi collegati dall'interfaccia. Tali nodi, pur avendo nella configurazione iniziale le medesime coordinate, sono fisicamente distinti e subiranno spostamenti differenti. I quattro nodi (due per ogni elemento connesso), che corrispondono ai due estremi i e j dell'interfaccia, vengono denominati vertici dell'interfaccia.

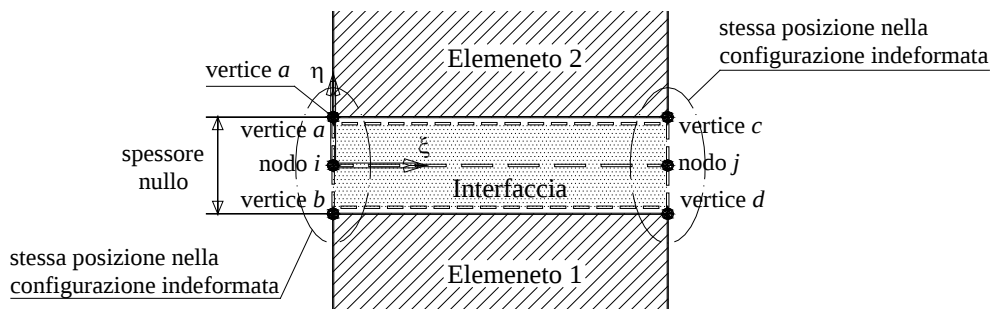
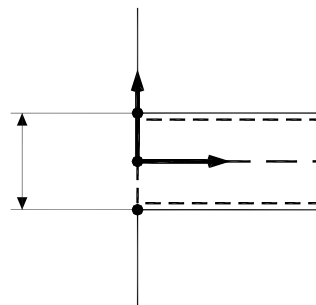


Figura 1.56. Interfaccia tra due elementi



Il comportamento meccanico dell'interfaccia è governato da molle non-lineari (fig. 1.57). Il comportamento della molla a scorrimento dipende da quello delle molle flessionali; in particolare essa viene considerata attiva solo se vi sono molle trasversali in compressione mentre il limite corrente di resistenza dipende dal numero di molle trasversali attive ovvero dall'estensione della zona di contatto tra i due elementi.

Le molle sono disposte ad interasse costante ed in modo simmetrico rispetto all'asse di mezzzeria dell'interfaccia; le molle di estremità risultano rientrate rispetto alle estremità dell'interfaccia di metà interasse.

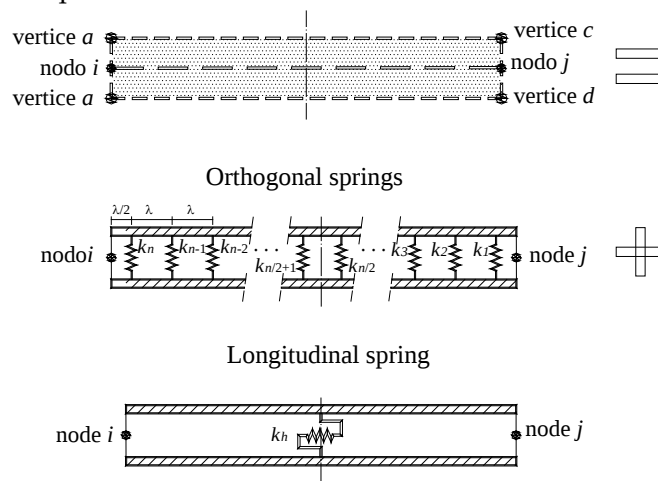


Figura 1.57. Interfaccia tra due pannelli: molle trasversali e molla a scorrimento

La cinematica nel piano dell'interfaccia è descritta in modo completo da sei gradi di libertà associati ai gradi di libertà dei lati dei pannelli interconnessi. I parametri lagrangiani sono gli spostamenti dei quattro vertici dell'interfaccia nella direzione ortogonale all'interfaccia stessa, e gli scorrimenti dei due lati rigidi, superiore e inferiore. È tuttavia evidente che se l'interfaccia risulta collegata ad un vincolo fisso tre gradi di libertà sono sufficienti per definirne lo stato.

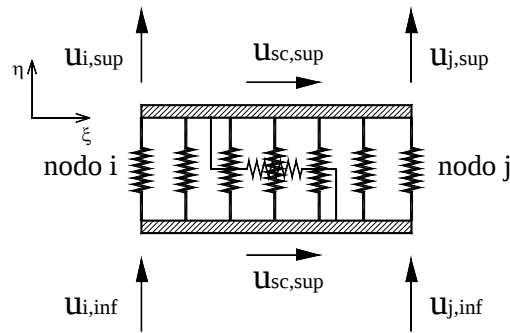


Figura 1.58. Gradi di libertà nel piano dell' interfaccia inserita tra due elementi

Tutti i parametri lagrangiani si considerano positivi se concordi con gli assi del sistema di riferimento locale dell'interfaccia (Figura 1.58).

I gradi di libertà locali delle interfacce non impegnano gradi di libertà indipendenti per il modello poiché li condividono con gli elementi che connettono.

Il modello piano consente la modellazione di pareti attraverso l'assemblaggio di macro-elementi, passando per la taratura delle molle non-lineari secondo procedure di calibrazione basate su considerazioni fisiche. L'estensione alla modellazione di edifici tridimensionali avviene secondo due diversi approcci. Se può essere assunta l'ipotesi di comportamento scatolare per l'edificio considerato, esso può essere modellato come un assemblaggio di pareti, ciascuna delle quali esibisce un comportamento piano, collegate da cordoli e diaframmi orizzontali. Se però l'ipotesi di comportamento scatolare non risulta realistica, il modello piano non è più sufficiente a cogliere il comportamento globale dell'edificio, si rende necessaria una sua estensione al fine di valutare anche il comportamento fuori piano delle pareti murarie. Tale miglioramento avviene introducendo gradi di libertà aggiuntivi che consentono di ottenere un comportamento tridimensionale del macro-elemento. Tale arricchimento comporta un maggiore onere computazionale ma consente la simulazione di eventuali meccanismi locali di primo modo.

9.6.1.2. La modellazione 3D mediante assemblaggio di pareti 'piane'

La modellazione dell'interazione dei pannelli murari con gli altri elementi costruttivi, se correttamente interpretata, consente di assemblare un insieme di pareti piane, formando strutture tridimensionali che consentono la simulazione del comportamento non lineare di edifici reali con comportamento scatolare. I principali tipi di interazione che possono essere presi in considerazione sono:

- Interazione tra le pareti e gli impalcati;
- Interazioni tra le pareti in corrispondenza degli angoli;
- Interazione tra cordoli architravi o tiranti, e i macro-elementi.

Nel seguito si descrivono brevemente le modellazioni di queste interazioni.

Interazione tra le pareti e gli impalcati

Nel modello proposto vengono considerati due diversi elementi destinati a simulare la presenza di impalcati di collegamento:

- diaframmi infinitamente rigidi;
- diaframmi deformabili.

In entrambi i casi, gli aspetti legati alla deformabilità flessionale del diaframma non vengono presi in considerazione.

L'interazione tra i diaframmi, siano essi rigidi o deformabili, e i pannelli delle pareti avviene mediante degli elementi di interfaccia opportunamente definiti e appartenenti ai piani delle pareti. Tali interfacce vengono create in corrispondenza di ciascun lato in comune di un pannello con un diaframma.

La presenza dell'impalcato viene simulata mediante un elemento rigido piano o un diagramma deformabile. Con riferimento ad una generica situazione in cui l'elemento risulta inserito tra due pannelli murari (Figura 1.59), la connessione con la muratura viene garantita tramite due distinte interfacce, ciascuna delle quali ha una faccia coincidente con il piano dell'impalcato e l'altra afferente a uno dei due pannelli. Nel caso di diaframma rigido i gradi di libertà dell'interfaccia associati ai gradi di libertà del diaframma sono legati da un vincolo di rigidità nel piano del diaframma. Nel caso invece di diaframma deformabile i gradi di libertà dell'interfaccia che afferiscono al lato del diaframma non sono

legati da un vincolo di rigidità ma saranno associati a gradi di libertà di un elemento triangolare piano appartenente al diaframma, corrispondente alla zona che si può considerare direttamente dipendente dall'interfaccia considerata.

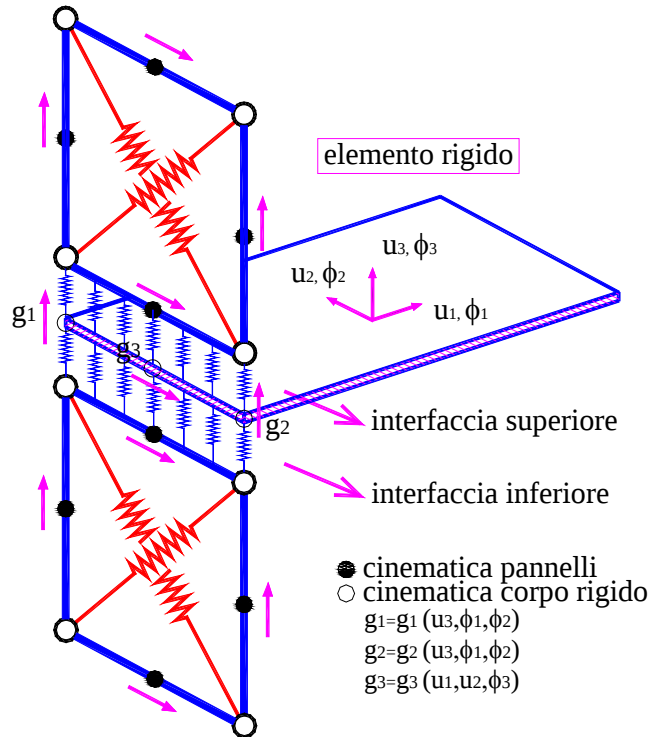


Figura 1.59. Interazione tra due pannelli di una parete e un elemento rigido

Interazioni tra le pareti in corrispondenza degli angoli

Nella modellazione 3D mediante assemblaggio di pareti piane, l'interazione tra le pareti verticali in corrispondenza dei cantonali non è rappresentabile in quanto ciascun pannello possiede gradi di libertà soltanto nel proprio piano. Tuttavia una collaborazione tra pannelli di pareti appartenenti a piani diversi si può ottenere inserendo delle interfacce rigide d'angolo che connettono i gradi di libertà longitudinali dei pannelli appartenenti a pareti diverse.

Interazione tra cordoli, architravi o tiranti e i macro-elementi

I cordoli e gli architravi vengono modellati attraverso elementi finiti non lineari di tipo beam a plasticità concentrata; la presenza di eventuali tiranti viene invece modellata mediante elementi reagenti solo allo sforzo assiale di trazione e non reagente a compressione tipo truss. L'influenza di tali elementi ha un ruolo significativo soprattutto nella stima della vulnerabilità degli edifici esistenti. A seconda del tipo di interazione che l'elemento finito scambia con la muratura, nel seguito si farà riferimento ai seguenti tipi di comportamento:

- *Asta libera*: si tratta di elementi tipo beam, esterni alla muratura che interagiscono con la muratura solo puntualmente (ad es. travi di impalcati semplicemente ammassate nelle pareti), come in figura 1.59;
- *Frame interagente o cordolo*: l'asta si trova inserita all'interno di una parete muraria ed interagisce con essa per tutta la sua lunghezza sia flessionalmente che assialmente (fig. 1.60).

Un elemento asta viene individuato dai due vertici di estremità denominati i e j . Il comportamento meccanico delle aste viene caratterizzato assegnando un legame momento/curvatura e un legame sforzo normale/allungamento specifico. Entrambi i legami possono essere non lineari.

Dal punto di vista flessionale, la modellazione delle progressive plasticizzazioni delle aste e, nel caso di elementi interagenti, dell'interazione con la muratura, viene ottenuta prevedendo la possibilità di suddividere l'asta in un numero arbitrario di sottoelementi mediante l'introduzione di nodi intermedi che verranno disposti in corrispondenza delle molle flessionali dell'interfaccia (fig. 1.60).

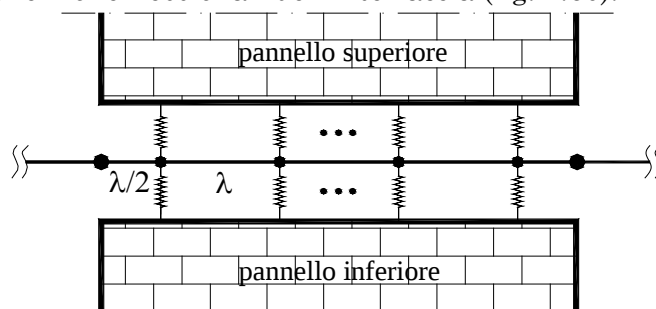


Figura 1.60. Modellazione di un'asta inserita all'interno della muratura

L'aspetto più importante legato all'introduzione degli elementi asta è soprattutto la modellazione dell'interazione tra questi e gli elementi murari.

Le aste libere interagiscono con la muratura solo in corrispondenza degli estremi. Esse possono simulare elementi in calcestruzzo esterni alla muratura e ad essa connessi solo in modo puntuale oppure, molto più frequentemente, elementi quali tiranti o catene (Figura 1.59), che vengono ancorati in corrispondenza degli angoli di un edificio o in corrispondenza delle zone della parete in muratura interessate dalla presenza dei capichiave.

Il collegamento degli elementi frame ai pannelli avviene attraverso molle non-lineari di interfaccia. Per le aste giacenti sul piano della muratura il grado di ammorsamento dell'elemento dipende dalla lunghezza della parte di elemento a contatto con la muratura.

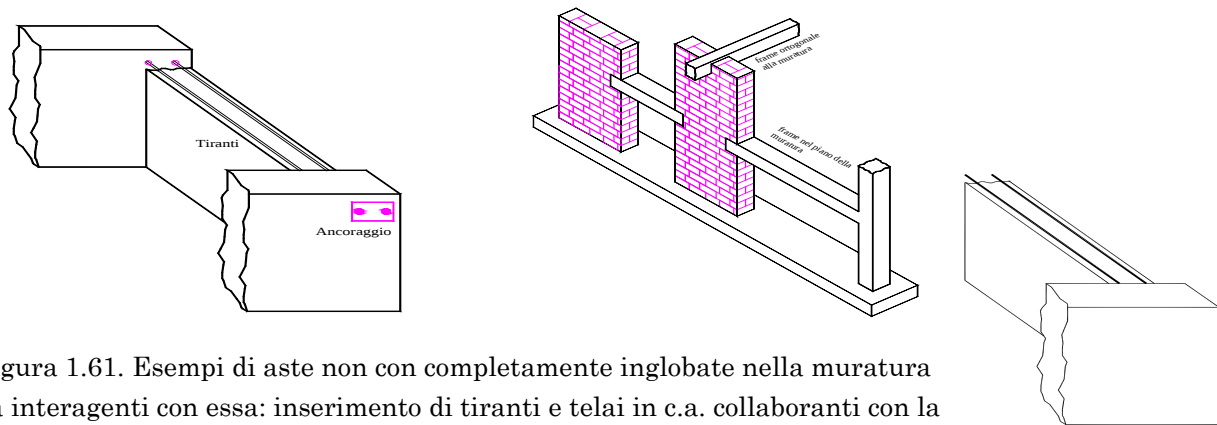


Figura 1.61. Esempi di aste non completamente inglobate nella muratura ma interagenti con essa: inserimento di tiranti e telai in c.a. collaboranti con la struttura muraria

Se infine un'asta è inserita tra due pannelli murari, avviene sia un'interazione flessionale che a scorrimento tra gli elementi in contatto (Figura 1.62).

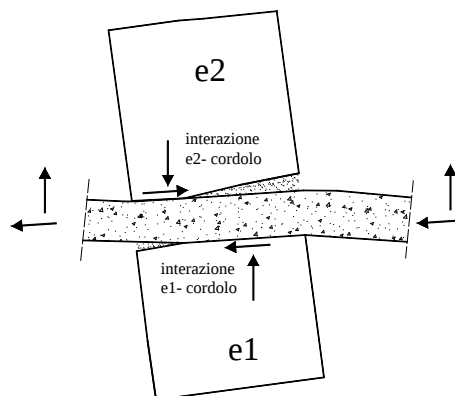


Figura 1.62. Interazioni possibili tra un'asta inserita nella muratura e i pannelli

9.6.2. Modello spaziale

Il macro-elemento spaziale rappresenta la naturale evoluzione del macro-elemento piano descritto nei paragrafi precedenti a cui è stata aggiunta una terza dimensione in direzione trasversale e i corrispondenti tre gradi di libertà.

Per la modellazione del comportamento spaziale del macro-elemento, ai sei gradi di libertà da corpo rigido nello spazio occorre aggiungere il grado di libertà necessario a rendere l'elemento articolato nel piano della muratura per descriverne la deformabilità a taglio. Pertanto la cinematica di ogni macro-elemento è controllata da sette gradi di libertà (Figura 1.63) e la generica interfaccia corrispondente a pannelli contigui è descritta dai dodici gradi di libertà che consentono di descrivere i moti rigidi nello spazio dei due lati rigidi piani dei pannelli ad esso afferenti.

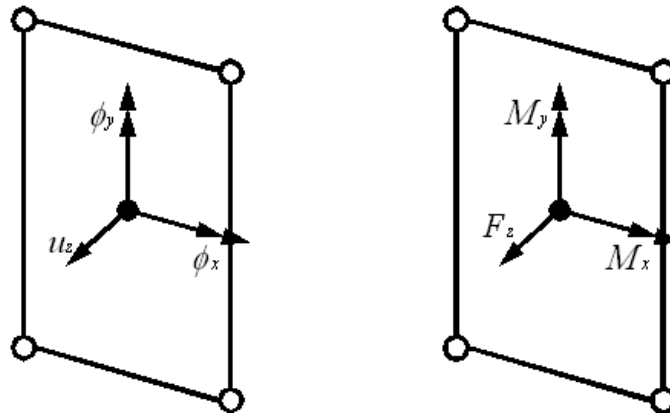


Figura 1.63. Gradi di libertà e forze duali fuoripiano

Pertanto l'interfaccia 3D è rappresentata da un modello meccanico equivalente costituito da due piani rigidi, inizialmente paralleli e coincidenti con le facce a contatto dei due pannelli. Tali superfici hanno forma rettangolare vengono discretizzate nelle due direzioni da più file di molle non-lineari ortogonali (Figura 1.64), in analogia ai modelli a fibre utilizzati nel più generale contesto delle modellazioni agli elementi finiti non-lineari.

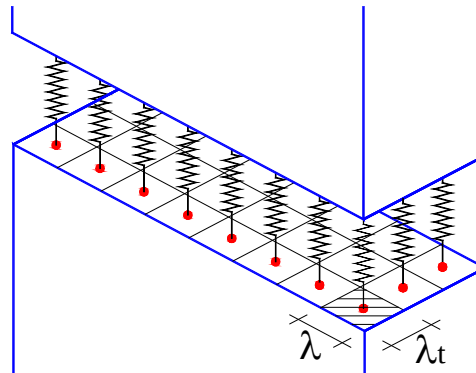


Figura 1.64. Molle ortogonali d'interfaccia

Ogni molla è rappresentativa di una fibra di muratura di impronta pari a quella della discretizzazione considerata.

Le file vengono disposte ad interasse costante (λ_i) che viene determinato secondo un procedimento di taratura basato su una equivalenza

flessionale tra la parete muraria e lo schema discreto equivalente (Figura 1.65).

È facile osservare che la modellazione proposta permette di schematizzare agevolmente anche casi di flessione deviata in campo non-lineare, e che il criterio adottato tiene conto della dipendenza del momento resistente dallo sforzo normale.

Inoltre tale modellazione consente di cogliere i principali meccanismi di collasso di primo modo.

L'apertura delle fessure corrisponderà, nel modello discreto, alla rottura per trazione delle molle ortogonali di interfaccia; la progressiva riduzione di rigidezza della sezione determinerà in definitiva il ribaltamento della parete (Figura 1.66). Tuttavia tali fenomeni fessurativi possono essere colti solo in corrispondenza degli elementi di interfaccia, e appare quindi evidente che nello studio del comportamento fuori-piano, più che nel piano, l'efficacia della modellazione risulta condizionata alla mesh impiegata nella discretizzazione della struttura. Tale circostanza è dovuta al fatto che una maggiore discretizzazione della mesh consente di ampliare il dominio di ammissibilità cinematica dei meccanismi di primo modo potenzialmente attivabili.

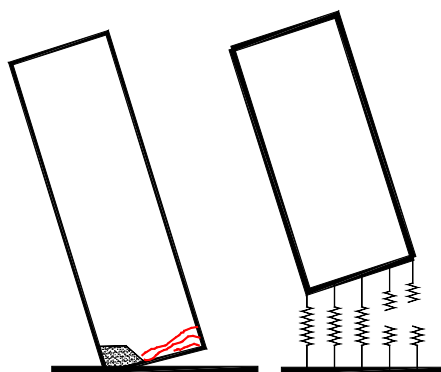


Figura 1.65. Meccanismo di ribaltamento fuoripiano in flessione retta

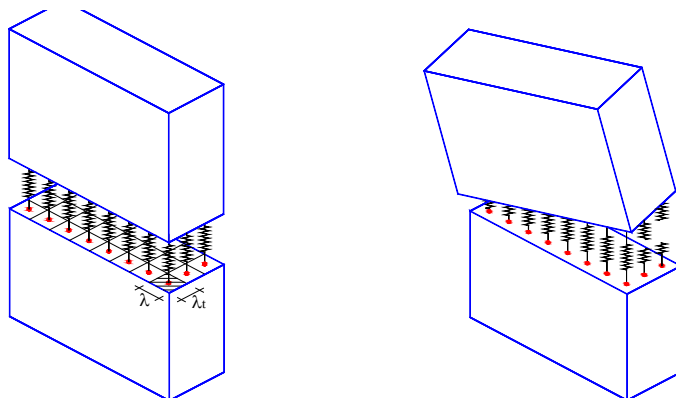


Figura 1.66. Suddivisione ideale della sezione trasversale degli elementi in file multiple di molle e modellazione di un pannello soggetto contemporaneamente ad azioni nel piano e fuoripiano

Le molle ortogonali alle interfacce piane hanno il compito di regolare la risposta flessionale del pannello sia nel piano che fuori piano. Tuttavia, essendo il pannello dotato di tutti i gradi di libertà da moto rigido nello spazio, occorre introdurre delle molle non-lineari destinate al controllo dei meccanismi di scorrimento fuori piano del pannello. Pertanto in ogni interfaccia sono state inserite due molle contenute nel piano dell'interfaccia e dirette trasversalmente rispetto alla muratura, come mostrato in figura 1.67. Tali molle non-lineari controllano i meccanismi di scorrimento fuori-piano e sono state poste ad una distanza pari ad $L/4$ rispetto agli estremi dell'interfaccia.

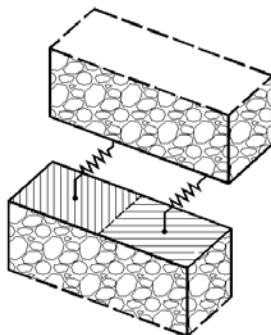


Figura 1.67. Posizionamento delle molle a scorrimento e relative aree di influenza

È evidente che l'inserimento di due molle a scorrimento fuori-piano consente anche la simulazione dello scorrimento torsionale attorno all'asse ortogonale all'interfaccia.

Nella figura 1.68 sono rappresentati degli schemi meccanici relativi al comportamento tridimensionale delle interfacce, separando per comodità il comportamento flessionale da quello a scorrimento.

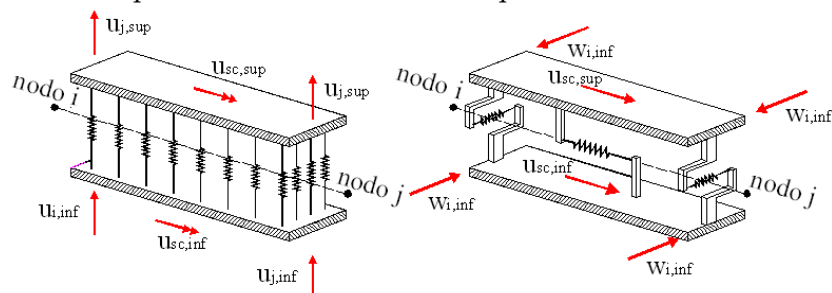


Figura 1.68. Modelli meccanici equivalenti e parametri lagrangiani delle interfacce tridimensionali; comportamento flessionale e comportamento a scorrimento

A partire dai singoli elementi che compongono un quadrilatero articolato, è possibile non solo simulare il comportamento del singolo concio di muratura, ma anche quello di un'intera struttura ottenuta discretizzandola mediante una mesh di macro-elementi interagenti tra loro mediante le interfacce discrete, come mostrato di seguito in figura 1.69.

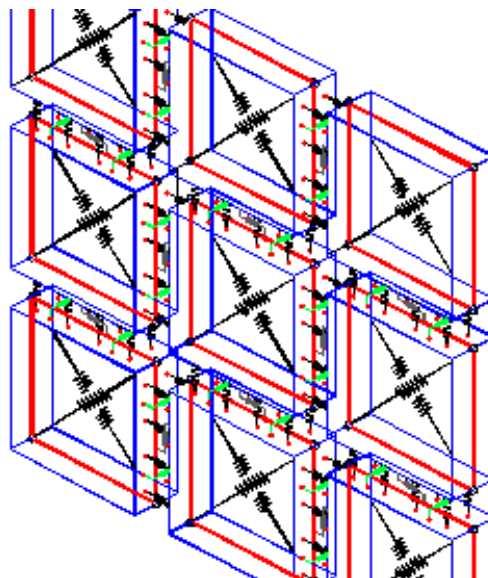


Figura 1.69. Muratura modellata mediante una mesh di macro-elementi

A seguire sono riportate, anche per il modello spaziale, le tipologie di interazioni introdotte nel modello. In particolare sono stati considerati l'interazione con gli orizzontamenti e gli ammortamenti tra pareti, il cui ruolo è fondamentale nella descrizione dei meccanismi di primo modo.

9.6.2.1. Interazione tra le pareti e gli impalcati

Per la modellazione dei meccanismi di interazione tra i pannelli ed elementi quali impalcati, cordoli, architravi etc., sono state introdotte delle interfacce che presentano una diversa disposizione delle molle non-lineari. Tali interfacce sono state denominate *FlessInteraction* (Figura 1.70) e *SlidInteraction* (Figura 1.71). La caratteristica comune ad entrambe le tipologie è quella di possedere dei nodi aggiuntivi che consentono la simulazione dei meccanismi di interazione con gli elementi esterni.

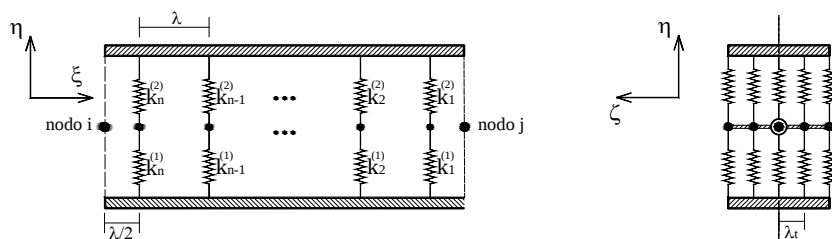


Figura 1.70. Schema statico dell'interfaccia *FlessInteraction*: comportamento nel piano e comportamento fuoripiano

Come per il modello piano, i diaframmi possono essere rigidi o deformabili. La principale differenza, rispetto al caso più semplice, è che in questo caso la cinematica degli elementi consente di simulare il meccanismo di scorrimento tra il diaframma e i pannelli mediante l'introduzione di una interfaccia *SlidInteraction*.

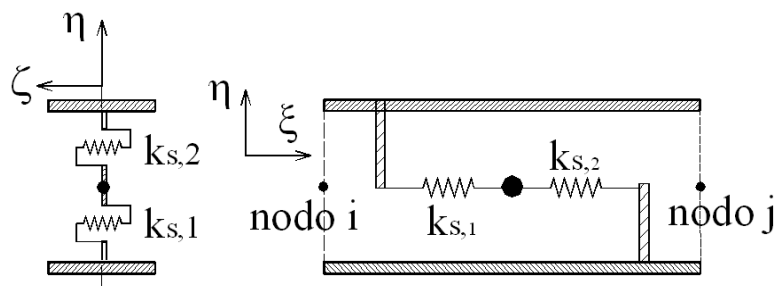


Figura 1.71. Molle a scorrimento: nel piano e fuoripiano

9.6.2.2. Interazioni tra le pareti in corrispondenza degli angoli

Un altro importante tipo di interazione da prendere in considerazione nella modellazione di edifici tridimensionali è quella di una parete con altre pareti in corrispondenza delle zone d'angolo (cantionali) o più in generale nei punti di intersezione tra due o più pareti. Tale interazione, in genere, viene resa possibile dalla stessa tessitura muraria tramite degli elementi sufficientemente ammortati in ciascuna parete e disposti a filari alterni.

Dal punto di vista meccanico, in corrispondenza di un punto di intersezione, è possibile distinguere tante giaciture significative quante sono le pareti convergenti nell'intersezione. In corrispondenza di ognuna di esse si avranno tensioni normali e tangenziali orientate in qualsiasi direzione (pareti con comportamento 3D). I possibili fenomeni di degrado in corrispondenza delle zone di intersezione consistono nell'apertura di fessure, schiacciamenti della muratura, o possibili scorrimenti (Figura 1.72).

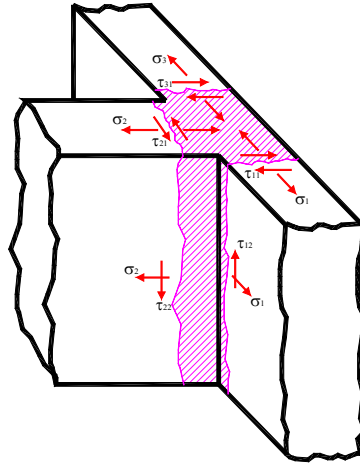


Figura 1.72. Tensioni scambiate dalle pareti nelle zone di estremità

Per la modellazione degli ammorsamenti in corrispondenza di una intersezione tra due o più pareti vengono inseriti degli elementi speciali detti *elementi speciali d'angolo*. Si tratta di elementi monodimensionali rigidi che possono essere orientati in maniera arbitraria nello spazio tridimensionale, e possono essere connessi ad un numero qualsiasi di altri elementi mediante interfacce 3D.

La figura 1.73 riporta la modellazione di una intersezione in cui tre pannelli appartenenti a pareti differenti vengono collegati mediante l'interposizione di un elemento d'angolo e tre interfacce. In generale verranno inserite tante interfacce quanti sono i pannelli e ciascuna interfaccia apparterrà al piano della parete del pannello connesso.

Gli elementi d'angolo sono pensati per modellare fisicamente la zona di muratura interclusa tra le pareti, comportandosi come corpi rigidi

interagenti con i pannelli mediante interfacce analoghe a quelle descritte sinora.

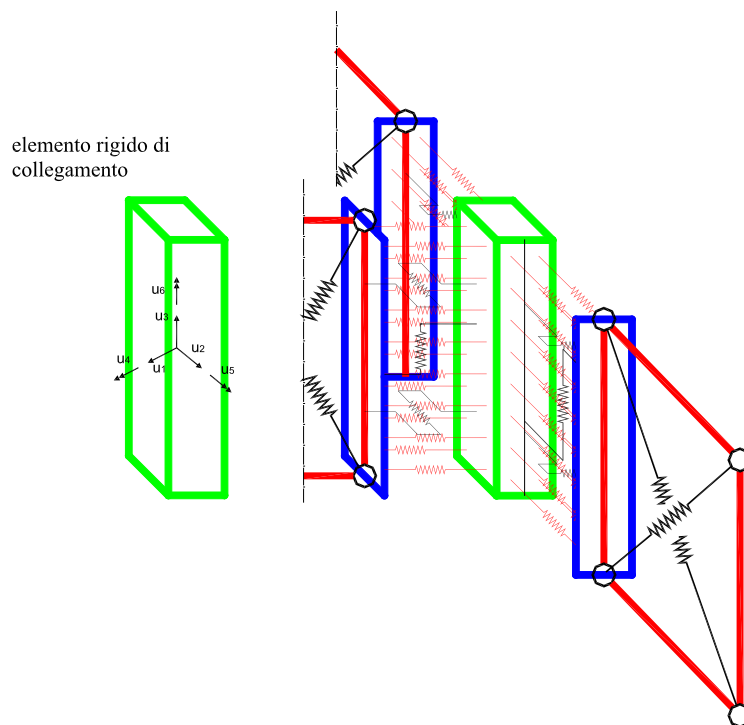


Figura 1.73. Modellazione di una intersezione tripla

10. Studio del comportamento non lineare di edifici storici

A causa dell'elevata complessità geometrica degli edifici storici e monumentali, dell'incertezza legata alla determinazione dei parametri meccanici, e alla carenza di strumenti di calcolo non lineare efficienti anche nel caso di edifici di grosse dimensioni, lo studio del comportamento non lineare di queste tipologie strutturali risulta ancora oggi oggetto di avanzate ricerche nel campo della modellazione numerica.

La scelta dello strumento di calcolo risulta determinante al fine di poter cogliere un comportamento strutturale realistico. Spesso queste tipologie strutturali sono caratterizzate dall'assenza di comportamento

scatolare, e dalla presenza di strutture spingenti (archi, volte e cupole) la cui simulazione risulta impossibile con tutti i modelli semplificati che si basano sull'ipotesi di piani rigidi, o quelli che non considerano il comportamento fuori piano della muratura. D'altro canto la modellazione di edifici di grandi dimensioni mediante software che impiegano il metodo agli elementi finiti non lineari, risulta limitata da problemi numerici, e dall'esigenza di un giudizio esperto per interpretarne i risultati.

Risultano pertanto significativi gli studi su edifici storici, in particolare quelli di culto, mirati alla determinazione del comportamento sismico di tali strutture. Le applicazioni presenti in letteratura soprattutto sulle chiese (Betti e Vignoli, 2008), ma anche su edifici storici quali torri (Carpinteri et al., 2005) e palazzi (Mallardo et al. 2007) impiegano generalmente modelli solidi, a causa del fatto che si riscontrano generalmente spessori significativi. Vengono generalmente condotte analisi lineari su modelli globali (Aras et al., 2011), e analisi non lineari su modelli locali di dettaglio.

Altre volte vengono studiate solo alcune parti significative dell'organismo strutturale (Brencich et al., 2001).

Uno studio significativo, che fa uso di analisi dinamiche non lineari su modelli globali (Mendes e Lourenço, 2010) di edifici storici residenziali facendo uso di elementi piani, dimostra la possibilità di utilizzare sofisticate analisi anche nel campo degli edifici storici.

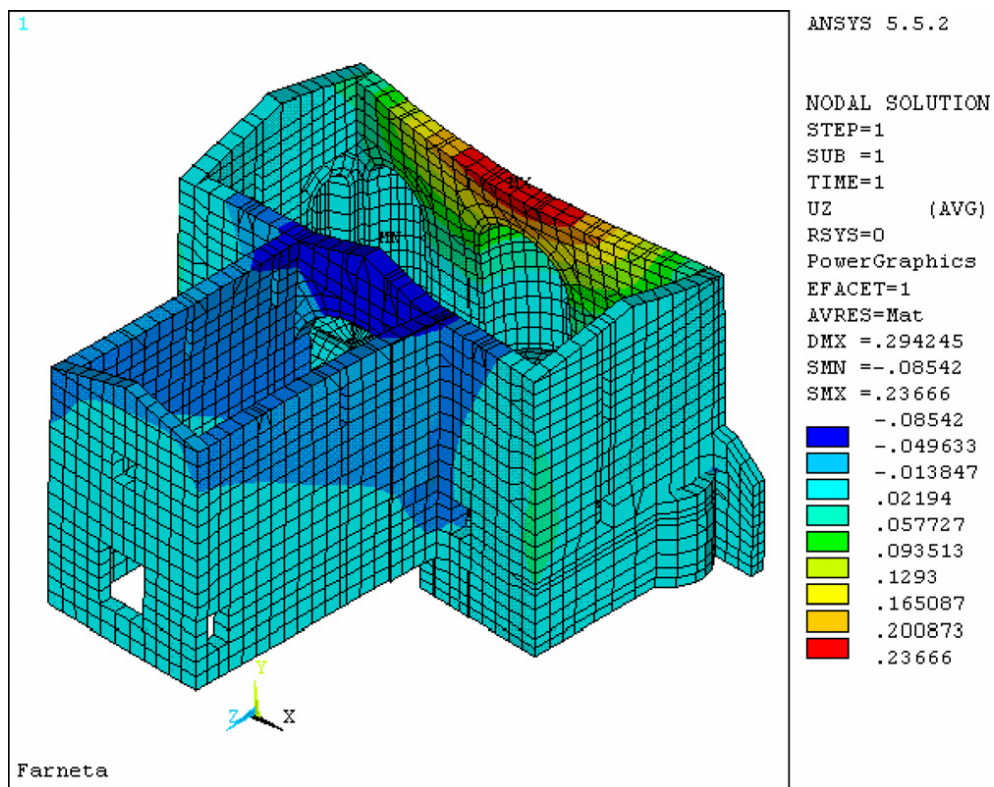


Figura 1.74. Esempio di modellazione completa di una chiesa (da Vignoli, 2008)

Altre volte vengono studiate solo alcune parti significative dell'organismo strutturale (Brencich et al., 2001).

Bibliografia

- [1] Acary, V., Jean, M., 1998, “*Numerical simulation of monuments by the contact dynamics method*”, in Monument 98 - Workshop on Seismic Performance of Monuments, Lisbon: LNEC, 69-78.
- [2] Addessi, D., Sacco, E., Paolone, A., 2010, “*Cosserat model for periodic masonry deduced by nonlinear homogenization*”, European Journal of Mechanics A/Solids **29**, 724-737.
- [3] ADINA, R&D Inc., 2005, Report ARD 01-7, ADINA Theory and Modeling Guide.
- [4] Anthoine, A., 1995, “*Derivation of the in-plane elastic characteristics of masonry through homogenization theory*”, International Journal of Solids and Structures **32**(2), 137-163.
- [5] Anthoine, A., 1997, “*Homogenisation theory*”, International Journal of Solids and Structures **32**(2), 137-163.
- [6] Aras, F., Krstevska, L., Altay, G., Tashkov, L., 2011, “*Experimental and numerical modal analyses of a historical masonry palace*”, Construction and Building Materials **25**, 81-91.
- [7] Baggio, C., Trovalusci, P., 1998, “*Limit analysis for no-tension and frictional three-dimensional discrete systems*”, Mech. Struct. Mach. **26**(3): 287-304.
- [8] Bakhvalov, N., Panasenko, G., 1989, “*Homogenization: averaging processes in periodic media*”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.
- [9] Barbosa, R. E., 1996, “*Discontinuous structural analysis*”, in Proceedings of the 11th World Conference on Earthquake Engineering, Elsevier, Paper n. 830.
- [10] Beer, G., 1985, “*An Isoparametric joint \ interface element for finite element analysis*”, Int. J. Numer. Meth. Enging. **21**, 585-600.

- [11] Benvenuto, E., 1991. *"An introduction to the history of structural mechanics. Volume II: Vaulted Structures and Elastic Systems"*, Springer-Verlag, Berlin, New York, pp. 307–554.
- [12] Besdo, D., 1985, *"Inelastic behaviour of plane frictionless block systems describe as Cosserat media"*, Archives in Mechanics **37**(6), 603-619.
- [13] Betti, M., Vignoli, A., 2008, *"Modelling and analysis of a Romanesque church under earthquake loading: assessment of seismic resistanc"*, Engineering Structures **30**, 352-367.
- [14] Bicanic, N., Ponniah, D., Robinson, J., 2001, *"Discontinuous deformation analysis of masonry bridges"*, in Computational Modelling of Masonry, Brickwork and Blockwork Structures, ed. J. W. Bull, Stirling UK, Saxe-Coburg Publications, 177-196.
- [15] Block, P., Ciblac, T., Ochsendorf, J., 2006, *"Real-time limit analysis of vaulted masonry buildings"*, Computers and Structures **84**, 1841-1852.
- [16] Boffi, G., Casolo, S., 1998, *"Non-linear dynamic analysis"*, in Monument 98 - Workshop on Seismic Performance of Monuments, Lisbon: LNEC, 99-108.
- [17] Bosiljkov, V., 2004, *"Report on the State of the Art on Structural Modelling of Historical Masonry Structures"*, On-site investigation techniques for the structural evaluation of historic masonry buildings.
- [18] Braga, F., Liberatore, D., 1990, *"A finite element for the analysis of the response of masonty buildings"*, Proc. Of the 5th North American Masonry Conference, Urbana, pp.201-212.
- [19] Braga, F., Liberatore, D., Spera, G., 1997, *"A computer program for the seismic analysis of complex masonry buildings"*, in G.N. Pande, J. Middleton, B.Kralj (eds.), Computer Methods in Strustural Masonry – 4; Proc. Inter. Symp., Firenze, 3-5 Settembre, 1997, 309-316, London: E&FN spons.
- [20] Brencich, A., Lagomarsino, S., 1997, *"Un modello a macroelementi per l'analisi ciclica di pareti murarie"*, Atti 8° convegno nazionale ANIDIS, Taormina, 21-24 Settembre.
- [21] Brencich, A., Gambarotta, L., Ghia, A., 2001, *"Structural models for the assessment of the masonry dome of the Basilica of S. Maria of Carignano in Genoa"*, Historical Constructions, Lourenço, P.B., Roca, P., (Eds.), Guimarães, 675-684.

- [22] Brookes, C. L., Mehrkar-Asl, S., 1998, “*Numerical modeling of masonry using discrete elements*”, in *Seismic Design Practice into the Next Century*, ed. E. D. Booth, Balkema, Rotterdam, 131-137.
- [23] Caddemi, S., Calì, I., Cannizzaro, F., Marletta, M., Pantò, B., 2010, “*Seismic vulnerability of the Concordia Temple*”, *Advanced Materials Research Vols. 133-134*, pp. 759-764, Trans Tech Publications, Switzerland, DOI: 10.4028/www.scientific.net/AMR.133-134.759.
- [24] Calderini, C., Lagomarsino, S., 2006, “*A micromechanical inelastic model for historical masonry*”, *Journal of Earthquake Engineering* **10**(4): 453-479, DOI: 10.1142/S1363246906002608.
- [25] Calderini, C., Lagomarsino, S., 2008, “*Continuum model for in-plane anisotropic inelastic behavior of masonry*”, *Journal of Structural Engineering*, Vol. 134 No. 2, pp. 209-220, DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2008)134:2(209).
- [26] Calì, I., Marletta, M., Pantò, B., 2005. “*A simplified model for the evaluation of the seismic behaviour of masonry buildings*”, 10th International Conference on Civil, Structural and Environmental Engineering Computing, August 30 – September 2, Rome, Italy.
- [27] Calì, I., Marletta, M., Pantò, B., 2008. “*A discrete element approach for the evaluation of the seismic response of masonry buildings*”, 14th World Conference of Earthquake, October 12 -17, Beijing, China.
- [28] Carbone, V. I., Codegone, M., 2005, “*Homogenization process of stratified masonry*”, *Mathematical and Computer Modelling* **42**, 375-380.
- [29] Carpinteri, A., Invernizzi, S., Lacidogna, G., 2005, “*In situ damage assessment and nonlinear modelling of a historical masonry tower*”, *Engineering Structures* **27**, 387-395.
- [30] Casapulla, C., D’Ayala, D., 2001, “*Lower-bound approach to the limit analysis of 3D vaulted block masonry structures*”, in Hughes, T. G., Pande, G. N. (Eds.), *Computer Methods in Structural Masonry*, vol. 5, Rome, Italy, pp. 177-183.
- [31] Casolo, S., 2000, “*Modelling the out-of-plane seismic behaviour of masonry walls by rigid elements*”, *Earth. Eng. Struc. Dyn.*, **29**(12), 1797-1813.

- [32] Casolo, S., 2004, “*Modelling in-plane micro-structure of masonry walls by rigid elements*”, International Journal of Solids and Structures **41**, 3625-3641.
- [33] Casolo, S., 2006, “*Macroscopic modeling of structured materials: Relationship between orthotropic Cosserat continuum and rigid elements*”, International Journal of Solids and Structures **43**, 475-496.
- [34] Casolo, S., Peña, F., 2007, “*Rigid element model for in-plane dynamics of masonry walls considering hysteretic behaviour and damage*”, Earthquake Engineering & Structural Dynamics **36**(8), 1029-1048.
- [35] Casolo, S., Sanjust, C. A., 2009, “*Seismic analysis and strengthening design of a masonry monument by a rigid body spring model: The “Maniace Castle” of Syracuse*”, Engineering Structures, **31**, 1447-1459.
- [36] Cavaleri, L., Lagomarsino, S., Podestà, S., Zingone, G., 1999, “*Vulnerability models and damage scenarios for the churches, in The Catania Project: earthquake e damage scenarios for a high risk area in the Mediterranean*”, E. Faccioli and V. Pessina (Eds), CNR - Gruppo Nazionale per la Difesa dai Terremoti, pp. 205-211, Rome (ISBN: 88-900449-0-X).
- [37] Cecchi, A., Di Marco, R., 2000, “*Homogeneization of masonry walls with a numerical oriented procedure. Rigid or elastic blocks?*”, European J. Mech. A. Solids **19**, 535–546.
- [38] Cecchi, A., Rizzi, N.L., 2001, “*Heterogeneous material. A mixed homogeneization rigidification technique*”, Internat. J. Solids Structures **38**/1, 29–36.
- [39] Cecchi, A., Sab, K., 2002a, “*A multi-parameter homogenization study for modelling elastic masonry*”, European J. Mech. A. Solids **21**, 249–268.
- [40] Cecchi, A., Sab, K., 2002b, “*Out of plane model for heterogeneous periodic materials: the case of masonry*”, European J. Mech. A. Solids **21**, 715–746.
- [41] Cecchi, A., Milani, G., Tralli, A., 2005, “*Validation of Analytical Multiparameter Homogenization Models for Out-of-Plane Loaded Masonry Walls by Means of the Finite Element Method*”, Journal of Engineering Mechanics, Vol. 131, No. 2, 185-198, DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9399(2005)131:2(185).
- [42] Cecchi, A., Milani, G., Tralli, A., 2007, “*A Reissner-Mindlin limit analysis model for out-of-plane loaded running bond masonry*”, International Journal of Numerical and Analytical Methods in Engineering, **72**, 1031–1054.

- nry walls*”, International Journal of Solids and Structures, **44**, 1438-1460.
- [43] Chengqing, W., Hong, H., 2006, “*Derivation of 3D masonry properties using numerical homogenization technique*”, Numerical Methods in Engineering **66**(11), 1717-1737, DOI: 10.1002/nme.1537.
 - [44] Cluni, F., Gusella, V., 2003, “*Homogenization of non-periodic masonry structures*”, International Journal of Solids and Structures **41**, 1911-1923.
 - [45] Creazza, G., Matteazzi, R., Saetta, A., Vitaliani, R., 2002, “*Analyses of Masonry Vaults: A Macro Approach Based on Three-Dimensional Damage Model*”, Journal of Structural Engineering, DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2002)128:5(646)
 - [46] Creazza, G., Saetta, A., Scotta, R., Vitaliano, R., Onate, E., 1995, “*Mathematical simulation of structural damage in historical buildings*” STREMA 95. Structural Studies of Historical Buildings, Crete, Greece, May 22-24, Architectural Studies. Materials & Analysis, Brebbia and Leftheris, eds., Vol. 1, Comp Mech. 111-118
 - [47] Cucco, F., Panzeca, T., Terravecchia, S., “*The program KARNAK SGBEM Release 1.0*”, Palermo, www.bemsoft.it.
 - [48] Cundall, P. A., 1971, “*A computer model for simulating progressive large scale movements in blocky rock systems*”, in Proceedings of the Symposium on Rock Fracture (ISRM), vol. 1, paper II-8, Nancy, France.
 - [49] Cundall, P. A., 1988, “*Formulation of a three-dimensional distinct element model – Part I: A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks*”, International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, **25**(3): 107-116.
 - [50] D’Asdia, P. Viskovic, A., 1993, “*Un modello di calcolo della resistenza ultima delle pareti in muratura*”, Atti 6° convegno nazionale ANIDIS, Perugia, 13-15 Ottobre.
 - [51] D’Asdia, P. Viskovic, A., 1996, “*Analisi tridimensionale della resistenza di edifici in muratura, storici o recenti, soggetti ad azioni orizzontali di tipo sismico*”, Convegno Nazionale La meccanica delle murature tra teoria e progetto, Messina.
 - [52] De Buhan, P., De Felice, G., 1997, “*A homogenization approach to the ultimate strength of brick masonry*”, J. Nech. Phys. Solids, Vol. 45 No. 7, pp. 1085-1104.

- [53] De Luca, A., Giordano, A., Mele, E., 2004, “*A simplified procedure for assessing the seismic capacity of masonry arches*”, Engineering Structures **26**, 1915-1929.
- [54] De Luca, A., Giordano, A., Mele, E., Romano, A., 2007, “*A simple formula for predicting the horizontal capacity of masonry portal frames*”, Engineering Structures **29**, 2109-2123.
- [55] De Saxcé, G., BoussHine, L., 1998, “*Limit analysis theorems for implicit standard materials: application to the unilateral contact with dry friction and the non-associated flow rules in soils and rocks*”, Int. J. Mech. Sci. **40**(4), 387-398.
- [56] Di Pasquale, S., 1992, “*New trends in the analysis of masonry structures*”, Mechanica **27**, 173-184.
- [57] Faria, R., Oliver, J., Cervera, M., 1998, “*A strain-based viscous-plastic-damage model for massive concrete structures*”, Int. J. Solids Struct., **35**(14), 1533-1558.
- [58] Formica, G., Sansalone, V., Casciaro, R., 2002, “*A mixed solution strategy for the nonlinear analysis of brick masonry walls*”, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **191**, 5847-5876.
- [59] Fouchal, F., Lebon, F., Titeux, I., 2009, “*Contribution to the modeling of interfaces in masonry construction*”, Construction and Building Materials **23**, 2428-2441.
- [60] Gambarotta, L., Lagomarsino, S., 1997a, “*Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part I: the mortar joint model and its applications*”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, **26**(4): 423-439, DOI:10.1002/(SICI)1096-9845(199704)26:4<423::AID-EQE650>3.0.CO;2#.
- [61] Gambarotta, L., Lagomarsino, S., 1997b, “*Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part II: The continuum model and its application*”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, **26**(4): 440-462.
- [62] Giambanco, G., Di Gati, L., 1997, “*A cohesive interface model for the structural mechanics of block masonry*”, Mechanica Research Communications **24**(5), 503-512.
- [63] Giambanco, G., Rizzo, S., Spallino, R., 2001, “*Numerical analysis of masonry structures via interface models*”, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **190**, 6493-3511.
- [64] Gilbert, M., Casapulla, C., Ahmed, H. M., 2006, “*Limit analysis of masonry block structures with non-associative frictional*

- joints using linear programming*", Computers and Structures, **84**, 873-887.
- [65] Giordano, A., Mele, E., De Luca, A., 2002, "*Modelling of historical masonry structures: comparison of different approaches through a case study*", Engineering Structures **24**, 1057-1069.
 - [66] Giuffrè, A., (A cura di:), 1993, "*Sicurezza e conservazione dei centri storici – Il caso Ortigia*", Ed. Laterza.
 - [67] Hart, R. D., Cundall, P. A., Lemos, J. V., 1988, "*Formulation of a three-dimensional distinct element model – Part II: mechanical calculations*", International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences, **25**(3): 117-125.
 - [68] Hatzigeorgiou, G. D., Beskos, D. E., "*Static analysis of 3D damaged solids and structures by BEM*", Engineering Analysis with Boundary Element **26**, 521-526.
 - [69] Heyman, J., 1969, "*The safety of masonry arches*", Int. Jou. of Mech. Sci. **11**.
 - [70] Heyman J. 1972, "*Coulomb's Memoir on Statics; an essay in the history of civil engineering*", Cambridge University Press; reprinted Imperial College Press 1999.
 - [71] Heyman, J., May 26, 1995, "*The stone skeleton*", Cambridge University Press.
 - [72] Hocking, G., Mustoe, G. G. W., Williams, J. R., 1987, "*Dynamic analysis for generalized three dimensional contact and fracturing of multiple bodies*", in NUMETA '87, Rotterdam: Balkema.
 - [73] Irizarry, J., Podestà, S., Resemini, S., 2002, "*Capacity curves of monumental-heritage elements: the Santa Maria del Mar Church in Barcelona*," International Conference on Earthquake Loss Estimation and Risk Reduction", Bucarest, October 2002.
 - [74] Jean, M., 1995 "*Frictional contact in collections of rigid or deformable bodies: numerical simulation of geomaterial motions*", in Mechanics of Geomaterial Interfaces, eds. A.P.S. Selvadurai and M. J. Boulon, Amsterdam: Elsevier, 463-486.
 - [75] Lagomarsino, S., Podestà, S., 2000, "*Il comportamento sismico della facciata nelle chiese di Catania*", Proc. of International Congress "Quarry - Laboratory - Monument", I vol., settembre 2000, Pavia.

- [76] Lagomarsino, S., Maggiolo, L., Podestà, S., 2001, “*Vulnerabilità sismica delle chiese: proposta di una metodologia integrata per il rilievo la prevenzione ed il rilievo del danno in emergenza*”, Atti del X Convegno Nazionale L'Ingegneria Sismica in Italia, Potenza 2001.
- [77] Lagomarsino, S., 2002, “*I modelli di calcolo per la vulnerabilità sismica delle chiese ed il progetto per gli interventi di miglioramento*”, in Il patrimonio culturale dall'emergenza sismica del 1997 al piano di ripristino recupero restauro. Il caso delle Marche, Silvana Editoriale, pp. 276-282.
- [78] Lagomarsino, S., Podestà, S., Resemini, S., 2002, “*Seismic response of historical churches*,” Proc.12th European Conference on Earthquake Engineering, London, September 2002, **10** (Pubblicazione su CD-ROM, ISSN 0080440495).
- [79] Lagomarsino, S., Podestà, S., Resemini, S., Curti, E., Parodi, S., 2005, “*Mechanical models for the seismic vulnerability assessment of churches*”, in Structural Analysis of Historical Constructions (C. Modena, P.B. Lourenço and P. Roca Eds), Proc. of IV Int. Seminar SAHC, Padova, Italy, A.A. Balke-ma, London (UK), ISBN: 04 1536 379 9, 2, pp. 1091-1101.
- [80] Lee, J. S., Pande, G. N., Middleton, J., Kralj, B., 1996, “*Numerical modeling of brick masonry panels subject to lateral loadings*”, Computers and Structures **61**: 735-745, DOI: 10.1016/0045-7949(95)00361-4.
- [81] Lemos, J. V., 2007, “*Discrete element modeling of masonry structures*”, International Journal of Architectural Heritage **1**: 190-213.
- [82] Lofti, H. R., Shing, P. B., 1994, “*Interface model applied to fracture of masonry structures*”, J. Struct. Engrg. ASCE **120**(1), 63-80.
- [83] Lopez, J., Oller, S., Oñate, E., Lubliner, J., 1999, “*A homogeneous constitutive model for masonry*”, International Journal for Numerical Methods in Engineering **46**(10): 1651-1671, DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19991210)46:10<1651::AID-NME718>3.0.CO;2-2.
- [84] Lourenço, P. B., 1996, “*A matrix formulation for the elastoplastic homogenisation of layered materials*”, Mechanics of Cohesive-Frictional Materials **1**(3): 273-294, DOI: 10.1002/(SICI)1099-1484(199607)1:3<273::AID-CFM14>3.0.CO;2-T.

- [85] Lourenço, P. B., Rots, J., 1997a, “*A multi-surface interface model for the analysis of masonry structures*”, Journal of Engineering Mechanics ASCE **123**(7), 660-668.
- [86] Lourenço, P.B., de Borst, R., Rots, J.G., 1997b, “*A plane stress softening plasticity model for orthotropic materials*”, Int. Journ. for numerical methods in Engineering **40**, 4033-4057.
- [87] Lourenço, P. B., 2000, “*Anisotropic Softening Model for Masonry Plates and Shells*”, Journal of Structural Engineering **126**(9): 1008-1016, DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2000)126:9(1008).
- [88] Lourenço, P.B., 2002, “*Computations on historic masonry structures*”, Prog. Struct. Engrg Mater. **4**: 301-319 (DOI: 10.1002/pse.120).
- [89] Lourenço, P.B., Pina-Henriques, J., 2006, “*Validation of analytical and continuum numerical methods for estimating compressive strength of masonry*”, Computers and Structures **84**, 1977-1989.
- [90] Lourenço, P.B., Milani, G., Tralli, A., Zucchini, A., 2007, “*Analysis of masonry structures: review of and recent trends in homogenization techniques*”, Can. J. Civ. Eng. **34**: 1443-1457 (DOI: 10.1139/L07-097).
- [91] Luciano, R., Sacco, E., 1997, “*Homogenisation technique and damage model for old masonry material*”, International Journal of Solids and Structures **34**: 3191-3208, DOI: 10.1016/S0020-7683(96)00167-9.
- [92] Luciano, R., Sacco, E., 1998, “*A damage model for masonry structures*”, European J. Mech. A. Solids **17**, n° 2, 285–303.
- [93] Ma, M. A., Pan, A. D. E., Luan, M., Gebara, J. M., 1996, “*Seismic analysis of stone arch bridges using discontinuous deformation analysis*”, in Proceedings of the 11th World Conference on Earthquake Engineering, paper n. 1551, Amsterdam, Elsevier.
- [94] Magenes, G., Calvi, G.M., 1996, “*Prospettive per la calibrazione di metodi semplificati per l'analisi sismica di pareti murarie*”, Atti del Convegno Nazionale La Meccanica delle Murature tra Teoria e Progetto, Messina, 18-20 settembre 1996, Pitagora Ed. Bologna.
- [95] Magenes, G., Calvi, G. M., 1997, “*In plane seismic response of brick masonry walls*”, Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 26, 1091-1112.

- [96] Magenes, G., Della Fontana, A., 1998, “*Simplified Non-linear Seismic Analysis of Masonry Buildings*”, Proc. of the British Masonry Society, Vol. 8, October 1998, pp. 190-195.
- [97] Magenes, G., Bolognini, D., Braggio, C., 2000, “*Metodi semplificati per l'analisi sismica non lineare di edifici in muratura*”, CNR-Gruppo Nazionale per la Difesa dai Terremoti – Roma.
- [98] Maier, G., Papa, E., Nappi, A., 1991, “*On damage and failure of unit masonry*”, in Experimental and numerical methods in earthquake engineering, Balkema, Brussels, pp. 223-245.
- [99] Mallardo, V., Malvezzi, R., Milani, E., Milani, G., 2008, “*Seismic vulnerability of historical masonry buildings: A case study in Ferrara*”, Engineering Structures **30**, 2223-2241.
- [100] Mamaghani, I. H. P., Aydan, O., Kajikawa, Y., 1999, “*Analysis of masonry structures under static and dynamic loading by discrete finite element method*”, Journal of Structural Mechanics and Earthquake Engineering (JSCE) **16**(2): 75-86.
- [101] Massonet, C.H, Save, M, 1980, “*Calcolo plastico a rottura delle costruzioni*”, Editrice: CLUP (M1).
- [102] Mayorca, P., Meguro, K., 2003, “*Numerical simulation of masonry structures using the Applied Element Method*”, in Computer Methods in Structural Masonry – 6, eds. T. G. Hughes e G. N. Pande, Swansea: Computers and Geotechnics Ltd., 32-38.
- [103] Mendes, N., Lourenço, P.B., 2010, “*Seismic Assessment of Masonry “Gaioleiro” Buildings in Lisbon, Portugal*”, Journal of Earthquake Engineering **14**, 80-101 (DOI: 10.1080/13632460902977474).
- [104] Milani, E., Milani, G., Tralli, A., 2008, “*Limit analysis of masonry vaults by means of curved shell finite elements and homogenization*”, International Journal of Solids and Structures **45**, 5258-5288.
- [105] Milani, G., Lourenço, P. B., Tralli, A., 2006a, “*Homogenised limit analysis of masonry walls, Part I: Failure surfaces*”, Computers and Structures **84**, 166-180.
- [106] Milani, G., Lourenço, P. B., Tralli, A., 2006b, “*Homogenised limit analysis of masonry walls, Part II: Structural examples*”, Computers and Structures **84**, 181-195.
- [107] Milani, G., Lourenço, P. B., Tralli, A., 2006c, “*Homogenization approach for the limit analysis of out-of-plane loaded masonry walls*”, Journal of Structural Engineering Vol. 132 No. 10,

- pp. 1650-163 (DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2006)132:10(1650)).
- [108] Milani, G., Lourenço, P. B., Tralli, A., 2007, “*3D homogenized limit analysis of masonry buildings under horizontal loads*”, Engineering Structures **29**, 3134-3148.
 - [109] Milani, G., 2009, “*Homogenized limit analysis of FRP-reinforced masonry walls out-of-plane loaded*”, Comput. Mech. **43**: 617–639 (DOI: 10.1007/s00466-008-0334-7).
 - [110] Mühlhaus, H.-B., 1993, “*Continuum models for layered soil and blocky rock*”, in Comprehensive rock engineering, Vol. 2, Pergamon Press, Oxford.
 - [111] Munjiza, A., Owen, D. R. J., Bicanic, N., 1995, “*A combined finite-discrete element method in transient dynamics of fracturing solids*”, Engineering Computations **12**:145-174.
 - [112] Munjiza, A., 2004, “*The combined finite-discrete element method*”, Chichester: John Wiley.
 - [113] Oliveira, D. V., Lourenço, P. B., 2004, “*Implementation and validation of a constitutive model for the cyclic behavior of interface elements*”, Computers and Structures **82**, 1451-1461.
 - [114] Orduña, A., Lourenço, P.B., 2003, “*CAP model for limit analysis and strengthening of masonry structures*”, Int. Struct. Eng. **129**: 1367-1375.
 - [115] Orduña, A., Lourenço, P. B., 2005a, “*Three-dimensional limit analysis of rigid blocks assemblages. Part I: Torsion failure on frictional interfaces and limit analysis formulation*”, International Journal of Solids and Structures **42**: 5140-5160.
 - [116] Orduña, A., Lourenço, P. B., 2005b, “*Three-dimensional limit analysis of rigid blocks assemblages. Part II: Load-path following solution procedure and validation*”, International Journal of Solids and Structures **42**: 5161-5180.
 - [117] Pagnoni, T., 1994, “*Seismic analysis of masonry and block structures with the discrete element method*”, in Proceedings of the 10th European Conference on Earthquake Engineering, ed. G. Duma, Rotterdam: Balkema, vol. 3, 1669-1674.
 - [118] Pagnoni, T., Vanzi, I., 1995, “*Experimental and numerical study of the seismic response of block structures*”, in Computer Methods in Structural Masonry – 3, eds. J. Middleton and G. N. Pande, Swansea: Books & Journal International, 213-222.

- [119] Page, A. W., 1978, "*Finite element model for masonry*", J. Struct. Div. ASCE **104**(8): 1267-1285.
- [120] Pande, G.N., Liang, J.X., Middleton, J., 1989, "*Equivalent elastic moduli for unit masonry*", Computers and Geotechnics **8**, 243-265.
- [121] Pantò, B., 2003, "*Un nuovo macromodello per la valutazione della resistenza sismica di edifici in muratura*", Tesi di Laurea in Ingegneria Civile e Ambientale, Relatore Prof. Ing. Ivo Calò.
- [122] Panzeca, T., Cucco, F., Salerno, M., 2008, "*Impiego dei sottodomini via SBEM nell'analisi delle murature*", Proc. of GIMC 2008, XVII Convegno Italiano di Meccanica Computazionale, Alghero (Italy), 10-12 Settembre 2008.
- [123] Papia, M., 1988 "*Analysis of infilled frames using a coupled finite element and boundary element solution scheme*", Int. J. Numerical Meth. in Engrg. **26**, 731-772 (DOI: 10.1002/nme.1620260315).
- [124] Pegon, P., Anthoine, A., 1997, "*Numerical strategies for solving continuum damage problems with softening: application to the homogenization of masonry*", Computers and Structures Vol 64, No. 1-4, pp. 623-642.
- [125] Pegon, P., Pinto, A., Géredin, M., 2001, "*Numerical modeling of stone-block monumental structures*", Computers and Structures **79**, 2165-2181.
- [126] Pelissou, C., Lebon, F., 2009, "*Asymptotic modeling of quasi-brittle interfaces*", Computers and Structures **87**, 1216-1223.
- [127] Pietruszczak, S., Niu, X., 1992, "*A mathematical description of macroscopic behavior of unit masonry*", International Journal of Solids and Structures **29**(5), 531-546.
- [128] Pietruszczak, S., Ushaksaraei, R., 2003, "*Description of inelastic behavior of structural masonry*", International Journal of Solids and Structures **40**, 4003-4019.
- [129] Podestà, S., Curti, E., Resemini, S., 2005, "*Design aspects concerning the evaluation of the seismic safety of ancient masonry religious buildings in Italy*", Proc. of VII Rencontres du Groupe APS - Archéosismicité & Vulnérabilité: Vulnérabilité du patrimoine bâti ouvert au public, Perpignan, France, May 2005.
- [130] Rashed, Y. F., Abdalla, M. H., Youssef, M. A. R., "*Boundary element analysis of masonry structures*", Boundary Element

- XIX Edited By: Brebbia, C. A., Wessex Institute of Technology, United Kingdom, Marchetti, M., (DOI: 10.2495/BE970031).
- [131] Rekik, A., Lebon, F., 2010, "*Identification of the representative crack length evolution in a multi-level interface model for quasi-brittle masonry*", International Journal of Solids and Structures **47**, 3011-3021.
 - [132] Rizzo, S., Fileccia Scimeni, G., Giambanco, G., 2010, "*Interface model for the nonlinear analysis of blocky structures of ancient Greek temples*", Advances and Trends in Structural Engineering, Mechanics and Computation – Zingoni (Ed.), 1313-1316.
 - [133] Roca, P., Lòpez-Almansa, F., Miquel, J., Hanganu, A., 2007, "*Limit analysis of reinforced masonry vaults*", Engineering Structures **29**, 431-439.
 - [134] Sab, K., 2003, "*Yield design of thin periodic plates by a homogenization technique and an application to masonry walls*", C. R. Mecanique **331**, 641-646.
 - [135] Sacco, E., 2009, "*A nonlinear homogenization procedure for periodic masonry*", European Journal of Mechanics A/Solids **28**, 209-222.
 - [136] Saetta, A., Scotta, R., Vitaliani, R., 1999, "*Couplet environmental-mechanical damage model of RC structures*", J. Eng. Mech., 125(8), 930-940.
 - [137] Salerno, G., De Felice, G., 2009, "*Continuum modeling of periodic brickwork*", International Journal of Solids and Structures **46**, 1251-1267.
 - [138] Senthivel, R., Lourenço, P. B., 2009, "*Finite element modeling of deformation characteristics of historical stone masonry shear walls*", Engineering Structures **31**, 1930-1943.
 - [139] Shi, G.-H., Goodman, R. E., 1988, "*Discontinuous deformation analysis – A new method for computing stress, strain and sliding of block systems*", in Key Questions in Rock Mechanics, eds. P. A. Cundall, R. Sterling, A. Starfield, Rotterdam, Balkema, 381-393.
 - [140] Sloan, S. W., 1988, "*Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming*", Int. J. Anal. Meth. Geomech. **12**: 61-77.
 - [141] Stefanou, I., Sulem, J., Vardoulakis, I., 2008, "*Three-dimensional Cosserat homogenization of masonry structures: elasticity*",

- Acta Geotechnica **3**: 71-83 (DOI: 10.1007/s11440-007-0051-y).
- [142] Stefanou, I., Sulem, J., Vardoulakis, I., 2010, "Homogenization of interlocking masonry structures using a generalized differential expansion technique", International Journal of Solids and Structures **47**: 1522-1536.
- [143] Suquet, P., 1983, "*Analyse limite et homogeneisation*", Comptes Rendus de l'Academie des Sciences – Series IIB – Mechanics **296**, 1355–1358.
- [144] Sutcliffe, D. J., Yu, H. S., Page, A. W., 2001, "*Lower bound limit analysis of unreinforced masonry shear walls*", Computers and Structures **79**, 1295-1312.
- [145] Tomazevic, M., 1990 "*Masonry structures in seismic areas – a state of the art report*", 9th European Conference on Earthquake Engng., Moscow, Vol. A, pp. 246-302.
- [146] Tomazevic, M., 1996 "*Recent advances in earthquake-resistant design of masonry buildings: European perspective*", Proc. 11th World Conference on Earthquake Engng., Acapulco, paper N° 2012.
- [147] Trovalusci, P., Masiani, R., 1996, "*Cosserat and Cauchy materials as continuum models of brick masonry*", Meccanica **31**, 421-432.
- [148] Turnsek, V., Cacovic, F., 1971, "*Some experimental result on the strength of brick masonry walls*", Proc. Of the 2nd Int. Brick Masonry Conference, Stoke-on-Trent, pp. 149-156.
- [149] Urbanski, A., Szarlinski, J., Kordecki, Z., 1995, "*Finite element modeling of the behavior of the masonry walls and columns by homogenization approach*", in Computer methods in structural masonry-3, Books and Journals International, Swansea, pp. 32-41.
- [150] Uva, G., Salerno, G., 2006, "*Towards a multiscale analysis of periodic masonry brickwork: a FEM algorithm with damage and friction*", International Journal of Solids and Structures **43**, 3739-3769.
- [151] Van der Pluijm, R., 1999, "*Out of plane bending of masonry: behaviour and strength*", Ph.D. dissertation, Eindhoven University of Technology, the Netherlands.
- [152] Yu, H. S., Sloan, S. W., 1997, "*Finite element limit analysis of reinforced soils*", Computers and Structures **63**(3): 567-577.

- [153] Zucchini, A., Lourenço, P.B., 2002, “*A micro-mechanical model for the homogenisation of masonry*”, International Journal of solids and Structures **39**, 3233-3255.
- [154] Zucchini, A., Lourenço, P.B., 2007, “*Mechanics of masonry in compression: Results from a homogenisation approach*”, Computers and Structures **85**, 193-204.
- [155] Zucchini, A., Lourenço, P.B., 2009, “*A micro-mechanical homogenisation model for masonry: application to shear walls*”, International Journal of solids and Structures **46**, 871-886.

Capitolo 2

UN APPROCCIO PER MACRO-ELEMENTI NELLA MODELLAZIONE DELLE STRUTTURE A GEO- METRIA CURVA

Nel presente capitolo vengono approfonditi tutti gli aspetti legati alla rappresentazione geometrica e alla cinematica connesse ad un approccio di modellazione per macro-elementi, intendendo per macro-elemento un modello matematico pensato per la descrizione della risposta macroscopica di una porzione finita di un elemento murario. Con il termine generico di rappresentazione geometrica ci si vuole riferire a tutte le operazioni necessarie per ricondursi dal modello fisico reale al modello geometrico corrispondente rappresentato da un mesh di macro-elementi. Tale operazione nelle strutture a geometria complessa, tipica degli edifici storici a carattere monumentale, è tutt'altro che semplice. Con il termine cinematica ci si riferisce alla rappresentazione della cinematica dell'elemento considerato attraverso i parametri lagrangiani scelti. L'approccio proposto è concepito allo scopo di consentire una macro-modellazione dei principali meccanismi di rottura delle strutture murarie a geometria curva con riferimento alla risposta dell'intera porzione di muratura rappresentata dal macro-elemento.

L'elemento proposto costituisce l'estensione alle strutture a geometria curva del macro-elemento spaziale proposto da Calìo et al. (2008), descritto nel capitolo precedente, in grado di cogliere la risposta nel piano e nel fuori-piano degli edifici in muratura.

A seguire, dapprima verranno esaminati gli aspetti generali legati alla definizione del modello geometrico globale a partire dal modello fi-

sico reale, successivamente verrà esaminata nel dettaglio la cinematica del singolo elemento.

A partire dagli aspetti legati al comportamento fisico della porzione di muratura che si vuole rappresentare attraverso una macro-modellazione, si introduce l'approccio proposto che allo stato attuale rappresenta il primo approccio di macro-modellazione non-lineare pensato esplicitamente per le strutture murarie a geometria curva.

In particolare, dopo aver introdotto il macro-elemento verranno esaminati nel dettaglio gli aspetti geometrici e cinematici del modello, mentre gli aspetti legati alla definizione dei legami costitutivi degli *NLink* che governano il comportamento meccanico dell'elemento, basato su un approccio di modellazione per fibre, meritano una trattazione a parte e pertanto verranno esaminati nel capitolo successivo.

1. Dal modello fisico alla sua rappresentazione per macro-conci

Nella modellazione proposta una struttura muraria a superficie curva nello spazio (quali ad esempio volte, cupole, pareti curve etc.) viene rappresentata attraverso una mesh di macro-porzioni spaziali la cui superficie media è, per ipotesi, contenuta in un piano. Nel caso più generale tale rappresentazione è sempre possibile mediante elementi piani triangolari (Figura 2.1), tuttavia nella maggior parte dei casi che interessano la modellazione degli edifici storici la regolarità geometrica delle superfici degli elementi strutturali coinvolti consente la rappresentazione geometrica del modello fisico anche mediante una mesh di elementi quadrangolari e un numero limitato di elementi triangolari.

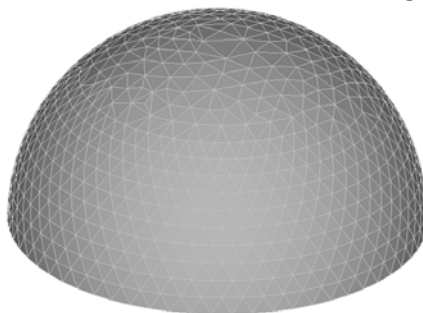


Figura 2.1. Modello ad elementi finiti triangolari di una cupola semisferica

Al fine di ottenere una discretizzazione regolare di una struttura muraria a geometria curva è possibile osservare che in genere tali tipologie costruttive, da un punto di vista geometrico, possono essere ricondotte a superfici curve regolari. Come superficie di riferimento può essere assunta quella media della struttura, come mostrato nella figura seguente.

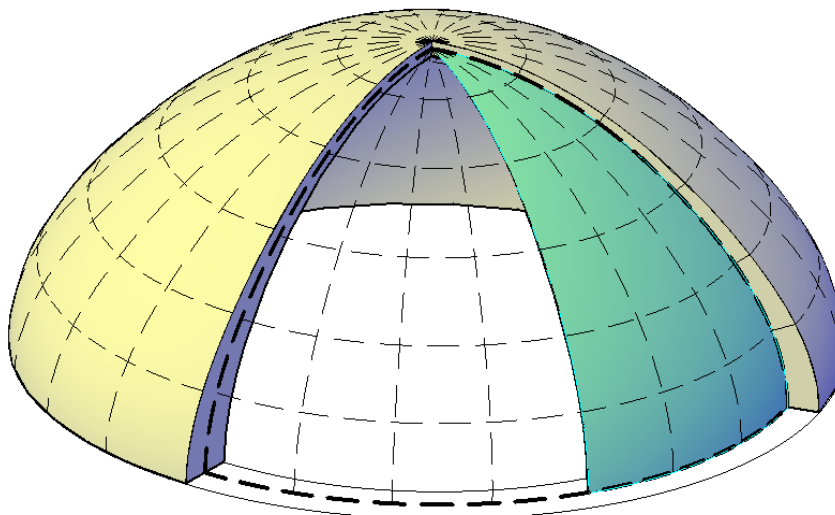


Figura 2.2. Individuazione della superficie media di una struttura muraria a geometria curva

La discretizzazione può avvenire considerando una griglia di linee curve, utili a determinare la suddivisione della struttura in macro-conci. Nella suddivisione occorre tener presente che il singolo concio dovrà essere rappresentato da un elemento piano geometricamente coincidente con il suo piano medio e pertanto i risultati saranno tanto più accurati quanto più l'elemento risulterà vicino alla superficie media del concio. Gli elementi strutturali a geometria curva che s'intendono rappresentare con la macro-modellazione proposta sono in genere elementi di copertura (volte semplici o composte, cupole), o pareti curve. In tutti questi casi, siano essi rappresentativi di superfici semplici o composte, gli elementi base sono generalmente superfici cilindriche (con curva direttrice di varia natura) o superfici di rivoluzione.

Nel caso delle superfici cilindriche è possibile individuare nella direzione della retta generatrice e nelle curve parallele alla curva direttrice le due direzioni principali secondo cui costruire una griglia di suddivisione della superficie (Figura 2.3).

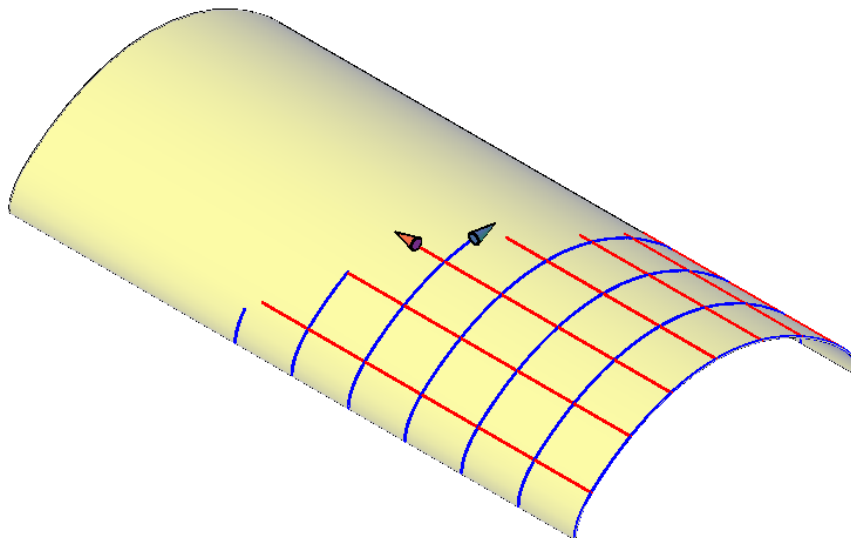


Figura 2.3. Generatrici e direttrici di una volta cilindrica

Nel caso delle superfici di rivoluzione, i due fasci di linee intersecanti sono rappresentati dalle linee di intersezione della superficie con dei piani ortogonali all'asse di rivoluzione da un lato (*paralleli*), come mostrato in figura 2.4, e da quelle di intersezione tra piani contenenti l'asse di rivoluzione e la superficie stessa (*meridiani* o *curve di profilo*) dall'altro (Figura 2.5).

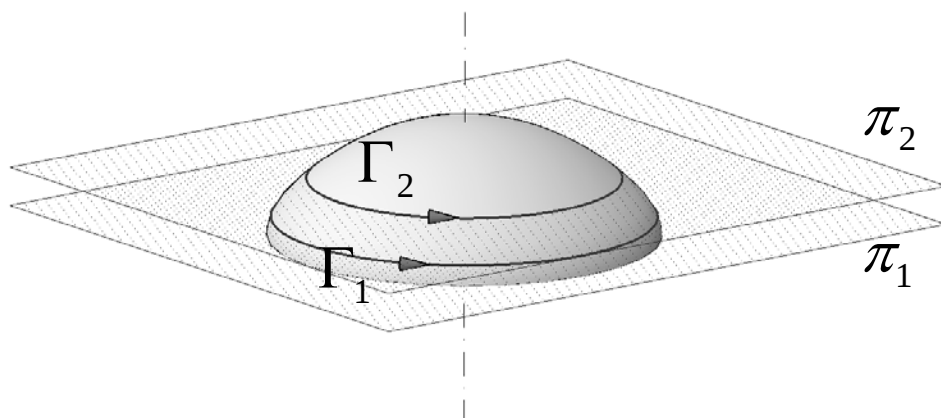


Figura 2.4. Paralleli di una superficie di rivoluzione

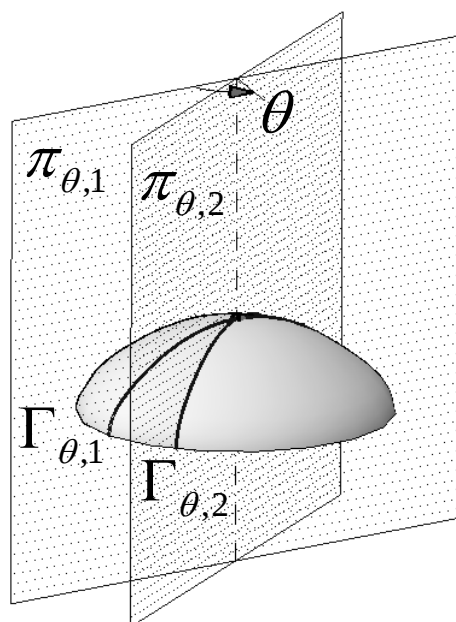


Figura 2.5. Meridiani di una superficie di rivoluzione

In tutti questi casi è sempre possibile determinare una suddivisione della superficie in elementi quadrangolari, per i quali è possibile dimostrare che i vertici di ciascuno di essi giacciono su un piano. Elementi triangolari si rendono necessari per le superfici di rivoluzione se le linee

di profilo convergono in un punto (caso di curva di profilo interagente con l'asse di rivoluzione), e nel caso di volte composte (nelle zone di intersezione tra le superfici).

La griglia di punti, individuata sulla superficie media dall'intersezione delle linee curve, contiene l'insieme delle informazioni che verranno elaborate per la definizione della geometria del modello numerico. In particolare, oltre alle coordinate dei nodi, e allo spessore della struttura reale negli stessi, risulta indispensabile conoscere la direzione della normale alla superficie media nei nodi considerati (Figura 2.6).

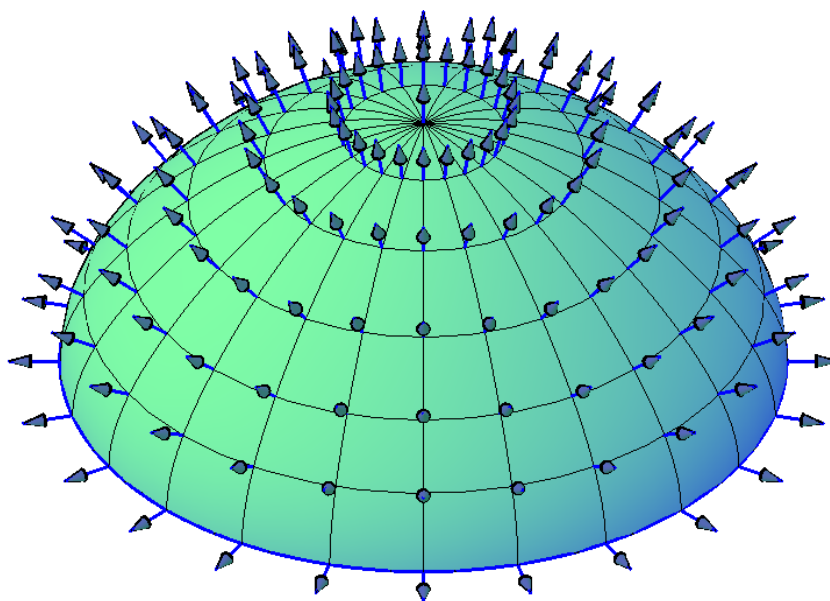


Figura 2.6. Individuazione delle normali alla superficie media dell'elemento murario a geometria curva

Alla suddivisione della superficie media secondo una griglia di linee curve corrisponde quella della struttura reale in macro-conci. Tale passaggio si configura come il primo passo verso l'individuazione di una modellazione per macro-elementi, che verrà determinato definendo, per ciascuno dei conci individuati dalla suddivisione della struttura, un elemento discreto equivalente alla porzione della superficie muraria corrispondente (Figura 2.7).

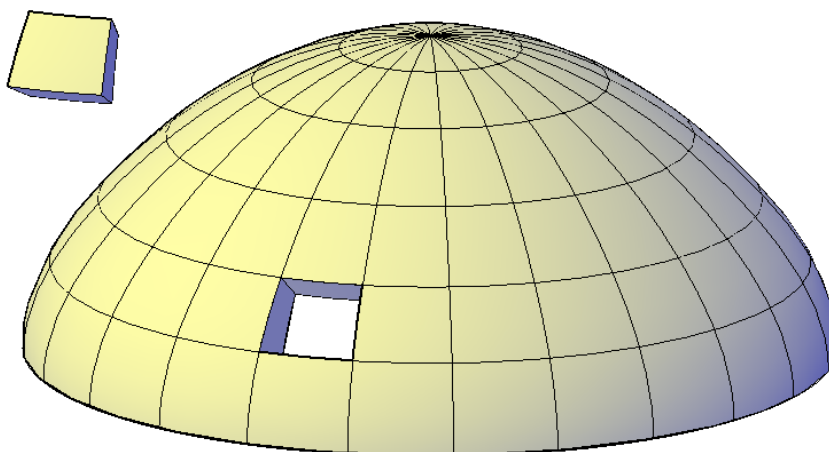


Figura 2.7. Suddivisione struttura muraria a geometria curva in macro-conci.

In generale sarà necessario considerare sia elementi quadrangolari che triangolari (Figura 2.8).

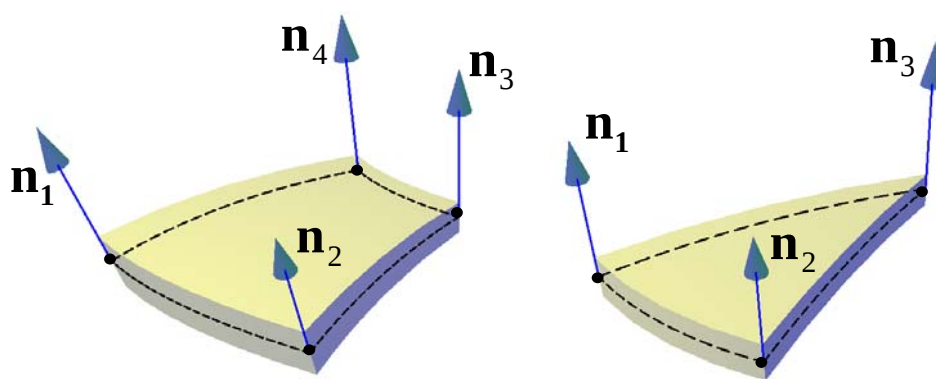


Figura 2.8. Conco di volta muraria: a sinistra elemento quadrangolare, a destra elemento triangolare

Ciascun elemento è caratterizzato dai suoi vertici, che sono contenuti in un piano (definito *piano medio dell'elemento*), dalle normali e dagli spessori in corrispondenza dei vertici e, pertanto, in generale avrà spessore variabile.

2. Dalla rappresentazione per macro-conci alla modellazione per macro-elementi

Il modello qui proposto si può collocare nell'ambito dei macro-modelli, in quanto basato sulla modellazione meccanica equivalente di una porzione discreta di muratura che nel caso specifico è rappresentata dal macro-concio introdotto nel paragrafo precedente.

Il macro-elemento dovrà essere in grado di simulare i comportamenti meccanici tipici delle strutture a geometria curva sia nella fase di normale esercizio che in condizioni di incipiente collasso associato ad azioni statiche e/o dinamiche.

L'idea di base è quella di considerare un modello meccanico equivalente del concio di muratura che si vuole rappresentare con un approccio totalmente nuovo in cui la risposta membranale e flessionale del concio è governata da una discretizzazione per fibre lungo le direzioni principali dell'elemento mentre la risposta tagliante e torsionale viene simulata macroscopicamente da un numero discreto di links non lineari.

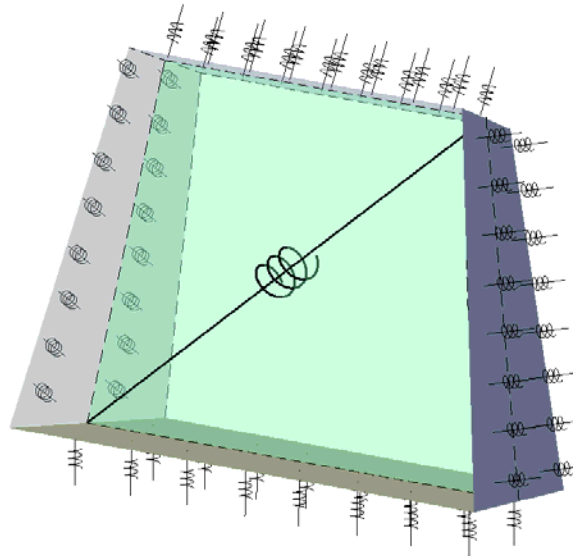


Figura 2.9. Macro-elemento: quadrilatero articolato e interfacce lungo i lati

L'elemento proposto è costituito da un quadrilatero articolato irregolare, con i lati rigidi, i cui vertici coincidono con i vertici del concio e la cui deformazione nel piano è controllata da un link non lineare posto

in una qualsiasi delle sue diagonali. L'interazione con gli altri quadrilateri e/o con i supporti esterni è affidata a interfacce spaziali, in generale inclinate rispetto al piano del quadrilatero, in cui risulta disposto un numero discreto di links non lineari (Figura 2.9) sia in direzione ortogonale che nel piano delle interfacce stesse.

I due principali elementi del modello sono pertanto un elemento *quadrilatero*, costituito appunto da un quadrilatero articolato, e un elemento di *interfaccia* (Figura 2.10) destinato alla caratterizzazione dell'interazione dei quadrilateri e con i supporti esterni.

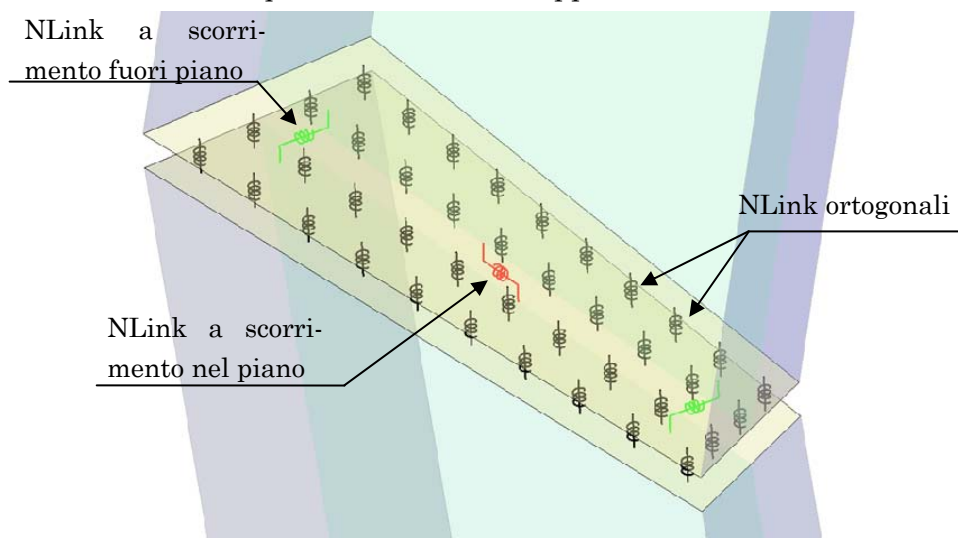


Figura 2.10. Elemento di interfaccia

La molla diagonale del quadrilatero è inserita per la simulazione della deformabilità a taglio del quadrilatero nel proprio piano. Ogni quadrilatero è definito, oltre che dalle coordinate geometriche dei suoi vertici, anche dalle quattro normali alla superficie e dagli spessori della volta e in corrispondenza degli stessi. L'inclinazione e la forma dell'interfaccia vengono determinate proprio a partire dalle normali alla superficie, e dagli spessori nei punti iniziale e finale della stessa interfaccia. Nelle molle delle interfacce vengono concentrate la deformabilità membranale e flessionale della porzione di muratura considerata, oltre alla deformabilità torsionale e al controllo dell'attivazione dei meccanismi di scorrimento. L'obiettivo è quello di disaccoppiare, per quanto pos-

sibile, i meccanismi di crisi, affidando a specifici links non-lineari, la simulazione del comportamento membranale, flessionale, torsionale e di scorrimento, di un generico elemento di superficie.

Il numero delle molle è arbitrario e dipende dal grado di accuratezza della soluzione che si vuole ottenere. Un aumento del numero delle molle disposte nell'interfaccia, se da un lato aumenta l'onere computazionale in quanto aumentano le non-linearità insite nel modello, dall'altro non comporta un aumento dei gradi di libertà globali del sistema.

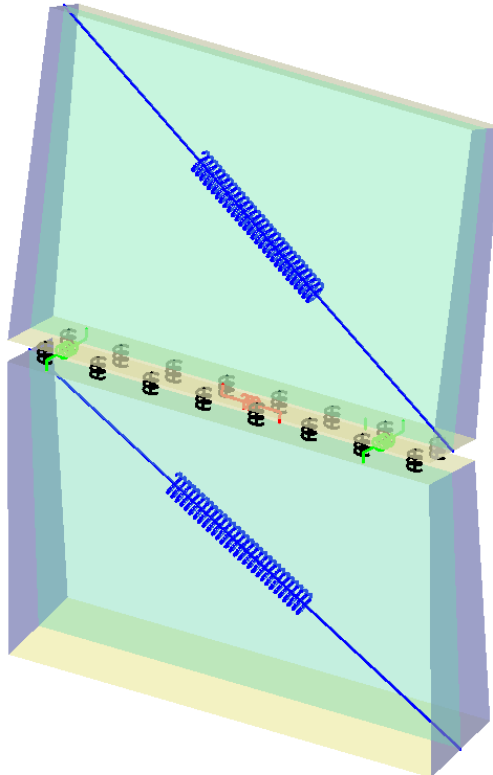


Figura 2.11. Interazione tra un quadrilatero e un elemento limitrofo mediante un'interfaccia discreta

L'interazione tra quadrilateri può avvenire lungo un qualsiasi lato. Le interfacce vengono inserite quando due quadrilateri hanno un lato in comune o un lato del quadrilatero coincide con un supporto esterno.

Questo consente di attribuire alla superficie una mesh e di modellarla mediante macro-elementi collegati da interfacce.

La risoluzione della mesh è legata soprattutto ad una buona descrizione della geometria, poichè il singolo macro-elemento è tarato sulla porzione di muratura che simula. Infatti, nel caso del modello piano, (Caliò et al., 2004) un solo macro-elemento è sufficiente alla modellazione di un intero maschio murario a prescindere dalla sua estensione, e l'introduzione di una mesh di elementi garantisce solo una maggiore accuratezza nell'individuazione del meccanismo di collasso. Per le superfici curve la mesh diventa, invece, una necessità dovuta alle inevitabili approssimazioni geometriche che vengono fatte. Pertanto, nonostante l'elemento simuli un'intera porzione dell'elemento murario, l'accuratezza della soluzione è dipendente dalla risoluzione della mesh predisposta. È evidente inoltre che, anche l'individuazione dell'effettivo quadro fessurativo della struttura, è condizionato dalla mesh, poiché i fenomeni fessurativi possono essere colti solo in corrispondenza degli elementi di interfaccia o attraverso l'informazione fornita dal link diagonale. Un raffittimento della discretizzazione degli elementi consente di ampliare il dominio di ammissibilità cinematica dei meccanismi di collasso potenzialmente attivabili. I dettagli relativi alla definizione dei comportamenti costitutivi dei Links non lineari saranno descritti nel capitolo successivo.

2.1. Descrizione del comportamento meccanico della muratura

Il comportamento delle volte sottili in muratura è regolato, come già brevemente accennato, sia dalla geometria della volta sia delle condizioni di carico. A causa di questa varietà di condizioni stabilire dei criteri di rottura delle volte, così come viene tradizionalmente fatto per i maschi murari piani, diventa un compito arduo. Tuttavia, se ci si riferisce ad una porzione di un elemento di volta, è possibile individuare dei criteri di crisi locale, che nell'insieme determinano la crisi di una struttura voltata in muratura.

Di fatto si può pensare di estendere i criteri di rottura validi per i maschi murari piani anche al caso di geometrie curve, e affidare la simulazione di ciascuno di questi meccanismi ad una specifica componen-

te del modello. È quindi necessario individuare una corrispondenza tra il maschio murario piano e il concio di muratura curvo. Tale corrispondenza è stata ottenuta in accordo ad un approccio di modellazione a fibre che verrà tenuto presente sia nella definizione del modello che nei singoli processi di taratura degli elementi non lineari.

È ben noto che un elemento murario piano caricato verticalmente nel proprio piano e soggetto ad una forza orizzontale può collassare secondo tre diversi meccanismi, ciascuno associato ad un diverso comportamento. Il meccanismo indicato in figura 2.12 (a) è di natura prevalentemente flessionale, ed è associato alla fessurazione della zona tesa e allo schiacciamento della zona compressa (o ad una sola di queste due rotture); in figura 2.12 (b) e (c) sono rispettivamente rappresentati i meccanismi di rottura a taglio per fessurazione diagonale e per scorrimento.

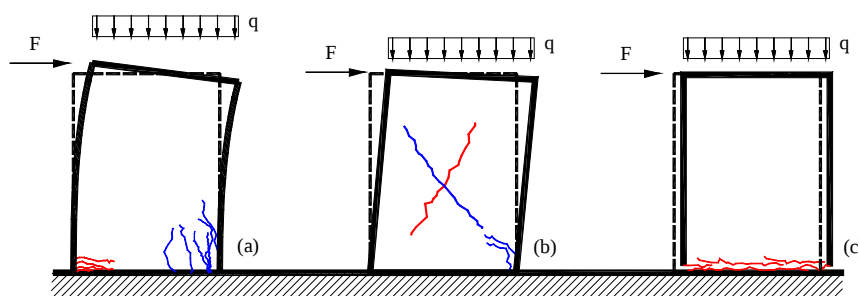


Figura 2.12. Meccanismi di rottura nel piano di un pannello murario; (a) rottura per schiacciamento/ribaltamento; (b) rottura a taglio per fessurazione diagonale; (c) rottura a taglio per scorrimento

Comportamenti analoghi possono essere ritrovati nelle volte sottili se si pensa che il comportamento flessionale dei maschi piani diventa quello membranale e flessionale degli elementi curvi, mentre quello a taglio è regolato da fenomeni attritivi per gli scorrimenti e dalla deformabilità nel proprio piano per la fessurazione diagonale.

Ciascuno di questi meccanismi è associato ad un particolare quadro fessurativo oltre che ad un modo di collasso dell'elemento. Il meccanismo di collasso flessionale può presentarsi secondo due diverse modalità: progressiva fessurazione con parzializzazione della sezione nella zona tesa o schiacciamento della muratura nella zona compressa. Tale

comportamento è affidato, nel modello, agli elementi di interfaccia mediante un letto di molle disposte ortogonalmente all'interfaccia stessa, per le quali viene previsto un legame con limitata resistenza a compressione e comportamento elasto-fragile a trazione. Il collasso per schiacciamento sarà simulato da una progressiva plasticizzazione a compressione delle molle, mentre la fessurazione verrà associata alla rottura per trazione delle stesse. È evidente che la modellazione proposta consente la schematizzazione di casi di flessione deviata anche in campo non lineare e che il criterio adottato tiene conto della dipendenza del momento resistente dallo sforzo normale. In figura 2.13 è riportato un tipico meccanismo di collasso di una volta sferica associato ad un incremento dei carichi verticali. In questo caso l'analisi mediante macro-elementi dovrà indicare una fessurazione lungo i meridiani in corrispondenza delle interfacce.

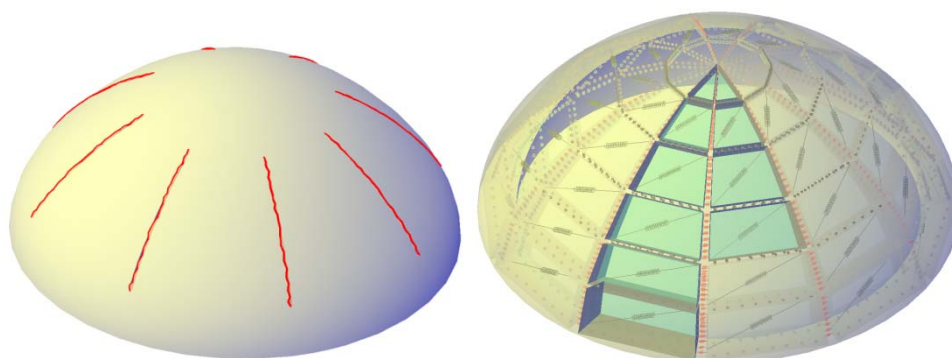


Figura 2.13. Comportamento a rottura tipico delle volte sferiche: rappresentazione semplificata del comportamento reale; risposta attesa in una modellazione basata sul macro-elemento proposto.

I meccanismi di collasso a taglio per fessurazione diagonale e per schiacciamento per questo tipo di strutture sono sicuramente molto meno frequenti rispetto a quello flessionale, che è di gran lunga il più comune. Nonostante questi meccanismi non si attivino facilmente si può considerare, per estensione, un quadro fessurativo analogo a quello riscontrabile per maschi murari piani. In quest'ottica, la fessurazione

diagonale si manifesta con fratture diagonali concentrate nella zona centrale dell'elemento, che si dispongono secondo le isostatiche di compressione a causa della limitata resistenza a trazione della muratura. Il modello è comunque in grado di cogliere tale meccanismo mediante un legame costitutivo non lineare secondo il quale calibrare la molla diagonale. In figura 2.14, a titolo di esempio si riporta un quadro fessurativo tipico per i tamburi finestrati, con formazione di fessurazione diagonale nei maschi murari, e la corrispondente modellazione per macro-elementi, in cui il danneggiamento è concentrato nei link diagonali.

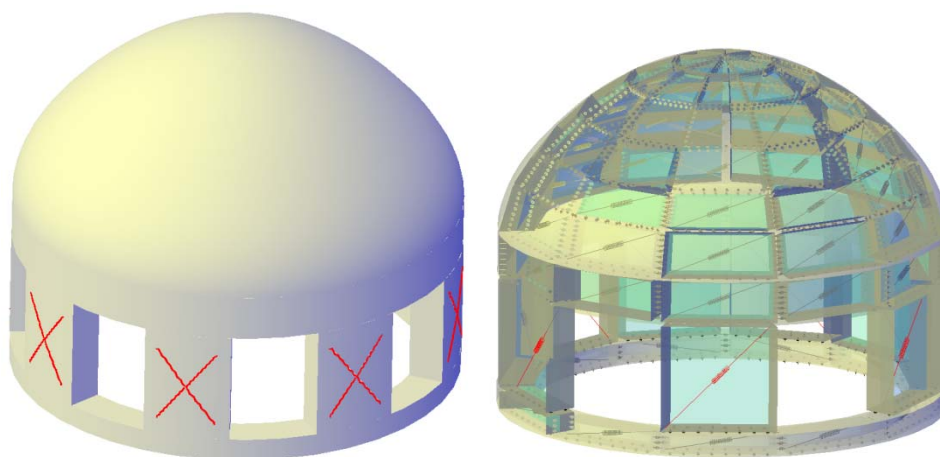


Figura 2.14. Esempio di possibile collasso per fessurazione diagonale in corrispondenza di un tamburo finestrato: rappresentazione qualitativa della risposta reale; risposta attesa in una modellazione basata sul macro-elemento proposto

Anche il meccanismo di collasso per scorrimento nella pratica ha una scarsa importanza. La sua attivazione è infatti legata all'assenza di considerevoli tensioni normali o alla parzializzazione delle sezioni; le volte sottili sono però strutture che per la loro particolare forma tendono a presentare tensioni normali di compressione notevoli inibendo praticamente gli scorrimenti. Il meccanismo consiste in mutui scorrimenti tra due elementi lungo la direzione dei giunti di malta con conseguente

formazione di macrofratture lungo tale direzione. Viene distinto tra un meccanismo a scorrimento lungo il lato dell'interfaccia e un meccanismo lungo la direzione ortogonale al lato della stessa interfaccia. Come sarà mostrato più dettagliatamente nel capitolo successivo, lo scorrimento lungo il lato dell'interfaccia è governato da una sola molla, mentre quello lungo la direzione ortogonale è regolato da due. L'inserimento delle due molle consente di gestire la deformabilità torsionale elastica dell'elemento: esse hanno infatti una rigidezza calibrata secondo la deformabilità a taglio in direzione parallela al piano dell'interfaccia, mentre la distanza a cui sono disposte è scelta in modo da simulare la deformabilità torsionale dell'elemento; la resistenza è infine determinata sulla base di meccanismi attritivi che regolano l'attivazione degli scorrimenti. Il legame costitutivo di queste molle è di tipo non lineare e associato a domini di scorrimento alla Mohr-Coulomb.

In figura 2.15 è riportato l'esempio di un possibile meccanismo di scorrimento in corrispondenza dei conci di una volta a botte.

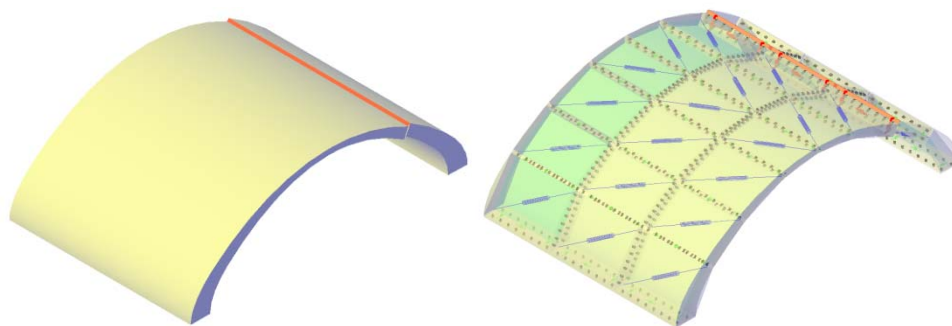


Figura 2.15. Collasso del modello per scorrimento tra i conci in una volta a botte: rappresentazione qualitativa della risposta reale; risposta attesa in una modellazione basata sul macro-elemento proposto

L'interfaccia è rappresentata da un modello meccanico equivalente costituito da due piani rigidi, inizialmente aderenti, coincidenti con le facce di contatto dei due quadrilateri. Questi piani vengono discretizzati sia nella direzione longitudinale che nella direzione trasversale, pertanto l'interfaccia risulta meccanicamente modellata con più file di molle

non lineari, ortogonali al piano dell'interfaccia, in accordo con la filosofia di un modello a fibre. Il numero di campi in cui suddividere l'area nei due sensi, longitudinale e trasversale, è del tutto arbitrario e stabilito in base al grado di accuratezza della soluzione che si vuole ottenere. Ogni molla flessionale è rappresentativa di una fibra di muratura opportunamente determinata (Figura 2.16).

Il comportamento delle interfacce è regolato da molle (flessionali, a scorrimento nel piano e a scorrimento fuori piano) che agiscono secondo tre assi ortogonali tra loro. Ciò consente di separare il comportamento flessionale da quello a scorrimento, ottenendo da un lato un più intuitivo riconoscimento dei meccanismi che conducono la struttura al collasso, e dall'altro il disaccoppiamento delle sollecitazioni in modo da rendere più immediata sia la taratura delle molle che la lettura dei risultati. È inoltre evidente che il modello consente di cogliere meccanismi di collasso combinati.

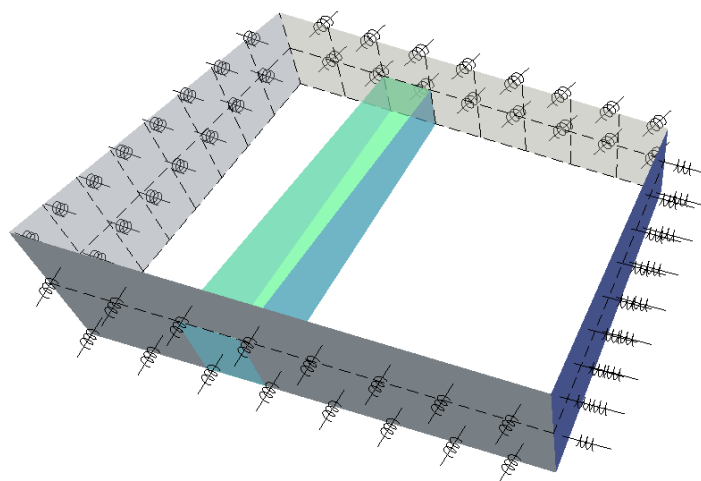


Figura 2.16. Individuazione di una fibra di muratura

3. Analisi geometrica del quadrilatero articolato

Dalla discretizzazione della volta in muratura si ottengono le informazioni necessarie alla definizione di ogni suo elemento. In particolare, riferendosi al generico concio murario, sono note le coordinate dei vertici del piano medio rispetto ad un sistema di riferimento globale tridimen-

sionale, le componenti dei versori normali alla superficie nei quattro vertici e gli spessori della volta sempre in corrispondenza degli stessi. A partire da questi parametri geometrici, congiuntamente a quelli meccanici del materiale, sarà possibile ricavare tutte le informazioni che definiscono il modello discreto equivalente.

3.1. Individuazione dei quadrilateri articolati

Si consideri il generico concio murario, rappresentato schematicamente in figura 2.17.

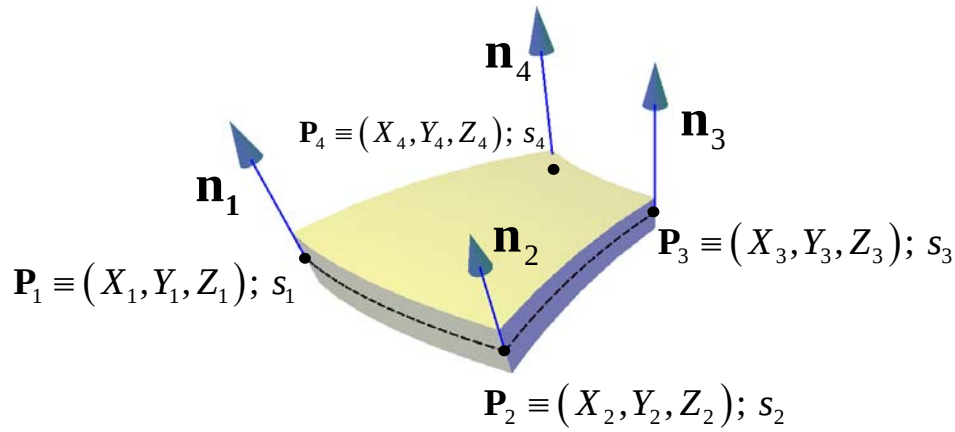


Figura 2.17. Concio di volta muraria

Si assuma una numerazione convenzionale dei vertici come rappresentata nella stessa figura, e si consideri l'ipotesi di convessità del quadrilatero ottenuto unendo i vertici del piano medio, figura 2.18.

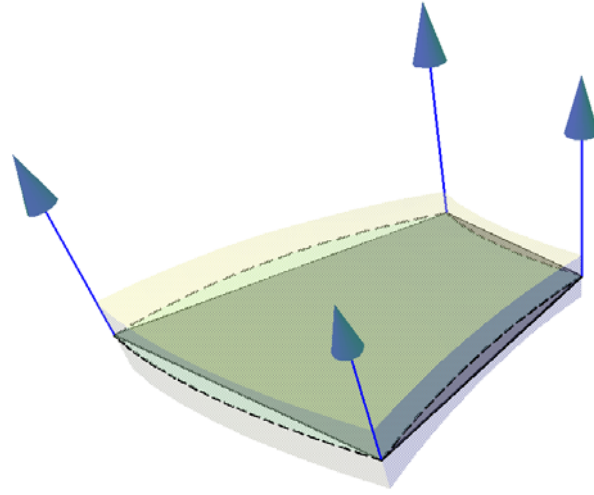


Figura 2.18. Individuazione del quadrilatero irregolare a partire dalla geometria del macro-concavo

I dati geometrici che è necessario considerare sono le coordinate dei quattro vertici della superficie media della porzione muraria, le direzioni delle normali alla superficie media e gli spessori dell'elemento negli stessi punti. Pertanto, per ciascuno dei quattro vertici dell'elemento sono note le sue coordinate spaziali, uno scalare corrispondente allo spessore, e le tre componenti del versore normale alla superficie:

$$\begin{aligned}
 \boxed{1} &\rightarrow X_1, Y_1, Z_1, s_1, n_{x1}, n_{y1}, n_{z1} \\
 \boxed{2} &\rightarrow X_2, Y_2, Z_2, s_2, n_{x2}, n_{y2}, n_{z2} \\
 \boxed{3} &\rightarrow X_3, Y_3, Z_3, s_3, n_{x3}, n_{y3}, n_{z3} \\
 \boxed{4} &\rightarrow X_4, Y_4, Z_4, s_4, n_{x4}, n_{y4}, n_{z4}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Tali vertici sono, per ipotesi, contenuti in un piano definito *piano dell'elemento*.

A seguire, dopo aver introdotto i parametri lagrangiani che ne governano tutti gli spostamenti, sono riportate le relazioni cinematiche tra parametri lagrangiani e spostamenti di tutti i punti dell'elemento.

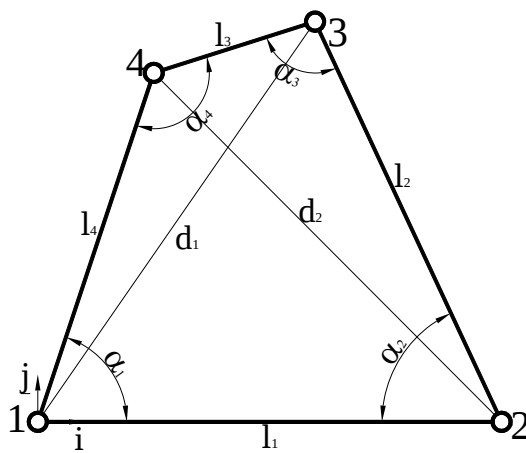


Figura 2.19. Configurazione geometrica di un generico quadrilatero

Risulta necessaria la definizione di un sistema di riferimento locale, il cui orientamento rispetto ad un riferimento globale definisca univocamente la posizione dell'elemento nello spazio. Si indichino con $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ una terna destra di versori tali che:

- $\underline{i}$ è diretto come il lato 1-2 del quadrilatero ed orientato dal vertice 1 al vertice 2;
- $\underline{j}$ è ortogonale ad $\underline{i}$ e giacente nel piano del quadrilatero;
- $\underline{k}$ è ortogonale ad $\underline{i}$ e $\underline{j}$ ed orientato verso l'estradosso del concio cui il quadrilatero articolato 1,2,3,4 si riferisce.

L'origine del sistema di riferimento locale sia collocata nel primo vertice dell'elemento, figura 2.20.

Il sistema di riferimento globale è invece caratterizzato da una terna di versori $\underline{I}, \underline{J}, \underline{K}$.

Le componenti dei tre versori $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ nel sistema di riferimento globale possono essere facilmente determinate. Il primo versore ($\underline{i}$) rappresenta il versore del segmento 1-2; il secondo giace nel piano dell'elemento ed è ortogonale al lato 1-2 in modo da determinare con il vettore $\underline{k}$ una terna destra. In figura 2.21 è riportato un esempio di una porzione di volta sferica nella suddivisione in macroconci e la corrispondente suddivisione in macro-elementi con i relativi riferimenti locali.

Con semplici considerazioni di algebra vettoriale si ottengono le seguenti espressioni dei versori delle normali $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ del generico elemento valutato rispetto a un riferimento cartesiano globale.

$$\underline{i} = \frac{(X_2 - X_1)\underline{I} + (Y_2 - Y_1)\underline{J} + (Z_2 - Z_1)\underline{K}}{\sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}}$$

$$\underline{j} = \frac{[(X_4 - X_1) - b \cdot i_x]\underline{I} + [(Y_4 - Y_1) - b \cdot i_y]\underline{J} + [(Z_4 - Z_1) - b \cdot i_z]\underline{K}}{\sqrt{[(X_4 - X_1) - b \cdot i_x]^2 + [(Y_4 - Y_1) - b \cdot i_y]^2 + [(Z_4 - Z_1) - b \cdot i_z]^2}}$$

$$\underline{k} = \underline{i} \wedge \underline{j} = \begin{vmatrix} \underline{I} & \underline{J} & \underline{K} \\ i_x & i_y & i_z \\ j_x & j_y & j_z \end{vmatrix} = (i_y j_z - i_z j_y)\underline{I} + (i_z j_x - i_x j_z)\underline{J} + (i_x j_y - i_y j_x)\underline{K}$$

essendo b dato da

$$b = (X_4 - X_1)i_x + (Y_4 - Y_1)i_y + (Z_4 - Z_1)i_z$$

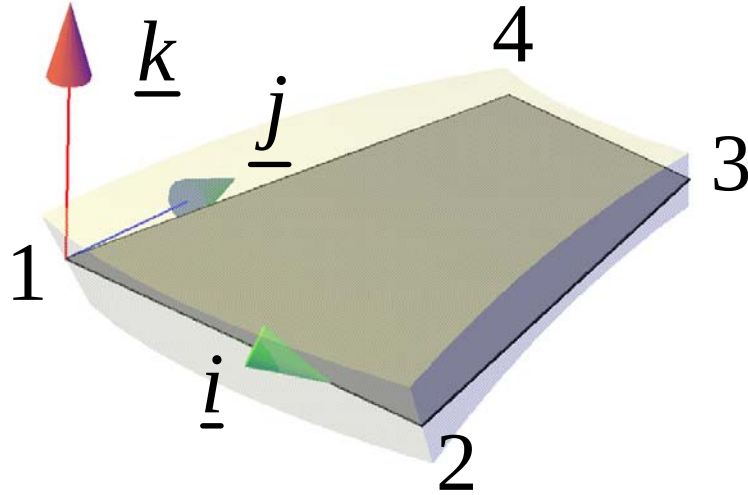


Figura 2.20. Sistema di riferimento locale del generico elemento

3.2. Individuazione dei lati rigidi delle interfacce

Le interfacce sono costituite da due piani rigidi e dagli Nlinks interposti in cui risultano concentrate le proprietà costitutive degli elementi che connettono. In ogni elemento ciascun piano rigido risulta legato da un vincolo di rigidità cinematica al corrispondente lato del quadrilatero articolato. Convenzionalmente si assume che i piani rigidi corrispondenti ad ogni interfaccia risultino geometricamente coincidenti (sebbene indipendenti) in condizioni di stato di sforzo nullo nell'interfaccia stessa. Nella figura 2.21, a titolo di esempio è evidenziata l'interfaccia corrispondente a due elementi contigui. Si noti che per ragioni di rappresentazione i due piani rigidi dell'interfaccia sono disposti ad una certa distanza l'uno dall'altro sebbene in configurazione indeformata risultino, come già evidenziato, coincidenti.

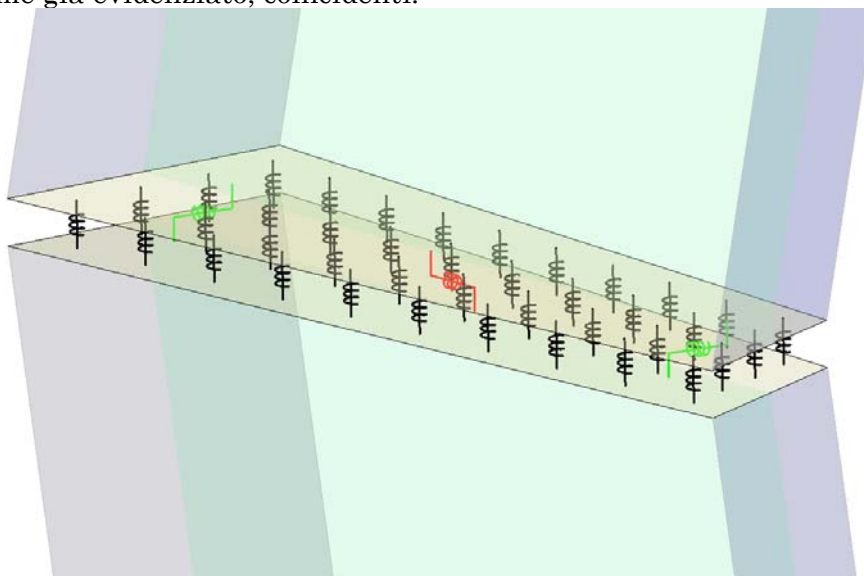


Figura 2.21. Schema meccanico equivalente di un'interfaccia in corrispondenza di due elementi contigui nella modellazione di una volta

Per determinare gli spostamenti relativi tra le due facce rigide dell'interfaccia, è necessario determinare gli spostamenti assoluti (rispetto ad un sistema di riferimento globale) di ciascuna delle due facce. Tali spostamenti possono essere valutati a partire da quelli di ciascuno dei due piani rigidi. Tali spostamenti dipendono esclusivamente dai pa-

rametri lagrangiani che determinano la configurazione corrente del quadrilatero.

Per ogni interfaccia è conveniente individuare due punti estremi, detti nodi, che nella presente trattazione verranno convenzionalmente indicati con le lettere i e j . Senza perdita di generalità, si assuma che ogni interfaccia connetta due elementi, e pertanto ad ognuno dei nodi dell'interfaccia corrispondono in realtà due nodi del modello, inizialmente coincidenti, ma appartenenti ciascuno a uno dei due elementi collegati, e che quindi potranno, in generale, presentare spostamenti diversi. In figura 2.22 è riportato un esempio di interfaccia che collega due elementi. Per ogni interfaccia si riconoscono quattro nodi di spigolo (in grigio in figura), a due a due corrispondenti agli estremi i e j dell'interfaccia (in rosso in figura), che vengono denominati *vertici* dell'interfaccia.

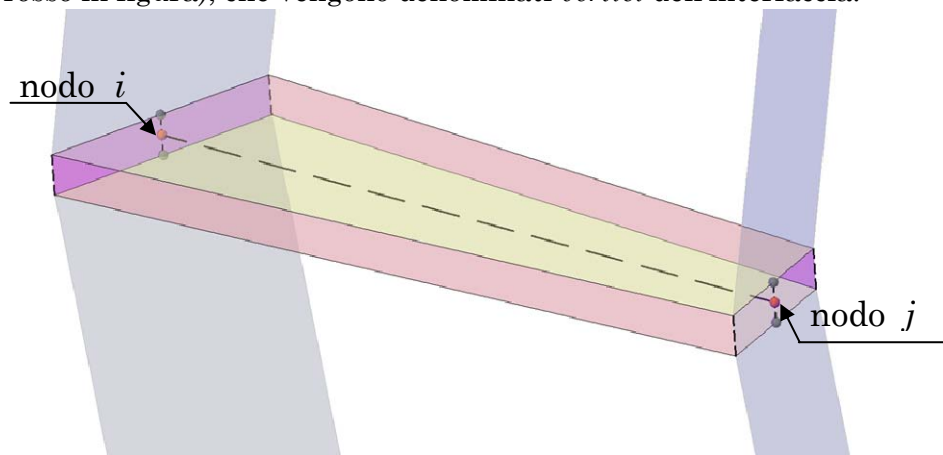


Figura 2.22. Elemento di interfaccia inserita tra due elementi contigui

Nel caso in cui un'interfaccia connetta un elemento con un vincolo esterno uno dei lati dell'interfaccia potrà essere fisso (caso di vincolo perfetto), o dipendere dai gradi di libertà del supporto (caso di vincoli cedevoli elasticamente).

Per valutare l'orientamento spaziale delle interfacce è necessario considerare la direzione delle normali ai vertici estremi del lato corrispondente all'interfaccia considerata. Tali normali individuano due rette che, in generale, possono anche essere sghembe. Se questo accade significa che non esiste un piano contenente entrambe le normali, e pertanto

l'orientamento dell'interfaccia deve essere calcolato in maniera tale che esso sia comunque idoneo ad approssimare l'andamento della geometria reale della struttura. Si vuole trovare pertanto un piano, detto *piano dell'interfaccia*, atto a determinare l'orientamento spaziale dell'interfaccia con una procedura generalizzabile a tutti i lati del quadrilatero articolato (Figura 2.23). Si consideri il lato che collega due generici nodi i e j del quadrilatero.

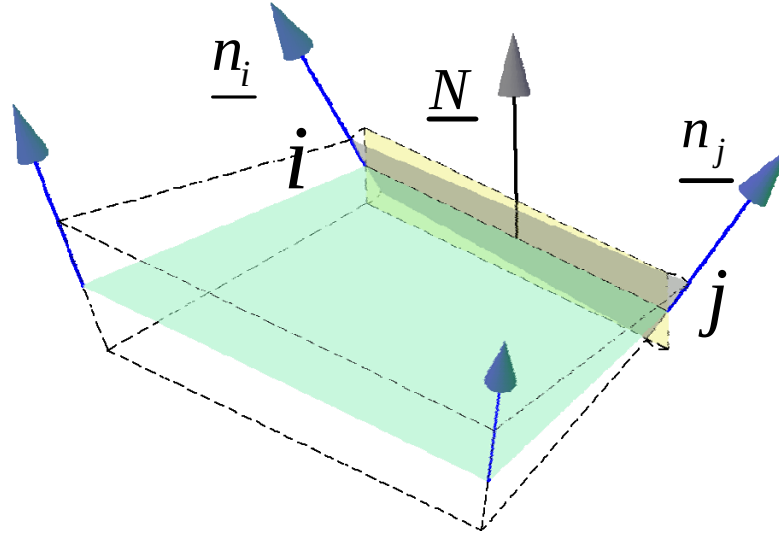


Figura 2.23. Individuazione del piano dell'interfaccia

Si considerino due versori $\underline{n}_i$ e $\underline{n}_j$ che individuano le normali alla superficie nei due vertici del lato considerato, e si considerino i vettori $\underline{\tilde{v}}_i$ e $\underline{\tilde{v}}_j$, tali che $\underline{\tilde{v}}_i$ appartenga al piano individuato da $\underline{n}_i$ e il lato del quadrilatero e che sia ortogonale a quest'ultimo; con lo stesso criterio si determini $\underline{\tilde{v}}_j$ (Figura 2.24).

Con riferimento alla figura seguente, indicando con $\underline{e}$ il versore del lato considerato, si può osservare che si ha:

$$\underline{\tilde{v}}_i = \underline{n}_i - (\underline{n}_i \cdot \underline{e}) \underline{e}$$

$$\underline{\tilde{v}}_j = \underline{n}_j - (\underline{n}_j \cdot \underline{e}) \underline{e}$$

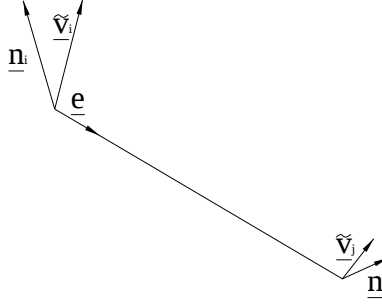


Figura 2.24. Proiezioni delle normali su piani ortogonali al versore $\underline{e}$

Si normalizzino questi due vettori dividendoli per i rispettivi moduli:

$$\underline{v}_i = \frac{\widetilde{v}_i}{|\widetilde{v}_i|}; \quad \underline{v}_j = \frac{\widetilde{v}_j}{|\widetilde{v}_j|}$$

Il versore $\underline{N}$ che, insieme al lato i - j del quadrilatero, individua il piano della corrispondente interfaccia può essere ottenuto come piano medio tra questi due, ovvero sommando i versori $\underline{v}_i$ e $\underline{v}_j$ e normalizzando. Si ha (Figura 2.25):

$$\underline{N} = \frac{\underline{v}_i + \underline{v}_j}{|\underline{v}_i + \underline{v}_j|}$$

Il versore $\underline{e}$ in componenti sarà dato da:

$$e_x = \frac{X_j - X_i}{l}; e_y = \frac{Y_j - Y_i}{l}; e_z = \frac{Z_j - Z_i}{l}$$

Esplicitando la procedura appena descritta, i vettori $\widetilde{v}_i$ e $\widetilde{v}_j$ in componenti saranno dati da:

$$\begin{cases} \widetilde{v}_{ix} = n_{ix} - (n_{ix}e_x + n_{iy}e_y + n_{iz}e_z)e_x \\ \widetilde{v}_{iy} = n_{iy} - (n_{ix}e_x + n_{iy}e_y + n_{iz}e_z)e_y \\ \widetilde{v}_{iz} = n_{iz} - (n_{ix}e_x + n_{iy}e_y + n_{iz}e_z)e_z \end{cases}; \quad \begin{cases} \widetilde{v}_{jx} = n_{jx} - (n_{jx}e_x + n_{jy}e_y + n_{jz}e_z)e_x \\ \widetilde{v}_{jy} = n_{jy} - (n_{jx}e_x + n_{jy}e_y + n_{jz}e_z)e_y \\ \widetilde{v}_{jz} = n_{jz} - (n_{jx}e_x + n_{jy}e_y + n_{jz}e_z)e_z \end{cases}$$

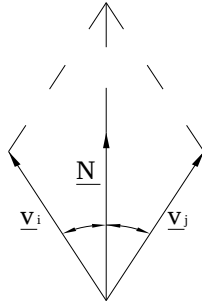


Figura 2.25. Individuazione del versore $\underline{N}$

Il modulo dei due versori $\underline{\widetilde{v}}_i$ e $\underline{\widetilde{v}}_j$ possono essere calcolati come segue:

$$\left| \underline{\widetilde{v}}_i \right| = \sqrt{\widetilde{v}_{iX}^2 + \widetilde{v}_{iY}^2 + \widetilde{v}_{iZ}^2}$$

$$\left| \underline{\widetilde{v}}_j \right| = \sqrt{\widetilde{v}_{jX}^2 + \widetilde{v}_{jY}^2 + \widetilde{v}_{jZ}^2}$$

da cui, normalizzando

$$v_{iX} = \frac{\widetilde{v}_{iX}}{\left| \underline{\widetilde{v}}_i \right|}; v_{iY} = \frac{\widetilde{v}_{iY}}{\left| \underline{\widetilde{v}}_i \right|}; v_{iZ} = \frac{\widetilde{v}_{iZ}}{\left| \underline{\widetilde{v}}_i \right|}$$

$$v_{jX} = \frac{\widetilde{v}_{jX}}{\left| \underline{\widetilde{v}}_j \right|}; v_{jY} = \frac{\widetilde{v}_{jY}}{\left| \underline{\widetilde{v}}_j \right|}; v_{jZ} = \frac{\widetilde{v}_{jZ}}{\left| \underline{\widetilde{v}}_j \right|}$$

Il modulo della somma vettoriale $\underline{v}_i + \underline{v}_j$ può essere calcolato come:

$$\left| \underline{v}_i + \underline{v}_j \right| = \sqrt{\left(v_{iX} + v_{jX} \right)^2 + \left(v_{iY} + v_{jY} \right)^2 + \left(v_{iZ} + v_{jZ} \right)^2}$$

ed infine, le componenti del versore $\underline{N}$ saranno date da:

$$N_X = \frac{v_{iX} + v_{jX}}{\left| \underline{v}_i + \underline{v}_j \right|}; N_Y = \frac{v_{iY} + v_{jY}}{\left| \underline{v}_i + \underline{v}_j \right|}; N_Z = \frac{v_{iZ} + v_{jZ}}{\left| \underline{v}_i + \underline{v}_j \right|}$$

Tale procedura restituisce un versore normale al lato i - j che individua, col lato del quadrilatero cui esso afferisce, un *piano medio* tra quello contenente la normale al vertice i e quello contenente la normale al

vertice j ; questo piano nel seguito è denominato *piano dell'interfaccia*. Nel caso in cui queste due normali giacciano sullo stesso piano (non siano quindi sghembe) questa procedura restituisce un vettore $\underline{N}$ giacente proprio su questo piano. Per determinare completamente la geometria dell'interfaccia occorre però ancora scegliere, per ciascun nodo di estremità dell'interfaccia, un vettore giacente sul piano dell'interfaccia, che determini la direzione lungo la quale considerare lo spessore dell'interfaccia nel nodo (Figura 2.26). Si assuma che tali direzioni siano individuate, per ciascuno dei nodi, dalla retta ottenuta come proiezione della normale alla superficie media sul piano dell'interfaccia.

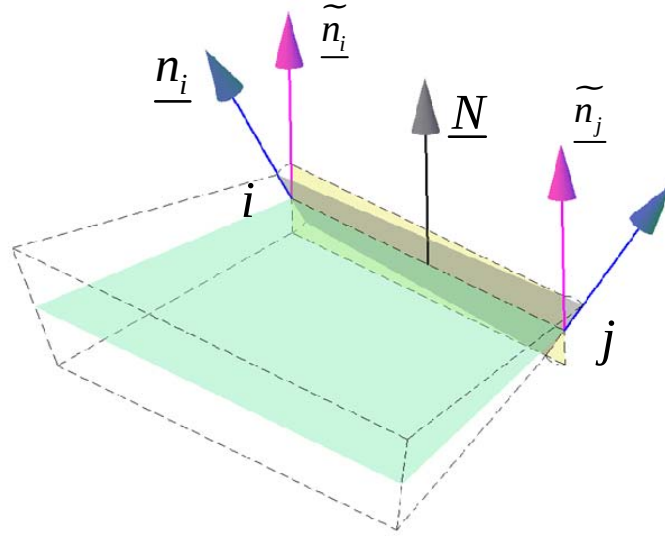


Figura 2.26. Individuazione della geometria dell'interfaccia

Per individuare il lato dell'interfaccia si proietti quindi il vettore $\underline{n}_1$ sul piano dell'interfaccia, e lo si normalizzi:

$$\underline{\underline{n}}_i = \frac{[\underline{n}_i(\underline{e} \wedge \underline{N})](\underline{e} \wedge \underline{n}_i)}{||[\underline{n}_i(\underline{e} \wedge \underline{N})](\underline{e} \wedge \underline{n}_i)||}$$

Lo spessore dell'interfaccia in corrispondenza di quel punto può essere ottenuto, per analogia, proiettando il reale spessore della struttura in quel punto, sull'asse del versore $\underline{\bar{n}}_i$

$$\bar{s}_i = s_i \left(\underline{n}_i \cdot \underline{\bar{n}}_i \right)$$

Per la generica interfaccia tra i nodi i e j può essere introdotto un sistema di riferimento locale definito come segue:

- primo asse ξ giacente sulla retta passante per i e j , e diretto da i verso j ;
- secondo asse ζ ortogonale a ξ e giacente sul piano dell'interfaccia;
- terzo asse η ortogonale ai primi due e determinato con la regola della mano destra

3.3. Determinazione del centro di massa di un elemento

Procedendo attraverso una discretizzazione per masse concentrate, la massa totale dell'elemento si considera concentrata nel centro di massa che, data l'ipotesi di omogeneità del materiale, coincide con il baricentro geometrico.

Il calcolo del baricentro dell'elemento viene effettuato con riferimento ad un sistema di riferimento costituito da due assi giacenti sul piano dell'elemento con i versori orientati come $\underline{i}$ e $\underline{j}$ e origine nel punto medio del primo lato del quadrilatero. Le informazioni geometriche necessarie sono le coordinate dei quattro vertici dell'elemento e i rispettivi spessori; si supponga inoltre che gli spessori varino secondo una legge di interpolazione lineare all'interno dell'elemento e, limitatamente al calcolo del baricentro, si ipotizzi inoltre che l'elemento sia un solido delimitato da otto punti, determinati in modo che ad ogni vertice dell'elemento corrispondano due punti, estremi di un segmento il cui punto medio coincida con il vertice stesso, di lunghezza pari allo spessore dell'elemento in quel punto, e disposto ortogonalmente al piano dell'elemento, figura 2.27. È evidente che il volume associato a tale elemento non coincide con il volume effettivo del concio tuttavia l'errore che si commette e

trascurabile e diminuisce all'aumentare della mesh come dimostrano i risultati ottenuti e riportati nei capitoli successivi.

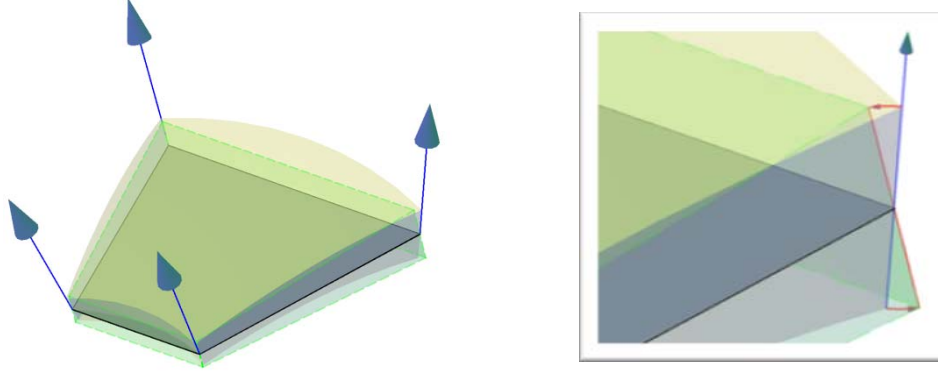


Figura 2.27. Volume considerato ai fini della determinazione del centro di massa dell'elemento e corrispondenza col volume reale

Considerando un sistema di riferimento locale con origine nel punto medio del lato 1-2, rispetto ad esso, i vertici 1,2,3,4 hanno le seguenti coordinate:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{l_1}{2} \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = \frac{l_1}{2} \\ y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_3 = \frac{l_1}{2} - l_2 \cos \alpha_2 \\ y_3 = l_2 \sin \alpha_2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4 = -\frac{l_1}{2} + l_4 \cos \alpha_1 \\ y_4 = l_4 \sin \alpha_1 \end{cases}$$

Al fine di semplificare la posizione del problema, è possibile utilizzare un sistema di coordinate intrinseche. Viene stabilita una corrispondenza biunivoca tra i punti del generico elemento, ed un quadrato di lato 2 (fig. 2.28), individuato, nel sistema di riferimento intrinseco, dai quattro vertici di coordinate $(1,1), (-1,1), (-1,-1), (1,-1)$. Si considerino inoltre quattro funzioni polinomiali $m_i(u,v)$, tali che ciascuna di esse sia pari all'unità per l' i -esimo vertice, e pari a zero in corrispondenza delle coordinate degli altri tre vertici del quadrato nel sistema di riferimento intrinseco:

$$\begin{aligned}
 m_1(u, v) &= \frac{(1-u)(1-v)}{4} \\
 m_2(u, v) &= \frac{(1+u)(1-v)}{4} \\
 m_3(u, v) &= \frac{(1+u)(1+v)}{4} \\
 m_4(u, v) &= \frac{(1-u)(1+v)}{4}
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Si può inoltre associare ad ogni coppia di coordinate intrinseche un punto dell'elemento con le sue coordinate cartesiane e il suo spessore, sfruttando la trasformazione parametrica:

$$\begin{aligned}
 x(u, v) &= \sum_{i=1}^4 x_i m_i(u, v) \\
 y(u, v) &= \sum_{i=1}^4 y_i m_i(u, v) \\
 s(u, v) &= \sum_{i=1}^4 s_i m_i(u, v)
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

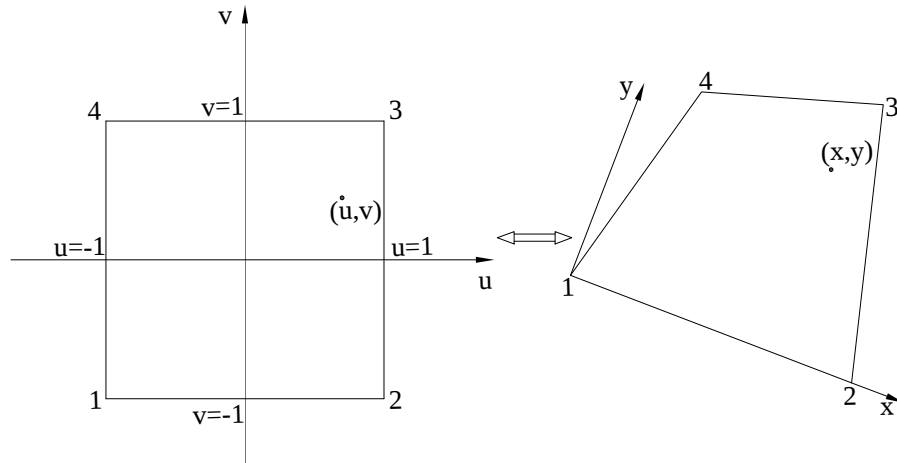


Figura 2.28. Corrispondenza tra sistema di riferimento intrinseco e cartesiano

Considerando ora una porzione infinitesima dell'elemento, che individua, sul piano dell'elemento, l'area dA . mediante la densità volumetri-

ca (che viene supposta costante su tutto l'elemento) e lo spessore associato al punto stesso, si può ricavare la massa della porzione infinitesima come segue

$$dm = \gamma(x, y) dA = \rho s(x, y) dA$$

dove ρ è la densità volumetrica di massa e $\gamma(x, y)$ la densità superficiale di massa, essendo ovviamente

$$\gamma(x, y) = \rho s(x, y)$$

Per calcolare le coordinate del baricentro è sufficiente risolvere le seguenti equazioni nelle incognite x_G e y_G :

$$\begin{aligned} \iint_A \gamma(x, y) dA \cdot x_G &= \iint_A x \cdot \gamma(x, y) dA \\ \iint_A \gamma(x, y) dA \cdot y_G &= \iint_A y \cdot \gamma(x, y) dA \end{aligned} \quad (2.3)$$

Tuttavia, al fine di risolvere gli integrali presenti nelle equazioni (2.3) occorre effettuare un cambiamento di variabili e riportarsi al sistema di riferimento in coordinate intrinseche. Le funzioni integrande sono a due variabili, per cui occorre calcolare lo jacobiano $J(u, v)$.

Si indichi con $\underline{r}$ il vettore che congiunge l'origine del sistema di riferimento locale con il generico punto dell'elemento:

$$\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$$

Questo vettore posizione può essere ottenuto, sfruttando le funzioni di forma, mediante la sommatoria

$$\underline{r} = \sum_{i=1}^4 \underline{r}_i m_i(u, v)$$

Sfruttando l'espressione dello jacobiano di una funzione a due variabili, si calcola l'area dA :

$$dA = \left| \frac{\partial \underline{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \underline{r}}{\partial v} \right| du dv = J(u, v) du dv = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} du dv = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \underline{k} du dv$$

Si possono ora sviluppare le derivate in parentesi, sfruttando ancora una volta le funzioni $m_i(u, v)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial m_i}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial m_i}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \sum_{i=1}^4 y_i \frac{\partial m_i}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} &= \sum_{i=1}^4 y_i \frac{\partial m_i}{\partial v}\end{aligned}$$

Con le opportune sostituzioni, si possono infine esplicitare gli integrali necessari per il calcolo delle coordinate del baricentro:

$$\begin{aligned}\iint_A \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}_G \cdot s(x, y) dA &= \iint_A x \cdot \mathbf{x}_G \cdot s(x, y) dA \\ \iint_A \mathbf{y} \cdot \mathbf{y}_G \cdot s(x, y) dA &= \iint_A y \cdot \mathbf{y}_G \cdot s(x, y) dA\end{aligned}$$

Il calcolo delle coordinate del baricentro si riconduce pertanto al calcolo dei tre integrali

$$\begin{aligned}\iint_A s(x, y) dA &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 s(u, v) J(u, v) du dv \\ \iint_A x \cdot s(x, y) dA &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x(u, v) s(u, v) J(u, v) du dv \\ \iint_A y \cdot s(x, y) dA &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 y(u, v) s(u, v) J(u, v) du dv\end{aligned} \tag{2.4}$$

Questi integrali sono risolvibili analiticamente in quanto integrali di funzioni polinomiali, e pertanto consentono di ottenere facilmente le coordinate del baricentro dell'elemento.

Note le coordinate del baricentro nel sistema di riferimento locale si ricavano quelle nel sistema di riferimento globale:

$$G - \Omega = (1 - \Omega) + (G - 1)$$

dove Ω è l'origine del sistema di riferimento globale. In componenti, le coordinate del baricentro nel sistema di riferimento globale, saranno infine date da:

$$\begin{cases} X_G = \frac{X_1 + X_2}{2} + x_G i_X + y_g j_X \\ Y_G = \frac{Y_1 + Y_2}{2} + x_G i_Y + y_g j_Y \\ Z_G = \frac{Z_1 + Z_2}{2} + x_G i_Z + y_g j_Z \end{cases} \quad (2.5)$$

Si noti infine che la massa di ciascun elemento è data dal seguente integrale, anch'esso risolvibile analiticamente:

$$m = \iint_A \rho \cdot s(x, y) dA \quad (2.6)$$

4. Analisi cinematica

In questo paragrafo si introducono i parametri lagrangiani, o gradi di libertà del sistema, utili per la determinazione della cinematica dell'elemento. I gradi di libertà di ciascun elemento sono sette: sei gradi di libertà di corpo rigido nello spazio (tre traslazioni e tre rotazioni rispetto al baricentro dell'elemento) e il grado di libertà associato alla deformabilità a taglio dell'elemento, rappresentato dalla variazione dell'angolo al primo vertice del quadrilatero, figura 2.29.

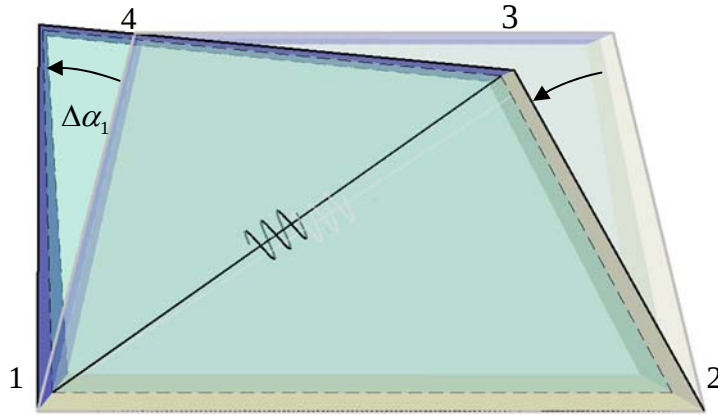


Figura 2.29. La scelta del parametro lagrangiano deformativo

Pertanto, per descrivere la cinematica di q pannelli, occorre considerare $7q$ parametri lagrangiani indipendenti.

Le forze duali dei parametri di spostamento scelti sono state ottenute seguendo un approccio basato sull'applicazione del principio dei lavori virtuali che verrà descritto nel capitolo successivo.

Nei successivi sottoparagrafi vengono analizzati separatamente il moto deformativo nel piano dell'elemento ed il moto rigido. Dalla loro combinazione infine si ricavano le relazioni che legano i parametri lagrangiani con gli spostamenti di ciascun punto di un elemento. Si noti inoltre che gli spostamenti delle interfacce non sono indipendenti ma possono essere ottenuti come combinazione lineare di quelli degli elementi ad essi afferenti.

4.1. Analisi del moto deformativo nel piano dell'elemento

Si consideri inizialmente proprio il grado di libertà deformativo e se ne definisca la cinematica. Con riferimento ad un elemento di forma generica, si consideri un aumento infinitesimo $\Delta\alpha_1$ dell'angolo al vertice 1 assumendo fisso il lato 1-2, figura 2.30. Coerentemente con quanto definito nei paragrafi precedenti si consideri il sistema di riferimento locale rappresentato in figura. Nel presente paragrafo vengono determinate tutte le grandezze cinematiche significative, funzione del parametro lagrangiano considerato $\Delta\alpha_1$.

L'ipotesi di piccoli spostamenti impone che sia $\Delta\alpha_1 \ll 1$; si assuma inoltre che $\Delta\alpha_1$ sia positivo quando determina un incremento dell'angolo α_1 . Note le lunghezze dei lati dell'elemento, la lunghezza delle due diagonali sarà funzione proprio dell'angolo α_1 e il loro allungamento nell'ipotesi di piccoli spostamenti può essere valutato come sviluppo in serie della funzione che esprime la lunghezza delle diagonali in funzione dell'angolo α_1 . Con riferimento alla diagonale tra i vertici 2 e 4 si ha:

$$d_{24} = f(\alpha_1)$$

$$\Delta_{24} = f(\alpha_1 + \Delta\alpha_1) - f(\alpha_1) = f(\alpha_1) + f'(\alpha_1)\Delta\alpha_1 - f(\alpha_1) = f'(\alpha_1)\Delta\alpha_1$$

La lunghezza della diagonale risulta data da

$$d_{24} = \sqrt{l_1^2 + l_4^2 - 2l_1l_4 \cos \alpha_1}$$

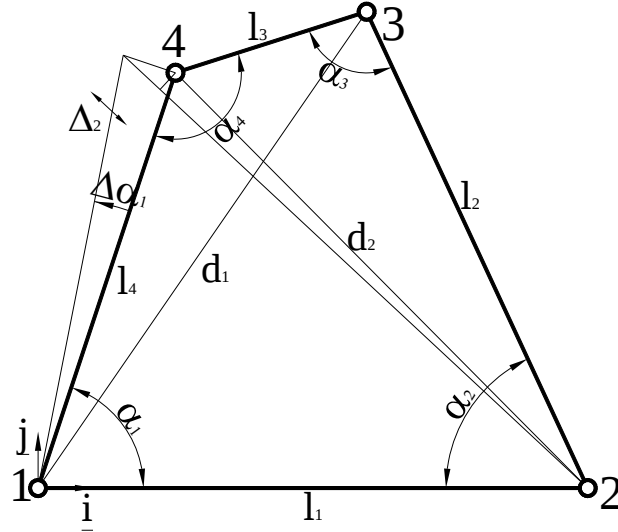


Figura 2.30. Moto deformativo del quadrilatero

Derivando e moltiplicando per $\Delta\alpha_1$ si ottiene

$$\Delta_{24} = \frac{1}{2\sqrt{l_1^2 + l_4^2 - 2l_1l_4 \cos \alpha_1}} 2l_1l_4 \sin \alpha_1 \cdot \Delta\alpha_1 \Rightarrow \Delta_{24} = \frac{l_1l_4 \sin \alpha_1}{d_{24}} \Delta\alpha_1$$

Analoghe espressioni si possono ottenere con riferimento alla diagonale d_{13} semplicemente scambiando i ruoli tra gli angoli α_1 e α_2 e tra i lati l_4 e l_2 .

$$d_{13} = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 - 2l_1l_2 \cos \alpha_2}$$

$$\Delta_{13} = \frac{l_1l_2 \sin \alpha_2}{d_{13}} \Delta\alpha_2$$

Occorre tuttavia esprimere la variazione d'angolo $\Delta\alpha_2$ in funzione del parametro lagrangiano $\Delta\alpha_1$. Con semplici considerazioni geometriche sulla cinematica per piccoli spostamenti riportata in figura 2.31 si ricava l'espressione che esprime l'incremento di angolo $\Delta\alpha_2$ in funzione di $\Delta\alpha_1$.

$$\Delta\alpha_2 = -\frac{l_4 \sin \alpha_4}{l_2 \sin \alpha_3} \Delta\alpha_1$$

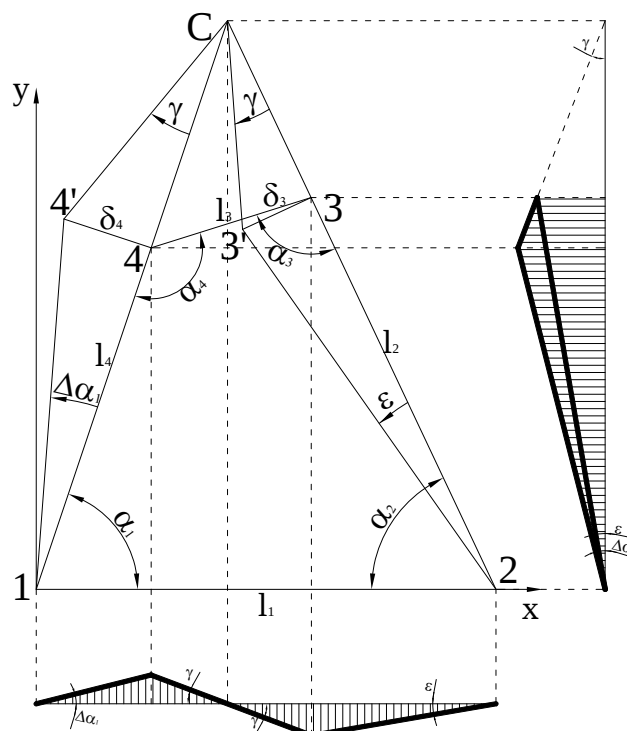


Figura 2.31. Cinematica del moto deformativo del quadrilatero

4.2. Moto rigido del quadrilatero

Assumendo l'ipotesi di piccoli spostamenti, lo spostamento di un generico punto di un corpo dovuto ad un atto di moto rigido può essere descritto dalla relazione vettoriale:

$$\underline{s}_P = \underline{s}_O + \underline{\Phi} \wedge \underline{r}_{OP}$$

dove:

- $\underline{s}_P$ è il vettore spostamento del generico punto P del corpo;
- $\underline{s}_O$ è il vettore spostamento di un punto O del corpo rigido;

- $\underline{\Phi}$ è il vettore di rotazione, le cui componenti rappresentano le rotazioni del corpo rigido rispetto ai tre assi del sistema di riferimento globale

$$\underline{\Phi} = \Phi_x \underline{I} + \Phi_y \underline{J} + \Phi_z \underline{K}$$

in cui il verso positivo delle rotazioni è stabilito con la regola della mano destra;

- $\underline{r}_{OP} = (\underline{P} - \underline{O})$ è il raggio vettore del punto P rispetto ad O .

Con riferimento al moto rigido del quadrilatero si assuma come origine O il suo baricentro G . Sviluppando le relazioni di moto rigido dell'elemento, gli spostamenti dei vertici del quadrilatero per un moto rigido sono dati da

$$\begin{cases} U_i = U_G + \Phi_y (Z_i - Z_G) - \Phi_z (Y_i - Y_G) \\ V_i = V_G + \Phi_z (X_i - X_G) - \Phi_x (Z_i - Z_G) \\ W_i = W_G + \Phi_x (Y_i - Y_G) - \Phi_y (X_i - X_G) \end{cases} \quad \text{per } i=1, \dots, 4$$

4.3. Sovrapposizione dei moti rigido e deformativo del quadrilatero

I sette parametri che definiscono lo spostamento del quadrilatero articolato sono:

$$U_G, V_G, W_G, \Phi_x, \Phi_y, \Phi_z, \Delta\alpha_1$$

dove i primi sei parametri definiscono il moto rigido dell'elemento, mentre il settimo individua il moto deformativo.

Il moto rigido, determinato dalle componenti dello spostamento del baricentro del quadrilatero U_G, V_G, W_G e dalle rotazioni attorno ai tre assi del sistema di riferimento globale Φ_x, Φ_y, Φ_z , è tale da posizionare il lato 1-2 direttamente nella sua configurazione finale sicché la deformazione definita dal parametro $\Delta\alpha_1$ agirà solo sui lati 2-3, 3-4, 4-1, ovvero sui vertici 3 e 4 dell'elemento. Questa ipotesi risulta fondamentale affinché il parametro $\Delta\alpha_1$ definisca in modo univoco la posizione nello spazio del quadrilatero articolato per una generica settupla di parametri lagrangiani.

Per i vertici 1 e 2, non influenzati dal moto deformativo, si ha:

$$\begin{cases} U_1 = U_G + \Phi_Y(Z_1 - Z_G) - \Phi_Z(Y_1 - Y_G) \\ V_1 = V_G + \Phi_Z(X_1 - X_G) - \Phi_X(Z_1 - Z_G) \\ W_1 = W_G + \Phi_X(Y_1 - Y_G) - \Phi_Y(X_1 - X_G) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_2 = U_G + \Phi_Y(Z_2 - Z_G) - \Phi_Z(Y_2 - Y_G) \\ V_2 = V_G + \Phi_Z(X_2 - X_G) - \Phi_X(Z_2 - Z_G) \\ W_2 = W_G + \Phi_X(Y_2 - Y_G) - \Phi_Y(X_2 - X_G) \end{cases}$$

Per i vertici 3 e 4 si rende necessaria la sovrapposizione dei moti rigido e deformativo del quadrilatero. Si ha allora:

$$\begin{cases} U_3 = U_G + \Phi_Y(Z_3 - Z_G) - \Phi_Z(Y_3 - Y_G) - \frac{l_4 \sin \alpha_4 \sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} \cdot \Delta \alpha_1 \cdot i_x - \frac{l_4 \sin \alpha_4 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_3} \cdot \Delta \alpha_1 \cdot j_x \\ V_3 = V_G + \Phi_Z(X_3 - X_G) - \Phi_X(Z_3 - Z_G) - \frac{l_4 \sin \alpha_4 \sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} \cdot \Delta \alpha_1 \cdot i_y - \frac{l_4 \sin \alpha_4 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_3} \cdot \Delta \alpha_1 \cdot j_y \\ W_3 = W_G + \Phi_X(Y_3 - Y_G) - \Phi_Y(X_3 - X_G) - \frac{l_4 \sin \alpha_4 \sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} \cdot \Delta \alpha_1 \cdot i_z - \frac{l_4 \sin \alpha_4 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_3} \cdot \Delta \alpha_1 \cdot j_z \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_4 = U_G + \Phi_Y(Z_4 - Z_G) - \Phi_Z(Y_4 - Y_G) - l_4 \sin \alpha_1 \cdot \Delta \alpha_1 \cdot i_x + l_4 \cos \alpha_1 \cdot \Delta \alpha_1 \cdot j_x \\ V_4 = V_G + \Phi_Z(X_4 - X_G) - \Phi_X(Z_4 - Z_G) - l_4 \sin \alpha_1 \cdot \Delta \alpha_1 \cdot i_y + l_4 \cos \alpha_1 \cdot \Delta \alpha_1 \cdot j_y \\ W_4 = W_G + \Phi_X(Y_4 - Y_G) - \Phi_Y(X_4 - X_G) - l_4 \sin \alpha_1 \cdot \Delta \alpha_1 \cdot i_z + l_4 \cos \alpha_1 \cdot \Delta \alpha_1 \cdot j_z \end{cases}$$

Per determinare le sollecitazioni nei NLink delle interfacce occorre valutarne le deformazioni. Queste ultime dipendono dagli spostamenti delle interfacce esprimibili, come combinazione lineare, a partire dai parametri lagrangiani degli elementi corrispondenti.

5. Elementi speciali triangolari

Come già brevemente accennato, il problema principale riscontrato nell'estensione del macromodello piano al caso delle volte sottili, è soprattutto geometrico. Per far fronte alle esigenze di una geometria curva e spesso irregolare, non sempre è possibile l'uso esclusivo di elementi quadrangolari. Ove necessario possono essere inseriti dei particolari elementi particolari, denominati per convenzione *elementi speciali trian-*

golari. Questi elementi consentono una mesh più aderente al modello reale in zone, come appunto quella di chiave di una cupola (Figura 2.32), o quelle in cui si innestano parti diverse di una volta composta, che sono spesso quelle che più facilmente possono presentare rotture.

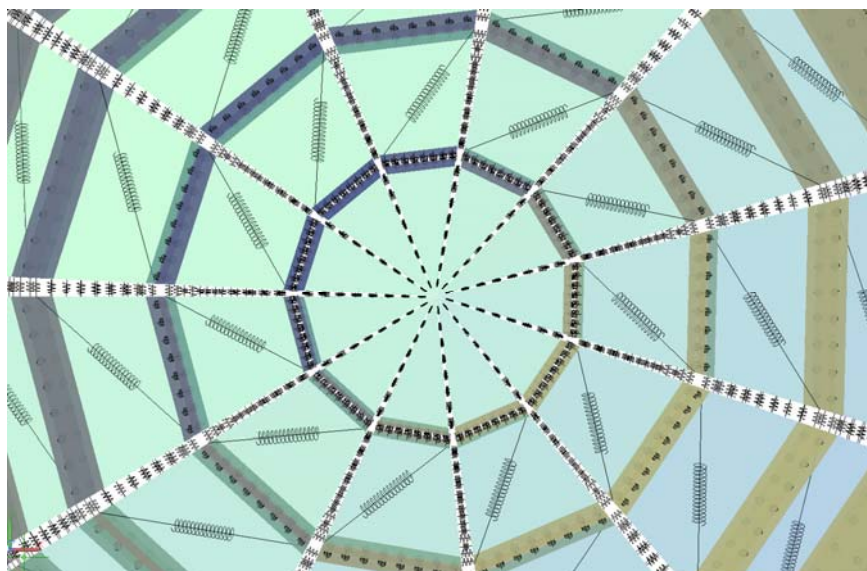


Figura 2.32. Volta modellata mediante una mesh di macro-elementi: particolare della zona in chiave

Si capisce quindi come la modellazione di questi elementi risulta decisiva per cogliere molti meccanismi di collasso.

Gli elementi che sono utilizzati sono individuati da tre nodi e quindi risultano costituiti da tre aste rigide, con la conseguente impossibilità di valutare la deformabilità a nel proprio piano della zona modellata. Tale approssimazione si è considerata però accettabile, sia perché l'utilizzo degli *elementi speciali triangolari* può essere limitato a piccole zone della struttura, sia perché il meccanismo di rottura prevalente è generalmente quello membranale e pertanto l'introduzione degli elementi non comporta una significativa perdita di accuratezza della soluzione.

L'interazione degli *elementi speciali triangolari* può avvenire sia tra elementi dello stesso tipo sia con eventuali quadrilateri con i quali vengono condivisi dei lati (Figura 2.33), sia con vincoli esterni. Ad ogni mo-

do l'interazione avviene mediante interfacce discrete, in generale inclinate rispetto ai piani dei due elementi contigui, del tutto analoghe a quelle introdotte per definire l'interazione tra elementi quadrangolari.

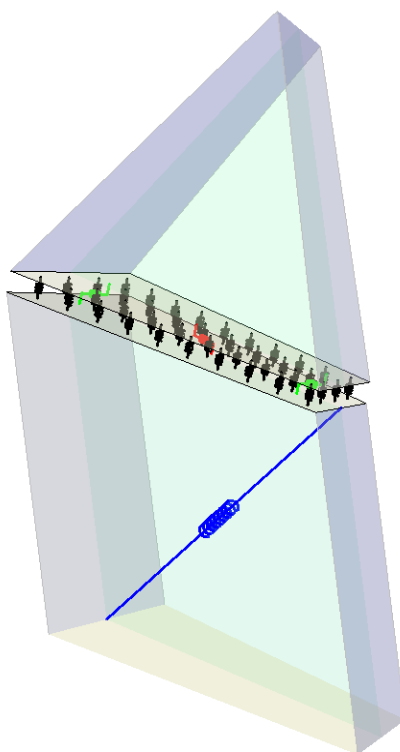


Figura 2.33. Interazione tra un elemento speciale triangolare e un quadrilatero limitrofo mediante un'interfaccia discreta

Poiché nel caso degli elementi speciali triangolari, rispetto a quelli quadrangolari non viene considerata la deformabilità dell'elemento nel proprio piano, i parametri lagrangiani necessari per descrivere la cinematica dell'elemento si riducono a sei, corrispondenti a quelli di moto rigido: le tre traslazioni nello spazio e le tre rotazioni attorno al centro di massa rispetto ai tre assi del sistema di riferimento globale. I gradi di libertà sono pertanto

$$U_G, V_G, W_G, \Phi_X, \Phi_Y, \Phi_Z$$

Le relazioni cinematiche, che consentono di determinare gli spostamenti dei vertici dell'elemento speciale triangolare in funzione dei

parametri lagrangiani, possono essere derivate in analogia al moto rigido dell'elemento quadrangolare, e senza perdita di generalità si ha:

$$\begin{cases} U_i = U_G + \Phi_Y(Z_i - Z_G) - \Phi_Z(Y_i - Y_G) \\ V_i = V_G + \Phi_Z(X_i - X_G) - \Phi_X(Z_i - Z_G) \\ W_i = W_G + \Phi_X(Y_i - Y_G) - \Phi_Y(X_i - X_G) \end{cases} \quad \text{per } i=1,2,3$$

Bibliografia

- [1] Calìo, I., Marletta, M., Pantò, B., 2004. “*Un semplice macro-elemento per la valutazione della vulnerabilità sismica di edifici in muratura*”, 11th Covegno Nazionale ‘L’Ingegneria Sismica in Italia”, 25 -29 Gennaio, Genova.
- [2] Calìo, I., Marletta, M., Pantò, B., 2008. “*A discrete element approach for the evaluation of the seismic response of masonry buildings*”, 14th World Conference of Earthquake, October 12 -17, Beijing, China.

Capitolo 3

LA CARATTERIZZAZIONE COSTITUTIVA DEL MACRO-ELEMENTO

Nel capitolo precedente sono stati affrontati gli aspetti legati alla rappresentazione geometrica del modello globale e alla descrizione della cinematica del singolo elemento discreto. Il macro-elemento è stato concepito allo scopo di cogliere i principali meccanismi di rottura di una porzione di elemento murario a geometria curva nello spazio limitando all'essenziale il numero di parametri lagrangiani necessari per la descrizione della cinematica. In questo capitolo vengono descritte le procedure di caratterizzazione costitutiva del macro-elemento. La risposta membranale e flessionale viene caratterizzata attraverso una modellazione a fibre in cui le proprietà di ogni link non lineare discendono dalla fibra di muratura rappresentata, tale approccio può essere considerato una generalizzazione della modellazione a fibre adottata per le strutture in calcestruzzo armato. Il comportamento non lineare associato a sollecitazioni di taglio agenti nel piano dell'elemento è descritto attraverso la definizione di una lastra equivalente e un legame costitutivo non lineare dipendente all'azione normale di confinamento dell'elemento valutata coerentemente con l'approccio a fibre. I meccanismi non lineari di scorrimento vengono invece governati attraverso l'introduzione di links non lineari posti nei piani delle interfacce. Il link che regola lo scorrimento nel piano è di tipo rigido-plastico, mentre la risposta associata a sollecitazioni di taglio agenti fuori dal piano dell'elemento e la risposta torsionale vengono calibrate, nella fase iniziale elastica, attraverso un approccio a fibre. Per tutti gli

Nlinks la calibrazione discende direttamente dai parametri che definiscono le proprietà della muratura associate al particolare legame costitutivo adottato. L'approccio di calibrazione è stato concepito in modo da non determinare alcuna ambiguità dipendendo esclusivamente dalla geometria e dalle caratteristiche del materiale.

Nel seguito si procederà dapprima ad una descrizione generale dell'approccio di calibrazione proposto; successivamente si descriveranno nel dettaglio le procedure di calibrazione che, si ribadisce, discendono direttamente dalle caratteristiche meccaniche della muratura una volta definiti i criteri di crisi adottati.

1. La strategia di calibrazione del modello

Nel paragrafo che segue verranno descritte le procedure seguite per la taratura dei links nonlineari del modello discreto equivalente in funzione dei parametri meccanici della muratura e della discretizzazione geometrica.

Il materiale muratura, visto come un continuo omogeneo, viene modellato utilizzando legami costitutivi differenti per i principali aspetti del suo comportamento. Ciascun link nonlineare del macro-elemento eredita il legame costitutivo utilizzato nel modello continuo di riferimento e i suoi parametri vengono determinati a partire dai parametri del modello continuo tramite procedure di taratura.

Nel capitolo precedente è stato mostrato come la cinematica dell'elemento consenta di simulare i principali meccanismi di collasso dell'elemento di muratura che il macro-elemento è deputato a rappresentare.

Il macro-elemento considerato è potenzialmente in grado di simulare la risposta fuori piano dell'elemento. In figura 3.1 è rappresentato un meccanismo di collasso di una volta a botte con formazione di cerniere cilindriche. Per strutture di questo tipo la risposta del macro-elemento è governata sia dalle links ortogonali alle interfacce (come nell'esempio in figura) che da quelle trasversali che controllano l'eventuale scorrimento fuori piano (con possibile formazione di cerniere a taglio).

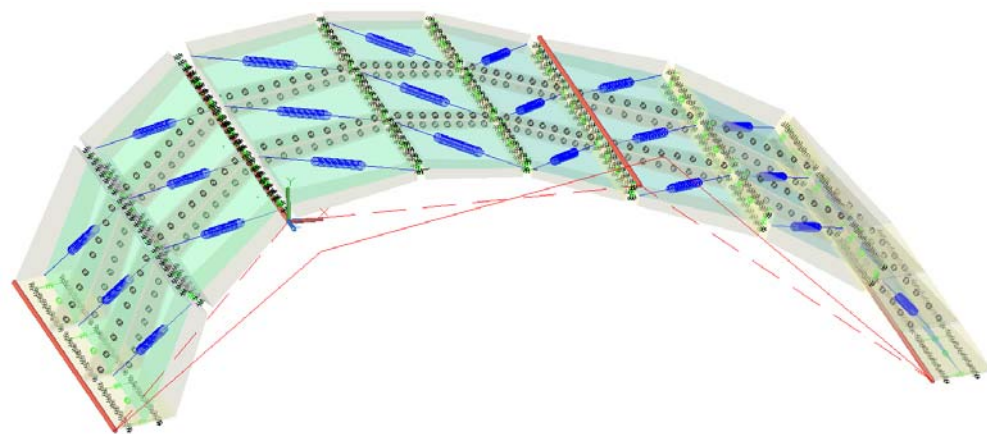


Figura 3.1. Esempio di deformazione a collasso di una volta a botte con formazione di cerniere cilindriche

Anche un eventuale meccanismo di collasso torsionale di una porzione di muratura sebbene improbabile, risulta in linea di principio attivabile con la modellazione considerata.

Per quanto detto il macro-elemento considerato risulta potenzialmente in grado di simulare *macroscopicamente* i principali meccanismi di collasso di una porzione di elemento murario a geometria curva nello spazio, tuttavia i risultati della modellazione potranno produrre essere considerati attendibili solo se si procederà ad una calibrazione efficace dei NLinks, ovvero essa deve essere tale da restituire una risposta del modello coerente con i risultati sperimentali. Le procedure di taratura considerate ed esposte nel seguito riflettono la strategia di concezione del macro-elemento basata su un approccio di discretizzazione per fibre.

Riprendendo quanto già espresso nel capitolo precedente, gli elementi meccanici che determinano il comportamento dell'elemento discreto equivalente ad una porzione di muratura a geometria curva sono:

- un letto discreto di links, con asse ortogonale al piano dell'interfaccia di appartenenza, che simula l'interazione flessionale e membranale tra gli elementi che collegano;

- tre links a scorrimento disposte, una secondo il primo asse dell'interfaccia che regola lo scorrimento nel piano, e le altre due secondo un asse ortogonale al primo e giacente sempre sul piano dell'interfaccia, che simulano l'interazione tangenziale tra i diversi elementi;

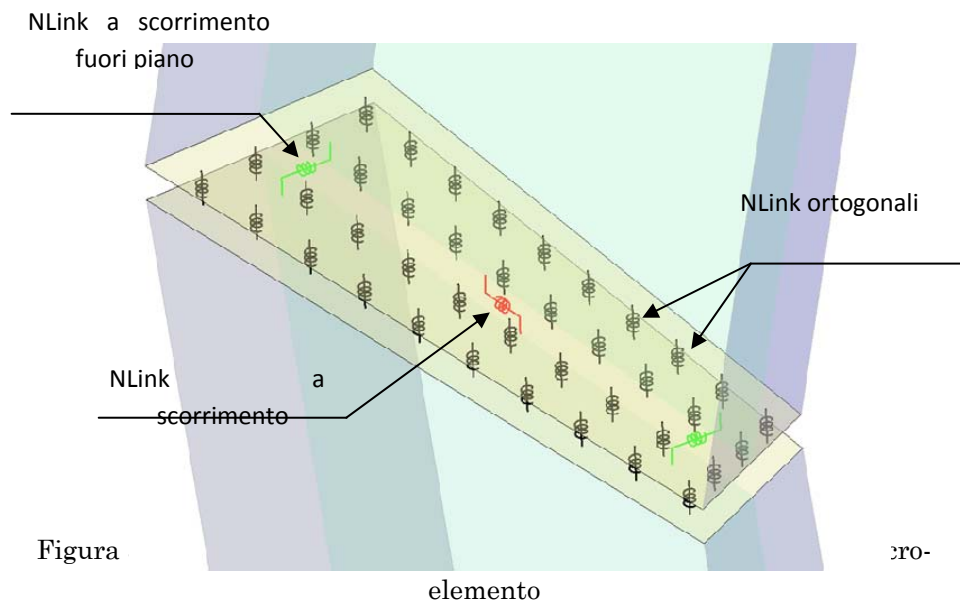
- un link diagonale tra due vertici del quadrilatero che simula la deformabilità nel piano dell'elemento considerato.

Sulla base delle considerazioni sopradette il modello discreto è potenzialmente in grado di simulare la risposta di strutture murarie a geometria curva attraverso un approccio per macro-elementi. Tuttavia l'efficacia della modellazione è fortemente dipendente dalla strategia di calibrazione dei Links nonlineari deputati a rappresentare la risposta dell'elemento sia in campo elastico che in regime inelastico. La procedura adottata è basata sulla suddivisione dell'elemento in fibre, cui dipendono direttamente le proprietà dei link ortogonali delle interfacce, e sul contributo di ulteriori links delegati anche alla rappresentazione della risposta dell'elemento al di fuori del proprio piano.

2. La calibrazione dei Link d'interfaccia

I legami costitutivi delle links di interfaccia dipendono dalle caratteristiche della muratura di entrambi i pannelli a contatto, e svolgono il fondamentale compito di concentrare in sé caratteristiche di deformabilità e resistenza dei pannelli che connettono.

Nel descrivere le procedure di calibrazione dei link d'interfaccia conviene distinguere i link ortogonali alle interfacce da quelli disposti nel piano delle interfacce stesse, figura 3.2.



I links ortogonali alle interfacce rigide governano principalmente il comportamento membranale e flessionale dei pannelli che collegano. In particolare, la risposta membranale viene simulata mediante diverse file di links nonlineari la cui calibrazione è associata alla suddivisione del macro-elemento in fibre a sezione variabile orientate secondo le direzioni che collegano le facce opposte. In quest'ottica ogni link flessionale sarà tarata in modo da assumere un comportamento aderente a quello del volume del materiale che sostituisce. Dal punto di vista del comportamento assiale la muratura viene modellata come un continuo omogeneo isotropo inelastico. Il legame costitutivo non lineare viene attribuito a ciascuna fibra mediante l'assegnazione di un legame ciclico mono-assiale.

Le operazioni di taratura dei link d'interfaccia devono essere oggettive e dipendere esclusivamente dalla geometria, dalla densità di discretizzazione e dai parametri necessari a caratterizzare il particolare legame costitutivo scelto per la modellazione. Nei successivi sotto-paragrafi si riportano alcuni esempi di taratura dei link ortogonali d'interfaccia. Il primo esempio considerato è relativo al legame elastico-lineare isotropo necessario anche per la definizione delle proprietà

dinamiche iniziali del modello. Successivamente verrà considerato un legame costitutivo elasto-plastico non incrudente.

2.1. La calibrazione dei Link ortogonali d'interfaccia associata ad un legame costitutivo elastico lineare

Si consideri un solido elastico lineare isotropo ed omogeneo, le cui proprietà sono caratterizzate dalla definizione dei seguenti parametri

E : modulo di Young;

ν : coefficiente di Poisson.

Essendo la deformabilità membranale e flessionale di ogni singolo elemento concentrata nei links d'interfaccia, le proprietà meccaniche di questi dovranno essere ricavati a partire dalle caratteristiche di entrambi i quadrilateri a contatto con l'interfaccia.

La procedura che si segue per trasferire le proprietà della muratura dei pannelli ai link ortogonali di interfaccia può essere pensata in tre fasi successive. Nella prima fase viene effettuata la suddivisione in fibre degli elementi in accordo agli orientamenti principali. Nella seconda fase le caratteristiche di deformabilità di ciascuna fibra vengono rappresentate da un link elastico lineare equivalente; in questo modo a ciascuna coppia di quadrilateri accostati corrispondono due distribuzioni di links lineari rappresentativi delle proprietà elastiche di una porzione dei quadrilateri stessi, detto *volume del quadrilatero afferente all'interfaccia*, figura 3.3, (avente generalmente un volume pari alla metà del volume totale del quadrilatero stesso, oppure tale che ogni fibra risulti divisa in due parti di uguale lunghezza); nella fase successiva per semplicità ciascuna delle coppie di links poste in serie viene sostituita con un unico link di rigidezza risultante, figura 3.4. Tali operazioni di calibratura, semplici e oggettive, effettuate in entrambe le direzioni principali dell'elemento strutturale consentono di trasferire la risposta membranale e flessionale degli elementi ai link ortogonali d'interfaccia.

Nel seguito si descrivono dettagliatamente ciascuna delle fasi che determinano la calibrazione dei link ortogonali d'interfaccia.

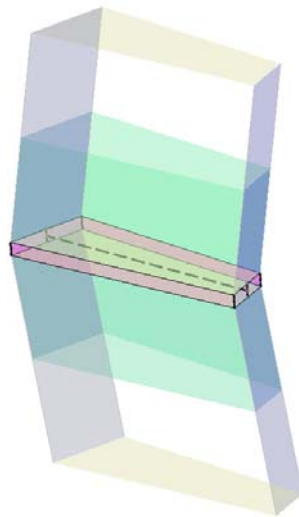


Figura 3.3. Volume di elemento quadrilatero afferente ad una interfaccia

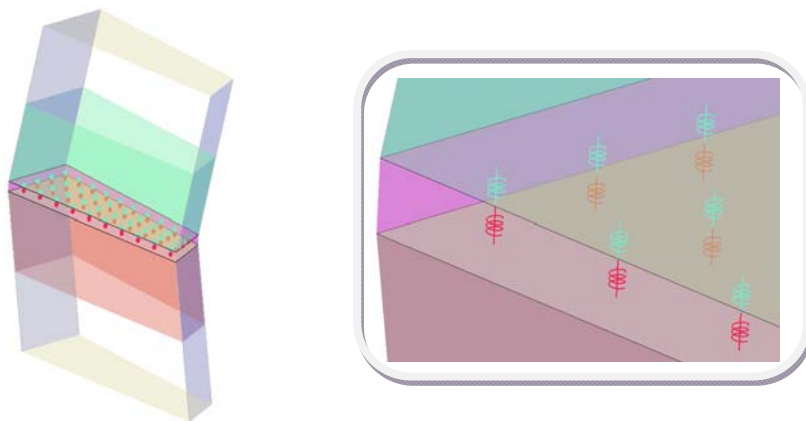


Figura 3.4. Distribuzione delle coppie di links associati a ciascun volume di elemento quadrilatero afferente all'interfaccia

2.1.1. Suddivisione degli elementi in fibre lungo le direzioni principali

Nel capitolo 2 è stato mostrato come occorre procedere per passare dalla rappresentazione geometrica alla rappresentazione per macro-elementi. Per effettuare le operazioni di calibrazione del modello è necessario suddividere ogni macro-elemento in fibre orientate che,

operando una discretizzazione della struttura secondo le direzioni principali (il cui significato è stato introdotto nel capitolo 2), risulteranno orientate secondo le medesime direzioni. In figura 3.5 è riportata una suddivisione in fibre del generico macro-elemento nelle due direzioni principali, il numero di suddivisioni è legato alla densità di discretizzazione; in ogni caso lungo lo spessore dell'elemento occorre considerare almeno due diverse file di links necessari per potere cogliere anche la flessione al di fuori del piano dell'elemento. L'esempio riportato in figura è relativo ad una discretizzazione che prevede un totale di 16 fibre in direzione dei meridiani e 16 fibre in direzione dei paralleli disposti su due file.

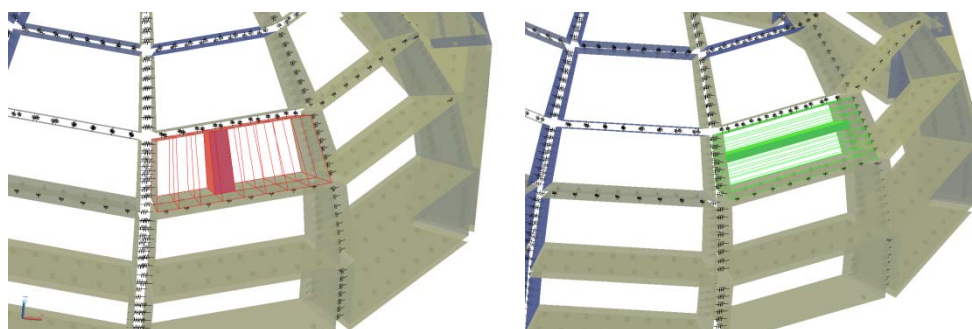


Figura 3.5. Un esempio di suddivisione in fibre del macro-elemento per la taratura dei links ortogonali d'interfaccia

Si osservi che la suddivisione in fibre lungo una delle direzioni principali può essere effettuata considerando un numero diverso di fibre in corrispondenza delle interfacce opposte dal momento che i links d'interfaccia sono rappresentativi di una porzione del macro-elemento corrispondente al volume d'influenza dell'interfaccia. Tale peculiarità risulta utile nel definire una discretizzazione associata ad una dimensione minima dell'area di influenza.

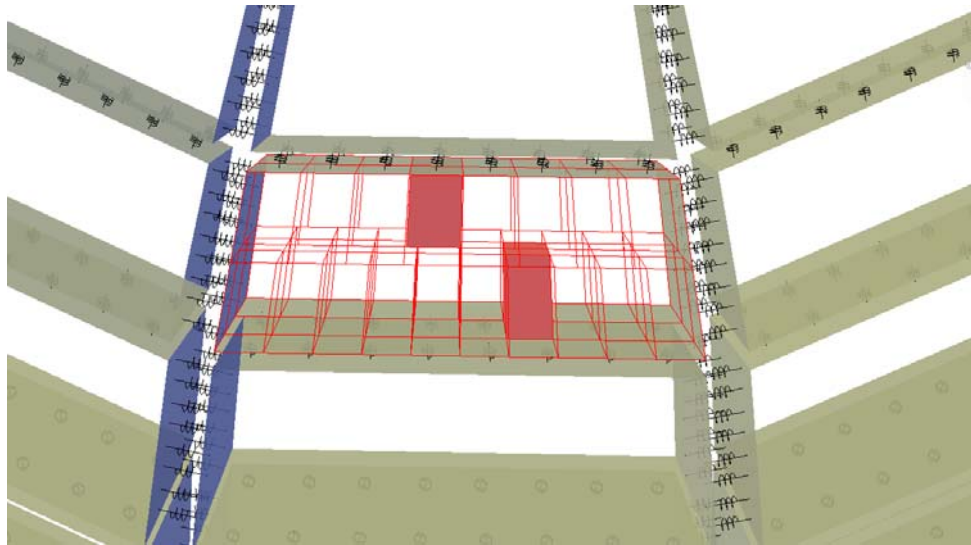


Figura 3.6. La suddivisione in fibre con un numero diverso di links nelle interfacce opposte

2.1.2. Individuazione della geometria di ogni singola fibra

Le caratteristiche di ogni fibra vengono concentrate nelle links di estremità assimilando ogni singola fibra ad una trave a sezione variabile, figura 3.7. Nel seguito si descrive la procedura adottata per la determinazione della geometria di ogni singola fibra.

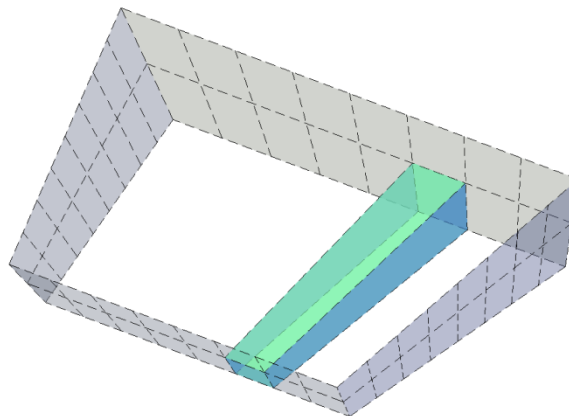


Figura 3.7. La generica fibra rappresentata come trave non omogenea

Per semplificare le operazioni di taratura, nella suddivisione in fibre del macro-elemento è opportuno operare considerando una geometria distorta che costringe l'elemento ad assumere una forma regolare. Ciò si ottiene operando attraverso un sistema di coordinate intrinseche.

Una volta nota la geometria dell'interfaccia definita in accordo alle procedure descritte nel capitolo precedente, sia n il numero di file di links che si vogliono inserire in direzione trasversale (quella del primo asse dell'interfaccia), ed m quello in direzione longitudinale (lungo lo spessore). Immaginando di suddividere il segmento corrispondente ai lati dei quadrilateri connessi l'interfaccia in n parti, e di considerare una suddivisione della stessa interfaccia in m strisce, resta individuata una griglia nel piano dell'interfaccia, cui corrispondono delle maglie quadrangolari come riportate in figura 3.8a. Introducendo un sistema di coordinate intrinseche, caratterizzato dagli assi $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e centrato sull'origine degli come mostrato in figura 3.8b, si può stabilire una corrispondenza biunivoca tra tutti i punti di un quadrato di lato 2 rappresentato nel sistema di coordinate intrinseco e i punti dell'interfaccia. Pertanto, suddividendo nel sistema di riferimento in coordinate intrinseche il quadrato secondo una griglia regolare di m colonne ed n righe, corrispondentemente si avrà una suddivisione dell'area dell'interfaccia in $m \times n$ aree, che in generale saranno distorte rispetto alla suddivisione regolare nel riferimento in coordinate intrinseche.

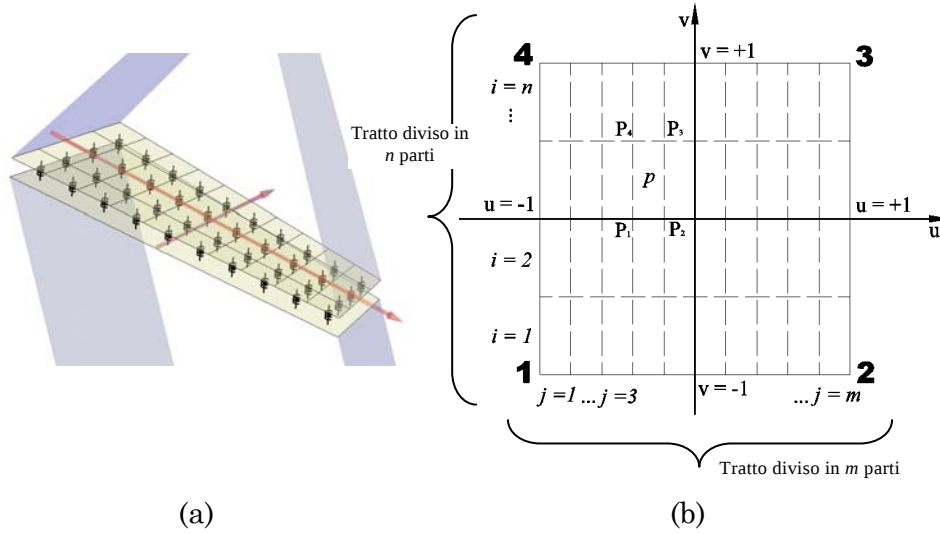


Figura 3.8. Griglie di suddivisione dell'interfaccia: (a) sistema geometrico; (b) sistema di riferimento intrinseco.

Per la generica p -esima area, collocata nella maglia in corrispondenza della riga i e della colonna j , valgono le seguenti trasformazioni isoparametriche relative ai quattro vertici e al suo centro:

$$\begin{cases} u_{P1} = -1 + \frac{2}{m}(j-1) \\ v_{P1} = -1 + \frac{2}{n}(i-1) \end{cases} \quad \begin{cases} u_{P2} = -1 + \frac{2}{m}j \\ v_{P2} = -1 + \frac{2}{n}(i-1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{P3} = -1 + \frac{2}{m}j \\ v_{P3} = -1 + \frac{2}{n}i \end{cases} \quad \begin{cases} u_{P4} = -1 + \frac{2}{m}(j-1) \\ v_{P4} = -1 + \frac{2}{n}i \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{PC} = -1 + \frac{2}{m}(j-1) + \frac{1}{m} \\ v_{PC} = -1 + \frac{2}{n}(i-1) + \frac{1}{n} \end{cases}$$

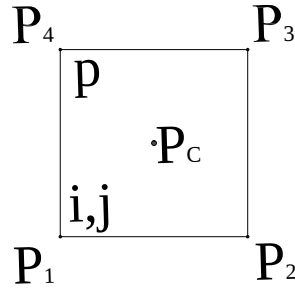


Figura 3.9. Area p -esima della discretizzazione dell'interfaccia nel sistema di riferimento intrinseco

Le relazioni che legano la griglia di suddivisione del quadrato di lato 2 nel sistema di riferimento intrinseco, con la maglia quadrangolare dell'interfaccia, possono essere espresse mediante le quattro funzioni di forma già riportate in (2.1), come mostrato in figura 3.10.

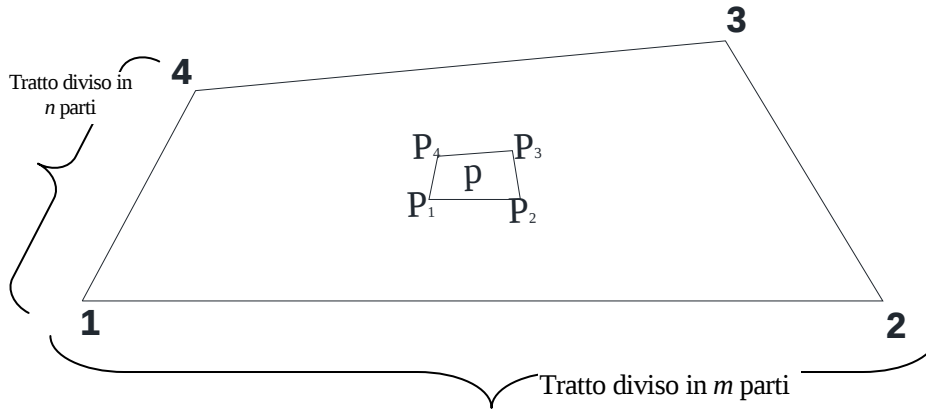


Figura 3.10. Proiezione della griglia di suddivisione sull'area reale

Sia q il vertice dell'elemento p della discretizzazione dell'interfaccia (con $q \in \{1, 2, 3, 4\}$), e siano i quattro vertici dell'interfaccia caratterizzati dalle coordinate (X_k, Y_k, Z_k) , con $k \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Allora le coordinate del generico vertice e del centro dell'area considerata, nel sistema di riferimento globale, saranno date rispettivamente da:

$$\begin{cases} X_{pq} = \sum_{k=1}^4 X_k m_k(u_{pq}, v_{pq}) \\ Y_{pq} = \sum_{k=1}^4 Y_k m_k(u_{pq}, v_{pq}) \\ Z_{pq} = \sum_{k=1}^4 Z_k m_k(u_{pq}, v_{pq}) \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} X_{pC} = \sum_{k=1}^4 X_k m_k(u_{pC}, v_{pC}) \\ Y_{pC} = \sum_{k=1}^4 Y_k m_k(u_{pC}, v_{pC}) \\ Z_{pC} = \sum_{k=1}^4 Z_k m_k(u_{pC}, v_{pC}) \end{cases} \quad (3.2)$$

Nell'interfaccia opposta a quella considerata, con un procedimento analogo, e mantenendo la medesima suddivisione $m \times n$, è possibile considerare una corrispondenza tra aree omologhe di tali interfacce, delimitate a loro volta da vertici anch'essi omologhi tra loro (fig. 3.11). I vertici di ciascuna coppia di aree omologhe individuano un volume che rappresenta la fibra del quadrilatero che si intende considerare. Tale fibra viene considerata astratta dal contesto, e la taratura del corrispondente link avviene considerandola isolata dal resto.

Si supponga di considerare una generica fibra. Il versore $\underline{e}_p$ individua la direzione congiungente il centro dell'area p nella discretizzazione dell'interfaccia considerata con quello dell'area omologa nella discretizzazione dell'interfaccia opposta. La lunghezza del segmento che unisce i due centri è data da:

$$l_p = \sqrt{(X_{s,pC} - X_{r,pC})^2 + (Y_{s,pC} - Y_{r,pC})^2 + (Z_{s,pC} - Z_{r,pC})^2} \quad (3.3)$$

dove s e r fanno riferimento rispettivamente all'interfaccia considerata e alla sua opposta.

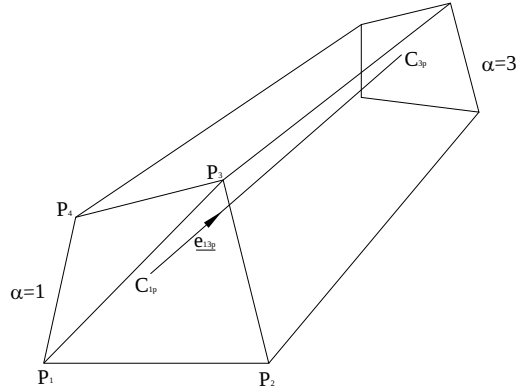


Figura 3.11. Volume individuato da una coppia di aree corrispondenti

Per determinare le caratteristiche meccaniche delle links ci si basa sulle caratteristiche geometriche e meccaniche delle fibre che di volta in volta si considerano. Occorre in particolare valutare il volume della fibra modellata. Per semplificare la trattazione ci si riferisce, in questa fase, ad un sistema di riferimento locale della fibra, con origine nel centro dell'elemento p dell'interfaccia considerata, e avente come assi quelli individuati da una terna di versori $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ tali che $\underline{c} = \underline{e}_p$, $\underline{b}$ ottenuto come versore della proiezione del vettore $(P_{s,1} - C_{s,p})$ sul piano avente come normale $\underline{c}$, ed $\underline{a}$ ottenuto dal prodotto vettoriale $\underline{a} = \underline{b} \wedge \underline{c}$ (Figura 3.12). Si ha allora:

$$c_X = \frac{X_{3pC} - X_{1pC}}{l_{13p}}; c_Y = \frac{Y_{3pC} - Y_{1pC}}{l_{13p}}; c_Z = \frac{Z_{3pC} - Z_{1pC}}{l_{13p}}$$

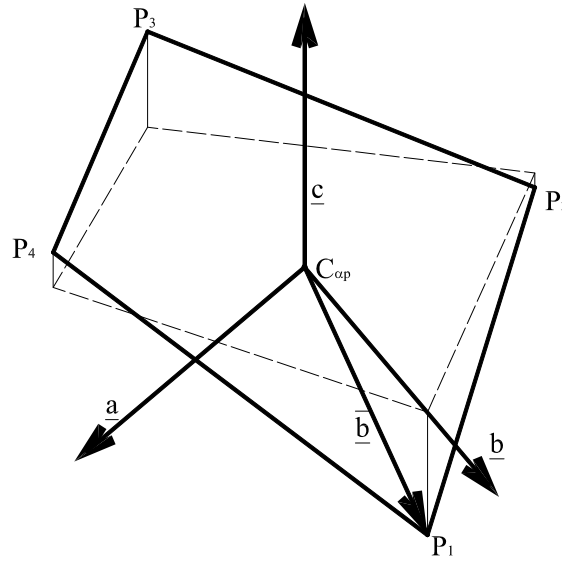


Figura 3.12. Individuazione del sistema di riferimento locale della fibra

Si può ora porre:

$$\begin{aligned}\bar{\underline{b}} &= (X_{1p1} - X_{1pC})\underline{I} + (Y_{1p1} - Y_{1pC})\underline{J} + (Z_{1p1} - Z_{1pC})\underline{K} \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{b} &= \frac{\bar{\underline{b}} - (\bar{\underline{b}} \cdot \underline{c})\underline{c}}{|\bar{\underline{b}} - (\bar{\underline{b}} \cdot \underline{c})\underline{c}|}\end{aligned}$$

È ora completamente definita la terna levogira, centrata nel punto di coordinate $X_{s,pC}, Y_{s,pC}, Z_{s,pC}$. Le coordinate dei vertici nel sistema di riferimento locale possono essere ottenute da quelle nel sistema di riferimento assoluto mediante una roto-traslazione degli assi che può essere descritta dalla relazione

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X - X_{s,pC} \\ Y - Y_{s,pC} \\ Z - Z_{s,pC} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Sfruttando questa relazione, le coordinate dei quattro vertici dell'area dell'interfaccia considerata e quelle dei quattro vertici dell'area

omologa opposta possono essere convertite dal sistema di riferimento globale a quello locale.

Si osserva però che, in generale, le facce della discretizzazione non sono ortogonali alla retta che congiunge i loro centri. Affinché si riesca a calcolare il volume individuato dalle due facce si impone un'approssimazione che consente di ricondursi al caso di un prismatoide (poliedro i cui vertici giacciono su due piani paralleli) così da semplificare il calcolo del volume (Figura 3.14). Si considerino, nel sistema di riferimento locale, le intersezioni con i piani $z=0$ e $z=l_p$, delle rette che congiungono i vertici omologhi delle due aree opposte (Figura 3.13).

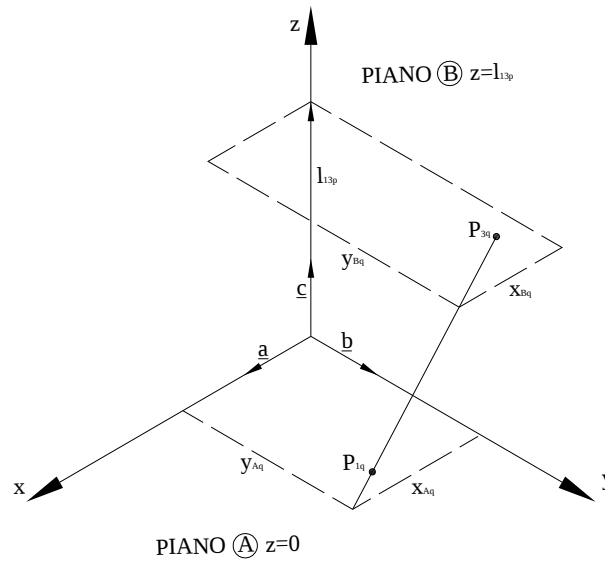


Figura 3.13. Proiezione dei vertici del volume considerato sui piani $z=0$ e $z=l_p$

Si considerino ora le equazioni parametriche della retta che congiunge i due vertici considerati:

$$\begin{cases} x(\alpha) = x_{s,pq} + (x_{r,pq} - x_{s,pq})\alpha \\ y(\alpha) = y_{s,pq} + (y_{r,pq} - y_{s,pq})\alpha \\ z(\alpha) = z_{s,pq} + (z_{r,pq} - z_{s,pq})\alpha \end{cases}$$

Imponendo l'appartenenza ai piani $z = 0$ e $z = l_p$ si ottengono due valori del parametro α che, sostituiti nelle equazioni parametriche, forniscono le coordinate nel sistema di riferimento locale dei vertici del prismatoide cui abbiamo assimilato il volume di partenza.

$$z_{s,pq} + (z_{r,pq} - z_{s,pq})\alpha_A = 0 \Rightarrow \alpha_A = \frac{z_{s,pq}}{z_{s,pq} - z_{r,pq}} \quad (3.5)$$

$$z_{s,pq} + (z_{r,pq} - z_{s,pq})\alpha_B = l_p \Rightarrow \alpha_B = \frac{l_p - z_{s,pq}}{z_{s,pq} - z_{r,pq}} \quad (3.6)$$

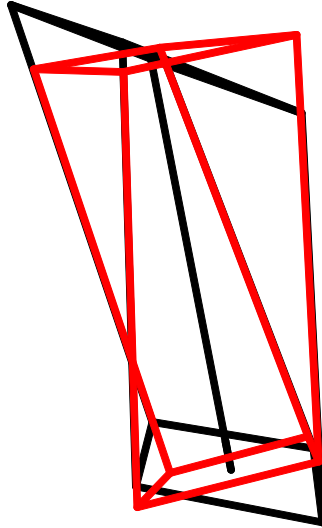


Figura 3.14. Configurazione di partenza del volume considerato (in nero) e trasformazione al prismatoide corrispondente (in rosso)

Per calcolare il volume del prismatoide occorre conoscere la legge di variazione dell'area della superficie del quadrilatero, come sezione del

prismatoide con un piano ortogonale all'asse individuato dal versore locale $\underline{e}_p$,
 , al variare della coordinata z , o del parametro adimensionale $\beta = \frac{z}{l_p}$.

L'area A di un quadrilatero giacente su un piano ortogonale all'asse z (Figura 3.15) si ottiene dall'integrale

$$A = \iint_A dA$$

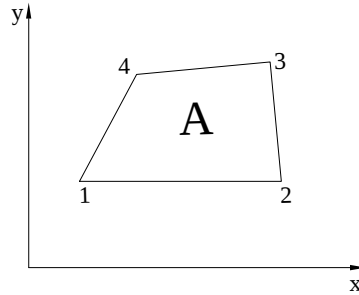


Figura 3.15. Rappresentazione di un quadrilatero qualsiasi nel piano x-y

Con riferimento ad un sistema di coordinate intrinseco, le coordinate di un generico punto del quadrilatero sono date, mediante la trasformazione parametrica, da:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \sum_{i=1}^4 x_i m_i(u, v) \\ y(u, v) &= \sum_{i=1}^4 y_i m_i(u, v) \end{aligned} \quad (3.7)$$

L'area elementare dA , da integrare su tutta la superficie, può essere espressa come segue:

$$dA = J(u, v) du dv$$

con $J(u, v)$ jacobiano della funzione. Essendo lo jacobiano di una funzione a due variabili, esso assume la forma

$$J(u, v) = \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right|$$

e sostituendo

$$A = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 J(u, v) du dv$$

Le derivate che compaiono nell'espressione dello jacobiano, possono essere ottenute derivando le coordinate cartesiane in funzione delle coordinate intrinseche (3.7), e saranno date da:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial m_i}{\partial u}, & \frac{\partial x}{\partial v} &= \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial m_i}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= \sum_{i=1}^4 y_i \frac{\partial m_i}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \sum_{i=1}^4 y_i \frac{\partial m_i}{\partial v} \end{aligned}$$

Sostituendo si ottiene l'integrale di una funzione polinomiale, che può essere risolto in forma chiusa, e assume l'espressione

$$A = \frac{1}{2} \left[(x_4 - x_2)(y_1 - y_3) + (x_1 - x_3)(y_2 - y_4) \right] \quad (3.8)$$

Per la generica ordinata z si ha $x_i = x_i(\beta)$, $y_i = y_i(\beta)$. Con le opportune sostituzioni si osserva un andamento di $A(\beta)$ in generale parabolico:

$$A(\beta) = a\beta^2 + b\beta + c \quad (3.9)$$

con a, b, c funzioni delle coordinate degli otto vertici del prismatoide.

2.1.3. Rappresentazione delle fibre mediante links

Le caratteristiche di ogni fibra devono essere concentrate nelle links di estremità, in questo esempio il links si determinano assimilando ogni singola fibra ad una trave elastica lineare isotropa e omogenea a sezione variabile, caratterizzata dal modulo di elasticità normale E e dall'area $A(z)$. Al fine di ricavare le caratteristiche di un singolo link si può far riferimento ad una fibra di muratura, considerata isolata dal resto di lunghezza pari a metà di quella che la divide dall'area omologa opposta.

Uguagliando la rigidezza assiale offerta dal modello continuo con quella relativa al link considerato, si ottiene il valore della rigidezza elastica K da assegnare al link.

La rigidezza del link equivalente può essere valutata considerando l'accorciamento di una trave a sezione variabile (Figura 3.16), la cui area trasversale è data dalla funzione $A(z)$.

Per la determinazione dell'accorciamento della trave a sezione variabile di figura 3.16, si consideri ora un concio di trave di altezza infinitesima dz (Figura 3.17). A meno di infinitesimi di ordine superiore al primo, l'area della sezione può essere considerata a sezione costante.

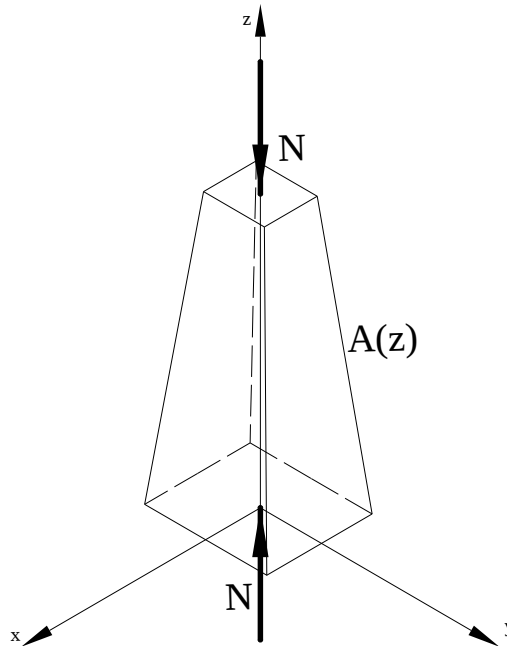


Figura 3.16. Trave a sezione variabile soggetta a uno sforzo assiale

La tensione normale, indotta dal carico sulla generica sezione di ascissa z , è data da:

$$\sigma = E\varepsilon \Rightarrow \frac{N}{A(z)} = E \frac{de}{dz}$$

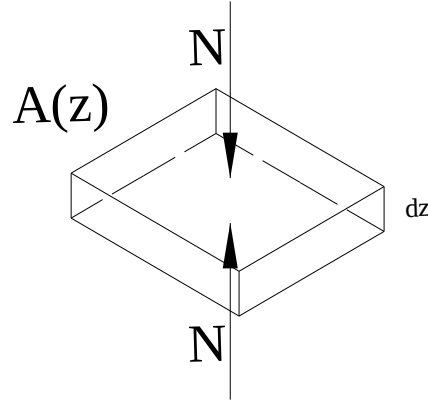


Figura 3.17. Concio infinitesimo di trave soggetta a sforzo assiale

essendo de l'accorciamento infinitesimo del concio. Esplicitando proprio de ed integrando si ottiene:

$$de = \frac{N}{E} \frac{dz}{A(z)}$$

$$e = \frac{N}{E} \int_0^L \frac{dz}{A(z)}$$

e rappresenta l'accorciamento totale della trave. Tale accorciamento deve essere pari a quello del link che simula questa semi-fibra, e deve quindi essere pari a $e = \frac{N}{K}$. Uguagliando le due espressioni di e , si può

ricavare la rigidezza K del link equivalente

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{E} \int_0^L \frac{dz}{A(z)} \Rightarrow K = \frac{E}{\int_0^L \frac{dz}{A(z)}} \quad (3.10)$$

Il calcolo della rigidezza del link si riduce pertanto essenzialmente al calcolo dell'integrale di una funzione razionale. Nel caso in esame, essendo $A(z)$ un polinomio di secondo ordine, pertanto l'integrale ammette soluzione in forma chiusa.

La rigidezza così calcolata va però proiettata lungo una direzione ortogonale al piano dell'interfaccia (Figura 3.18) e poi combinata in serie con la rigidezza derivante dalla fibra dell'elemento contiguo (Figura 3.19). Per comodità si indichino con 1 e 2 gli indici relativi ai due elementi contigui.

Indicata con $\underline{O}$ la normale al piano dell'interfaccia, e ricordando che $\underline{c}$ è il versore che individua l'asse della fibra, si ha

$$\overline{K}_1 = K_1 |\underline{c}_1 \cdot \underline{O}|; \quad \overline{K}_2 = K_2 |\underline{c}_2 \cdot \underline{O}|$$

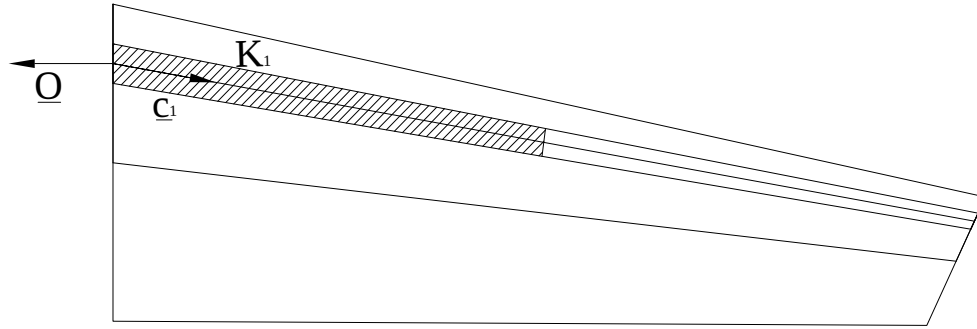


Figura 3.18. Proiezione della rigidezza del link in direzione ortogonale al piano dell'interfaccia

ed infine, combinando in serie le due rigidezze

$$K_{12} = \frac{\overline{K}_1 \cdot \overline{K}_2}{\overline{K}_1 + \overline{K}_2} \quad (3.11)$$

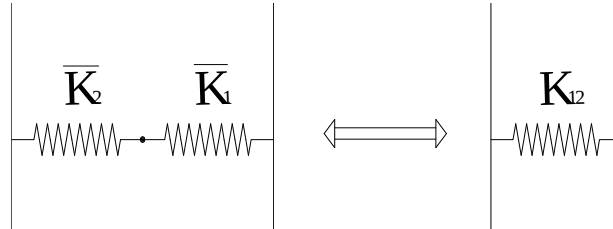


Figura 3.19. Composizione di due links in serie

2.2. La calibrazione dei Link d'interfaccia associata ad un legame costitutivo elasto-plastico non incrudente

Si consideri un solido isotropo ed omogeneo caratterizzato da un legame costitutivo elasto-plastico perfetto a deformazione limitata. I parametri necessari per definire il legame costitutivo del solido sono:

- E : modulo di Young;
- ν : coefficiente di Poisson;
- σ_{yc} : tensione di snervamento a compressione;
- σ_{yt} : tensione di snervamento a trazione;
- ε_{uc} : deformazione di rottura a compressione;
- ε_{ut} : deformazione di rottura a trazione.

Le caratteristiche elastiche dei Nlinks si determinano in accordo alle procedure illustrate nel paragrafo precedente.

Nell'ipotesi di legame elasto-plastico perfetto a deformazione limitata occorre individuare le forze di snervamento a trazione e a compressione degli NLinks, associati ai valori delle tensioni di snervamento a trazione e a compressione, insieme agli spostamenti di rottura associati ai limiti di deformabilità a compressione e a trazione del materiale.

Per la determinazione delle forze di snervamento nei NLinks si possono adottare due criteri. Il primo, detto *criterio dell'area minima*, è basato sulla considerazione che lo snervamento si determini in corrispondenza della sezione di area minima, in questo caso le forze di snervamento nei NLinks risultano date da

$$\begin{aligned} F_{yt} &= A_{\min} \sigma_{yt} \\ F_{yc} &= A_{\min} \sigma_{yc} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Tale criterio tuttavia appare eccessivamente conservativo e dipendente dalla mesh adottata nella discretizzazione della struttura.

Un criterio alternativo è il cosiddetto *criterio dell'area media* in cui le forze di snervamento nei NLinks risultano associate all'area media delle fibre corrispondenti:

$$\begin{aligned} F_{yt} &= A_{med} \sigma_{yt} \\ F_{yc} &= A_{med} \sigma_{yc} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Gli spostamenti corrispondenti ai limiti elastici sono dati da

$$\begin{aligned} u_{yt} &= F_{yt} / K \\ u_{yc} &= F_{yc} / K \end{aligned} \quad (3.14)$$

Tale criterio risulta accettabile soprattutto in quei casi in cui il *rapporto delle aree della fibra* (dato dal rapporto tra l'area minima e l'area massima) risulti molto prossimo all'unità.

Gli spostamenti ultimi del link possono essere determinati con riferimento ad una plasticizzazione diffusa, semplicemente moltiplicando la lunghezza $\bar{l}$ della fibra considerata per le deformazioni di rottura a trazione e compressione della muratura:

$$\begin{aligned} u_{rt} &= \bar{l} \cdot \varepsilon_{rt} \\ u_{rc} &= \bar{l} \cdot \varepsilon_{rc} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Al fine di caratterizzare la muratura devono essere quindi assegnate le proprietà meccaniche del materiale muratura (E , σ_{yc} , σ_{yt} , ε_{rc} , ε_{rt}). Tali quantità possono essere determinate a partire dalle caratteristiche dei componenti (malta e mattoni) tramite delle tecniche di omogeneizzazione, oppure tramite delle prove in situ (o in laboratorio).

Il principale limite di questa trattazione risiede nel fatto di considerare il materiale come isotropo. La varietà delle possibili tessiture che gli elementi murari possono presentare richiederebbe invece una differenziazione delle caratteristiche dei materiali nelle varie direzioni, in relazione alla tessitura e all'apparecchio dell'elemento strutturale.

Nei casi in cui gli assi di ortotropia coincidono con l'orientamento delle fibre (come nel caso delle volte sferiche e delle volte a botte) è tuttavia possibile implementare un legame ortotropo differenziando il procedimento di taratura nelle due direzioni.

2.3. La calibrazione dei Links paralleli al piano dell'interfaccia associata ad un legame costitutivo elasto-lineare

I links disposti parallelamente ai piani dell'interfaccia hanno i seguenti ruoli:

- governare gli scorrimenti nel piano dell'elemento;
- governare gli scorrimenti fuori dal piano dell'elemento;
- rappresentare la rigidità a taglio fuori dal piano dell'elemento;
- rappresentare la rigidità torsionale dell'elemento.

Globalmente tali meccanismi sono rappresentati da tre links non lineari per ogni interfaccia, una delle quali è posta in direzione del primo asse dell'interfaccia, e due nella direzione del secondo asse e poste in corrispondenza di due punti opportunamente determinati, figura 3.20.

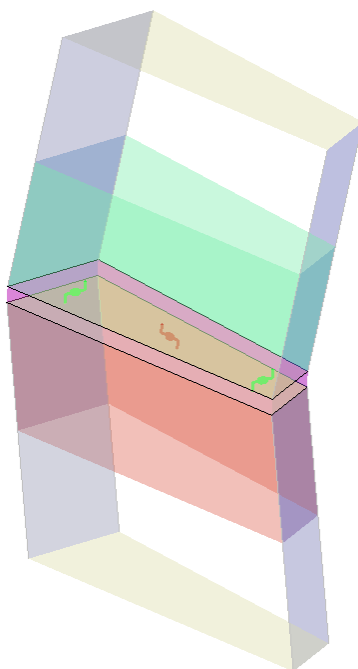


Figura 3.20. Il generico macro-elemento con la rappresentazione dei links paralleli al piano dell'interfaccia

2.3.1. La calibrazione delle links di scorrimento nelle direzioni degli assi delle interfacce in accordo ad un legame alla Mohr-Coulomb

Il link di scorrimento orientato nella direzione del primo asse dell'interfaccia, figura 3.21, è deputato unicamente a rappresentare gli eventuali meccanismi di scorrimento nel piano dell'elemento ed è caratterizzato da un comportamento rigido-plastico.

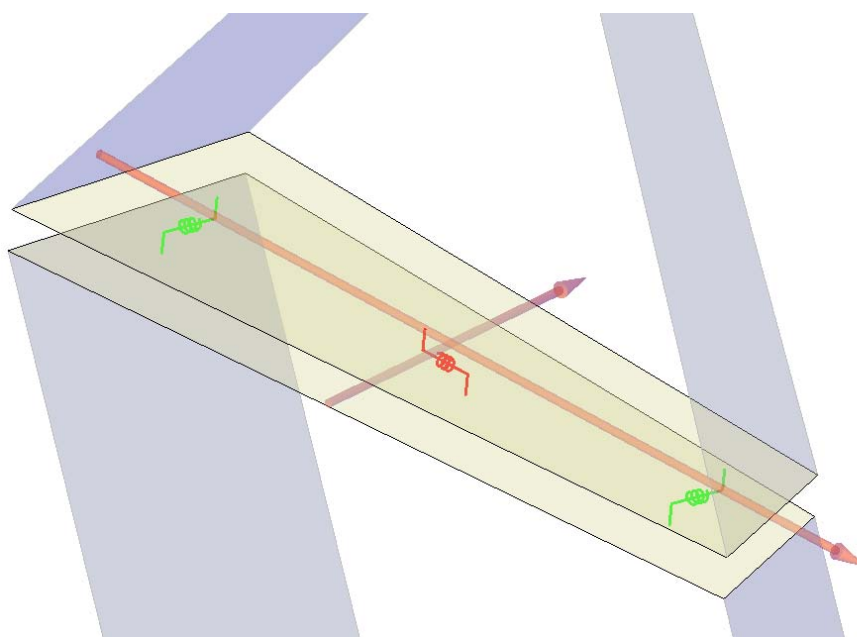


Figura 3.21. Le links a scorrimento orientate nelle direzioni degli assi delle interfacce

Il comportamento a scorrimento, per sua natura, è regolato prevalentemente dall'attrito, ed è quindi caratterizzabile da un legame dipendente dall'azione normale.

Assumendo un legame alla Mohr-Coulomb la tensione tangenziale limite cui è associata l'attivazione di un meccanismo di scorrimento nel

solido murario risulta governata da due parametri: uno che rappresenta la coesione c e l'altro il coefficiente d'attrito interno μ .

$$\tau_{\text{lim}} = c + \mu \cdot \sigma_n \quad (3.16)$$

essendo σ_n la tensione normale di compressione.

Con riferimento alla generica interfaccia, indicando con A_t l'area trasversale effettivamente a contatto tra le due superfici, cioè quella corrispondente ai links ortogonali *attivi* (quelli che non hanno raggiunto lo spostamento ultimo), la forza limite T_{lim} che provoca lo scorrimento tra i due piani dell'interfaccia si può determinare attraverso la relazione

$$T_{\text{lim}} = C_{\text{lim}} + \phi \cdot P \quad (3.17)$$

in cui

$$P = \int_{A_t} \sigma_n dA \quad (3.18)$$

indica la risultante degli sforzi di compressione agente in corrispondenza della superficie dell'interfaccia, che si determina in modo semplice dalla sommatoria delle forze dei links ortogonali d'interfaccia.

$$C_{\text{lim}} = c \cdot A_t \quad (3.19)$$

rappresenta la risultante delle forze di coesione nel piano dell'interfaccia, data dal prodotto dell'area effettivamente a contatto e la coesione del materiale.

Assumere valida la (3.17) equivale ad avere supposto una distribuzione di tensioni tangenziali uniformi in tutta l'area a contatto.

I valori di P , C_{lim} ed A_t sono variabili durante l'analisi.

2.3.2. La calibrazione delle links di scorrimento nelle direzioni ortogonali agli assi delle interfacce in accordo ad un legame alla Mohr-Coulomb

Le links di scorrimento orientate nelle direzioni ortogonali rispetto agli assi delle interfacce, figura 3.22, sono responsabili

- della rappresentazione della rigidezza a taglio dell'elemento fuori dal proprio piano;
- della rigidezza torsionale elastica dell'elemento;
- della simulazione di eventuali scorrimenti dell'elemento al di fuori del proprio piano.

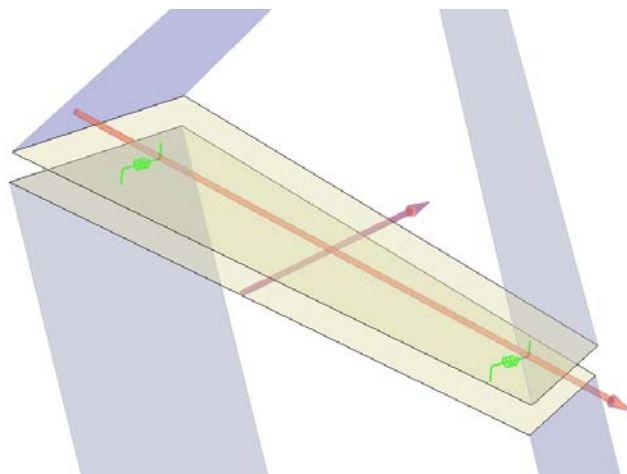


Figura 3.22. Le links a scorrimento orientate nella direzione ortogonale all'asse dell'interfaccia

Le links a scorrimento sono pertanto caratterizzate da un comportamento iniziale elastico limitato da un dominio di snervamento alla Mohr-Coulomb.

2.3.2.1. Le proprietà elastiche delle links di scorrimento nelle direzioni ortogonali agli assi delle interfacce

Con riferimento ad una singola interfaccia, le caratteristiche elastiche iniziali delle due links si ricavano direttamente dalle caratteristiche della muratura, considerando una suddivisione in fibre dell'elemento analogamente a quanto fatto per le links ortogonali d'interfaccia.

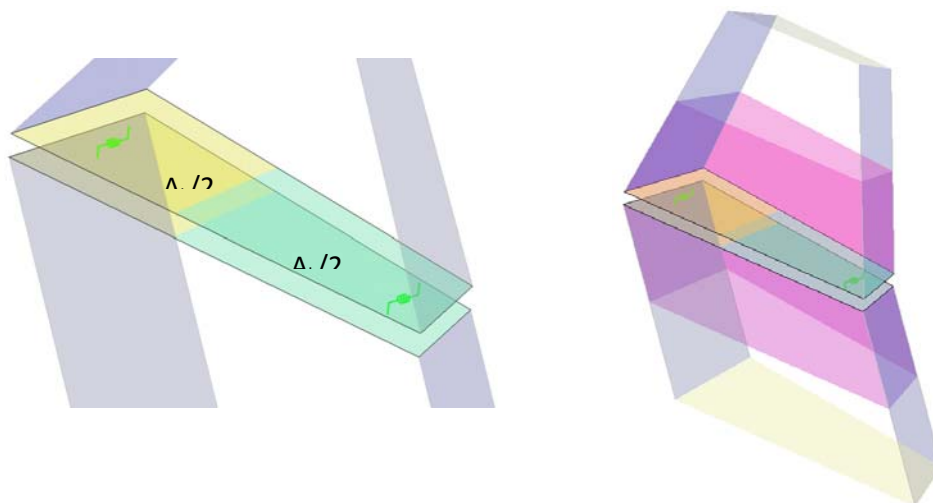


Figura 3.23. Suddivisione in fibre dell'elemento per la taratura delle links di scorrimento

In particolare la rigidezza totale delle links a scorrimento fuori piano sarà data dalla somma delle rigidezze a taglio delle singole fibre. Tale rigidezza va poi equamente suddivisa alle due links che sottendono ciascuna ad un'area pari alla metà di quella totale dell'interfaccia:

$$K_{scorr} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N_{molle}} G \frac{A_{med_i}}{l_i} \quad (3.20)$$

dove $A_{med,i}$ è l'area media della fibra considerata e l_i è la lunghezza della fibra che va tenuta in conto per l'interfaccia considerata.

Ciascuna delle links verrà posizionata in corrispondenza del centro di rigidezza delle fibre corrispondenti.

2.4. La calibrazione del Link diagonale appartenente al piano dell'elemento

Il link diagonale del quadrilatero, Figura 3.24, simula il comportamento di una porzione dell'elemento murario soggetta ad

azioni agenti nel piano individuato dai suoi quattro vertici (piano dell'elemento).

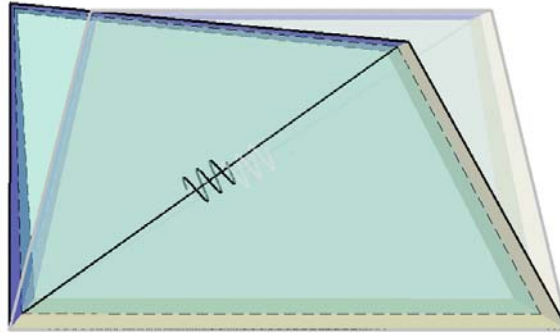


Figura 3.24. Link diagonale del quadrilatero

Al fine di rendere il quadrilatero internamente isostatico è sufficiente introdurre un solo Link non lineare il cui legame costitutivo dovrà essere in grado di simulare la risposta del concio di muratura rappresentato dall'elemento. La legge costitutiva del NLink dipende dal particolare criterio di crisi adottato. In questo paragrafo si assume un legame costitutivo della muratura elasto-plastico non incrudente e pertanto caratterizzato dai seguenti parametri:

E : Modulo di Young;

ν : Coefficiente di Poisson;

σ_{yc} : tensione di snervamento a compressione;

σ_{yt} : tensione di snervamento a trazione;

ε_{yc} : deformazione di rottura a compressione;

ε_{yt} : deformazione di rottura a trazione.

Per il calcolo della rigidezza del link conviene distinguere la fase elastico lineare dalla fase plastica.

2.4.1. La calibrazione del NLink diagonale appartenente al piano dell'elemento nella fase a comportamento elastico lineare

La calibrazione del NLink diagonale in campo lineare viene effettuata assumendo che la deformabilità dell'elemento nel proprio piano sia rappresentabile dalla risposta di una lastra di materiale elastico lineare isotropo e omogeneo avente la geometria dell'elemento e vincolata a deformarsi in accordo al campo di spostamenti del quadrilatero articolato, governato da un unico parametro lagrangiano. L'equivalenza tra il modello continuo e quello discreto viene stabilita sulla base di un criterio di equivalenza energetica. In particolare si impone l'uguaglianza dell'energia di deformazione tra la lastra e il quadrilatero articolato reso isostatico dalla presenza di un link elastico-lineare.

2.4.1.1. La lastra continua a spessore variabile vincolata a deformarsi coerentemente con il campo di spostamenti dell'elemento

Si consideri un mezzo continuo elastico lineare isotropo la cui geometria coincida con la geometria del macro-elemento, vincolato a deformarsi coerentemente con la cinematica del quadrilatero articolato soggetto ad azioni nel proprio piano. Si assume che il campo degli spostamenti $\underline{S}$ e il corrispondente campo di deformazione $\underline{E}$ possano ritenersi piani. Assumendo un sistema di riferimento con asse z ortogonale al piano dell'elemento, il campo degli spostamenti sarà dato da

$$\begin{cases} S_x = S_x(x, y) \\ S_y = S_y(x, y) \end{cases}$$

mentre il tensore di deformazione infinitesima in componenti risulta

$$E = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dove

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{\partial S_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial S_y}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial x} \\ \varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0 \end{cases}$$

Indicando con $\underline{T}$ ed $\underline{E}$ i campi di tensione equilibrato e il campo di deformazioni infinitesime derivato dal campo di spostamenti imposto $\underline{S}$, con ρ la densità di massa, con $\underline{b}$ ed $\underline{a}$ il campo di forze di massa e di accelerazioni e con $\underline{t}_n$ un campo di forze superficiali applicato sul contorno Γ possiamo scrivere l'equazione dei lavori virtuali nella forma

$$\iiint_V tr(\underline{T} \cdot \underline{E}) dV = \iiint_V \rho(\underline{b} - \underline{a}) \cdot \underline{S} dV + \iint_{\Gamma} \underline{t}_n \cdot \underline{S} ds \quad (3.23)$$

Occorre ora valutare a partire dall'equazione dei lavori virtuali le espressioni del lavoro virtuale interno ed esterno ed uguagliarle. Sviluppando in forma estesa il prodotto interno tra $\underline{T}$ ed $\underline{E}$ nel nostro caso si ha:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x \varepsilon_x + \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} + \frac{1}{2} \tau_{xy} \gamma_{xy} + \sigma_y \varepsilon_y = \\ & = \sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} \end{aligned}$$

Si ha pertanto

$$\begin{aligned}
 L_{vi} &= \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dV \Rightarrow \\
 L_{vi} &= \iint_A \int_{-\frac{h(x,y)}{2}}^{\frac{h(x,y)}{2}} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}) dz dA \Rightarrow \\
 L_{vi} &= \iint_A \left(\int_{-\frac{h(x,y)}{2}}^{\frac{h(x,y)}{2}} \sigma_x dz \varepsilon_x + \int_{-\frac{h(x,y)}{2}}^{\frac{h(x,y)}{2}} \sigma_y dz \varepsilon_y + \int_{-\frac{h(x,y)}{2}}^{\frac{h(x,y)}{2}} \tau_{xy} dz \gamma_{xy} \right) dA \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

dove si è tenuto conto che il campo di deformazioni non dipende da z . Poniamo per comodità

$$N_x(x, y) = \int_{-\frac{h(x,y)}{2}}^{\frac{h(x,y)}{2}} \sigma_x dz; \quad N_y(x, y) = \int_{-\frac{h(x,y)}{2}}^{\frac{h(x,y)}{2}} \sigma_y dz; \quad N_{xy}(x, y) = \int_{-\frac{h(x,y)}{2}}^{\frac{h(x,y)}{2}} \tau_{xy} dz$$

Allora l'espressione del lavoro virtuale interno (3.24) diventa

$$L_{vi} = \iint_A (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dA \quad (3.25)$$

Posto $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$, possiamo raccogliere in due vettori $\underline{\sigma}$ e $\underline{\varepsilon}$ i termini significativi della funzione integranda, prestando tuttavia attenzione al fatto che $\underline{\sigma}$ non contiene tra i suoi termini elementi che dimensionalmente sono tensioni:

$$\underline{\sigma}(\underline{r}) = \begin{bmatrix} N_x(\underline{r}) \\ N_y(\underline{r}) \\ N_{xy}(\underline{r}) \end{bmatrix}; \quad \underline{\varepsilon}(\underline{r}) = \begin{bmatrix} \varepsilon_x(\underline{r}) \\ \varepsilon_y(\underline{r}) \\ \gamma_{xy}(\underline{r}) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

ma ancora, posto $\underline{S}(\underline{r}) = \begin{bmatrix} S_x(\underline{r}) \\ S_y(\underline{r}) \end{bmatrix}$ si può osservare che vale la relazione

$$\underline{\varepsilon}(\underline{r}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x(\underline{r}) \\ S_y(\underline{r}) \end{bmatrix} = \underline{\partial}_r \cdot \underline{S} \quad (3.27)$$

L'espressione dei lavori virtuali (3.25) diventa infine

$$L_{vi} = \iint_A \underline{\sigma}^T \cdot (\underline{\partial}_r \cdot \underline{S}) dA \quad (3.28)$$

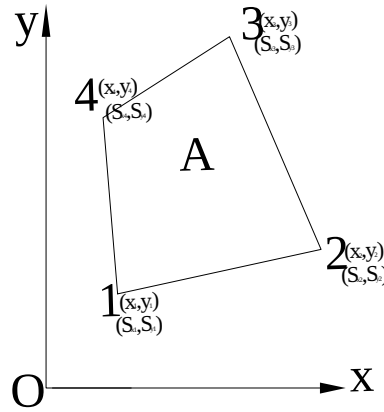


Figura 3.25 – Lastra piana quadrangolare a spessore variabile nel piano x-y soggetta al campo di spostamenti $\underline{S}$

Per riuscire a svolgere questo integrale si ricorre a una formulazione del metodo degli elementi finiti mediante funzioni di forma. Assegnata la lastra supponiamo di conoscere le coordinate dei quattro vertici e gli spostamenti nodali ivi imposti (fig. 3.25).

Si riportano le coordinate della lastra in un sistema di riferimento con coordinate intrinseche (fig. 3.26).

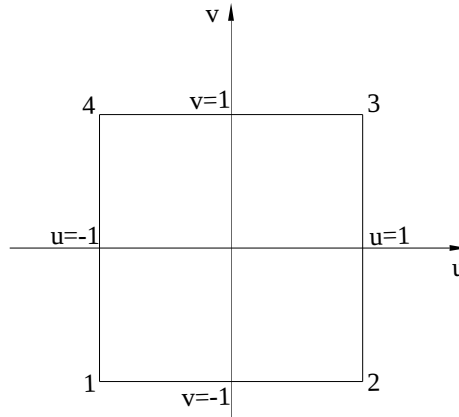


Figura 3.26 – Rappresentazione della lastra nel sistema di riferimento intrinseco

Mediante le quattro funzioni di forma (2.1) è, ancora una volta, possibile stabilire una corrispondenza biunivoca tra coordinate cartesiane ed intrinseche. Le relazioni che regolano il cambio di coordinate di un generico punto, o trasformazione isoparametrica, saranno

$$\begin{cases} x(u, v) = \sum_{i=1}^4 x_i m_i(u, v) \\ y(u, v) = \sum_{i=1}^4 y_i m_i(u, v) \end{cases}$$

In maniera del tutto analoga possiamo esprimere il campo di spostamento in qualsiasi punto della lastra

$$\begin{cases} S_x(u, v) = \sum_{i=1}^4 S_x^i m_i(u, v) \\ S_y(u, v) = \sum_{i=1}^4 S_y^i m_i(u, v) \end{cases}$$

che espresso in termini vettoriali diventa

$$\begin{bmatrix} S_x(u,v) \\ S_y(u,v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_2 & 0 & m_3 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & m_2 & 0 & m_3 & 0 & m_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_x^1 \\ S_y^1 \\ S_x^2 \\ S_y^2 \\ S_x^3 \\ S_y^3 \\ S_x^4 \\ S_y^4 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{S}(u,v) = \underline{M}(u,v) \cdot \underline{U} \quad (3.29)$$

Si può notare da queste espressioni, come sui lati della lastra il campo di spostamenti sia lineare, in accordo a quanto succede con i lati rigidi dell'elemento oggetto di studio. Per ricavare le derivate parziali di una funzione composta a più variabili si deve calcolare lo jacobiano $J(u,v)$ della funzione. Il vettore di funzioni $\underline{S}(u,v)$ va espresso in funzione delle coordinate cartesiane e, successivamente, va derivato, per ricavare deformazioni e tensioni in tutti i punti della lastra.

Si ha:

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}; \quad \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{bmatrix} = \underline{J}(u,v) \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}$$

Invertendo $\underline{J}(u,v)$ è possibile ricavare le derivate rispetto ad x e y .

Si ha infatti

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \underline{J}^{-1}(u,v) \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{bmatrix}$$

Posto $J(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$, si ha, sfruttando le formule che invertano una matrice 2×2

$$\underline{J}^{-1}(u, v) = \frac{1}{J(u, v)} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & -\frac{\partial y}{\partial u} \\ -\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} & J_{12}^{-1} \\ J_{21}^{-1} & J_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

Le due espressioni delle derivate rispetto ad x ed y diventano quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= J_{11}^{-1}(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + J_{12}^{-1}(u, v) \frac{\partial}{\partial v} \\ \frac{\partial}{\partial y} &= J_{21}^{-1}(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + J_{22}^{-1}(u, v) \frac{\partial}{\partial v} \end{aligned}$$

L'operatore $\underline{\partial}_r$, definito nella (3.27), diventa allora

$$\underline{\partial}_r = \begin{bmatrix} J_{11}^{-1}(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + J_{12}^{-1}(u, v) \frac{\partial}{\partial v} & 0 \\ 0 & J_{21}^{-1}(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + J_{22}^{-1}(u, v) \frac{\partial}{\partial v} \\ J_{21}^{-1}(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + J_{22}^{-1}(u, v) \frac{\partial}{\partial v} & J_{11}^{-1}(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + J_{12}^{-1}(u, v) \frac{\partial}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Sostituendo la (3.29) nella (3.27), e alla luce della (3.30), si ha:

$$\underline{\varepsilon}(u, v) = \underline{\partial}_r \cdot \underline{S}(u, v) = \underline{\partial}_r \cdot \underline{M}(u, v) \cdot \underline{U} = \widehat{\underline{M}}(u, v) \cdot \underline{U} \quad (3.31)$$

Per completare le relazioni che regolano il cambio di coordinate va espressa dA , che è data da

$$dA = J(u, v) du dv$$

L'espressione (3.23) del lavoro virtuale interno, con le opportune sostituzioni, diventa

$$\begin{aligned} L_{vi} &= \iint_A \underline{\sigma}^T \cdot \underline{\varepsilon} dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\sigma}^T(u, v) \cdot \underline{\varepsilon}(u, v) J(u, v) du dv \\ &\quad \left(\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\sigma}^T(u, v) \cdot \widehat{\underline{M}}(u, v) J(u, v) du dv \right) \cdot \underline{U} \end{aligned} \quad (3.32)$$

L'espressione in parentesi può essere calcolata mediante metodi numerici.

Per valutare il lavoro virtuale esterno occorre determinare le forze nodali equivalenti che agiscono sui vertici della lastra. Occorre però preventivamente fare alcune considerazioni che semplificano il problema nel caso in esame. Anzitutto si considera il caso del problema statico, e quindi si ha che il campo delle accelerazioni è nullo ovunque ($\underline{a} = 0$). L'altra osservazione da fare riguarda il contorno Γ della lastra, che si può pensare come l'unione di tre sotto-insiemi:

$$\Gamma = \Gamma_V \cup \Gamma_F \cup \Gamma_C$$

dove Γ_V rappresenta la parte del contorno vincolata, Γ_F la parte di contorno caricata e Γ_C la parte di contorno di contatto tra elementi finiti contigui.

Sia $\underline{n}(x, y)$ il vettore normale al contorno Γ , e contenuto nel piano della lastra, in un suo generico punto e sia $\underline{f}(x, y)$ il campo di forze agenti su Γ_F espresso in forza per unità di superficie (fig. 3.27). Entrambi questi vettori, con riferimento al sistema locale della lastra, avranno nulla la terza delle loro componenti.

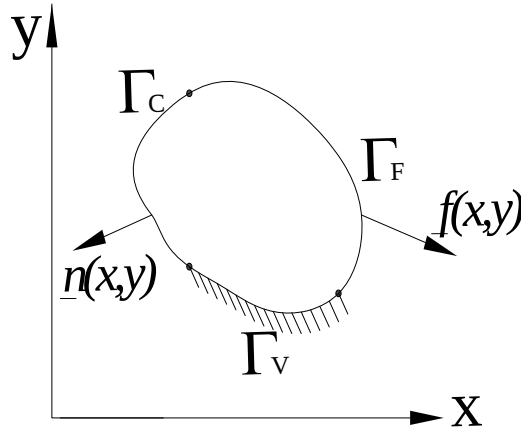


Figura 3.27 – Contorno della lastra

Per contorno della lastra si intende infatti, in questo caso, la linea che ne delimita il perimetro, ipotizzando scarica la sua superficie; affinché essa risulti caricata esclusivamente nel proprio piano è inoltre evidente che, giacendo i primi due assi del sistema di riferimento locale nel piano medio della lastra, la terza componente del campo di forze risulta nulla ovunque. Allora si ha:

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{n} = \begin{bmatrix} n_x(x, y) \\ n_y(x, y) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

La condizione che viene quindi imposta impone nel caso in esame, affinché il problema si adatti completamente al modello meccanico equivalente pensato, e in accordo con quanto sinora precisato, è che il campo $\underline{f}(x, y)$ agisca solo sull'anello di contorno della lastra che quindi sarà proprio Γ_F (fig. 3.28).

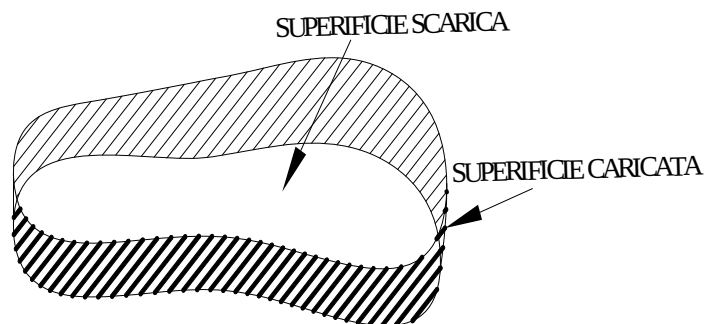


Figura 3.28 – Parte del contorno caricata (coincidente con la superficie laterale della lastra)

Con riferimento al secondo termine del lavoro virtuale esterno, e alla superficie Γ_C si valuta anzitutto il vettore di tensione $\underline{t}^n$ su una generica giacitura di normale $\underline{n}$, che può essere ottenuto dal prodotto interno tra il tensore di tensione $\underline{T}$ e il vettore $\underline{n}$ che indica la giacitura considerata in un generico punto della lastra,

$$\underline{t}^n = \underline{T} \cdot \underline{n} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y \end{bmatrix}$$

Se indichiamo con $\underline{u}$ e $\underline{T}_n$ i vettori

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{T}_n = \begin{bmatrix} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \\ \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y \end{bmatrix}$$

si può vedere che si ha

$$\underline{t}^n \cdot \underline{u} = \underline{T}_n \cdot \underline{S}$$

Inoltre, osservando che le forze di massa non variano lungo lo spessore della lastra, si può porre

$$\underline{b}(x, y) = \begin{bmatrix} b_x(x, y) \\ b_y(x, y) \end{bmatrix}$$

Con le opportune sostituzioni l'espressione del lavoro virtuale esterno, secondo membro della (3.23), diventa

$$\begin{aligned} L_{ve} &= \iint_A \int_{-\frac{h(x,y)}{2}}^{\frac{h(x,y)}{2}} \rho \underline{b}^T \cdot \underline{S} dz dA + \iint_{\Gamma_C} \int_{-\frac{h(x,y)}{2}}^{\frac{h(x,y)}{2}} \underline{T}_n^T \cdot \underline{S} dz d\Gamma + \iint_{\Gamma_F} \int_{-\frac{h(x,y)}{2}}^{\frac{h(x,y)}{2}} \underline{f}^T \cdot \underline{S} dz d\Gamma = \\ &= \iint_A \int_{-\frac{h(x,y)}{2}}^{\frac{h(x,y)}{2}} \rho \underline{b}^T dz \cdot \underline{S} dA + \iint_{\Gamma_C} \int_{-\frac{h(x,y)}{2}}^{\frac{h(x,y)}{2}} \underline{T}_n^T dz \cdot \underline{S} d\Gamma + \iint_{\Gamma_F} \int_{-\frac{h(x,y)}{2}}^{\frac{h(x,y)}{2}} \underline{f}^T dz \cdot \underline{S} d\Gamma \Rightarrow \end{aligned}$$

Integrando lungo lo spessore le grandezze che dalla coordinata z non dipendono, si ottiene

$$\begin{aligned} L_{ve} &= \iint_A \underline{B}^T(x, y) \cdot \underline{S}(x, y) dA + \iint_{\Gamma_C} \underline{C}^T(x, y) \cdot \underline{S}(x, y) d\Gamma + \\ &+ \iint_{\Gamma_F} \underline{F}^T(x, y) \cdot \underline{S}(x, y) d\Gamma \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ricordando che $\underline{S} = \underline{M} \cdot \underline{U}$ (3.29), il lavoro virtuale esterno (3.34) diventa

$$L_{ve} = \iint_A \underline{B}^T(x, y) \cdot \underline{M}(x, y) dA \cdot \underline{U} + \iint_{\Gamma_C} \underline{C}^T(x, y) \cdot \underline{M}(x, y) d\Gamma \cdot \underline{U} + \iint_{\Gamma_F} \underline{F}^T(x, y) \cdot \underline{M}(x, y) d\Gamma \cdot \underline{U} \quad (3.35)$$

Il principio dei lavori virtuali assicura che il lavoro virtuale interno, compiuto dalle tensioni indotte da un campo di spostamenti virtuali imposto per le deformazioni dovute allo stesso campo di spostamenti, sia pari a quello esterno, compiuto dalle forze di massa, da quelle di contatto e da quelle esterne, per lo stesso campo di spostamenti virtuali, cioè

$$L_{vi} = L_{ve} \quad \forall \underline{U} \quad (3.36)$$

I vettori delle forze nodali equivalenti ai carichi esterni $\underline{P}_0$ e alle forze di contatto $\underline{P}$ saranno dati da:

$$\begin{aligned} \underline{P}_0^T &= \iint_A \underline{B}^T \cdot \underline{M} dA + \iint_{\Gamma_F} \underline{F}^T \cdot \underline{M} d\Gamma \\ \underline{P}^T &= \iint_{\Gamma_C} \underline{C}^T \cdot \underline{M} d\Gamma \end{aligned} \quad (3.37)$$

Una volta eliminata la dipendenza dagli spostamenti nodali, il principio dei lavori virtuali può essere scritto nella forma di equazioni di equilibrio nodale.

$$\begin{aligned} \underline{P}_0^T + \underline{P}^T &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{\sigma}^T(u, v) \cdot \widehat{\underline{M}}(u, v) J(u, v) du dv \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{P} + \underline{P}_0 &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \widehat{\underline{M}}^T(u, v) \cdot \underline{\sigma}(u, v) J(u, v) du dv \end{aligned} \quad (3.38)$$

dove $\underline{\sigma}(u, v)$ è definito dalla prima delle (3.26), mentre $J(u, v)$ è dato dall'espressione

$$J(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Si introducono ora le ipotesi sul materiale che è considerato elastico lineare ed isotropo. Il legame costitutivo utilizzato può essere sinteticamente espresso dalla relazione

$$\underline{T} = \lambda \operatorname{tr} \underline{E} \underline{I} + 2\mu \underline{E} \quad (3.39)$$

che rappresenta l'equazione costitutiva del solido elastico lineare isotropo. Essa dipende soltanto da due parametri che definiscono il

comportamento del materiale. Nella letteratura, i coefficienti λ e μ sono chiamati costanti di Lamé. Solo se il materiale, oltre ad essere isotropo, è anche omogeneo i coefficienti λ e μ non dipendono dalla posizione e quindi sono effettivamente costanti come nel caso di studio.

Le costanti di Lamé possono agevolmente essere messe in relazione con i moduli di elasticità normale e tangenziale del materiale mediante le relazioni:

$$\begin{aligned}\mu &= G = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \lambda &= \frac{E\nu}{2(1+2\nu)}\end{aligned}\tag{3.40}$$

Nel nostro caso, essendo lo stato deformativo piano, il legame costitutivo si traduce solo nelle tre espressioni

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2\mu\varepsilon_x \\ \sigma_y &= \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y) + 2\mu\varepsilon_y \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy}\end{aligned}$$

che, in termini tensoriali, diventa

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\kappa}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}$$

Ricordando la definizione del vettore $\underline{\underline{\sigma}}$, data nella prima delle (3.26), e che lo stato deformativo è piano (e quindi non dipende dalla coordinata z) si ha:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \int_{-\frac{h(x,y)}{2}}^{\frac{h(x,y)}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = h(x,y) \underline{\underline{\kappa}} \cdot \underline{\underline{\varepsilon}}(x,y)$$

Ogni coppia di coordinate cartesiane (x,y) individua un vettore posizione $\underline{r}$, cui può essere associata una coppia di coordinate intrinseche (u,v) ; in questo caso pertanto si ha:

$$\underline{\sigma}(\underline{r}) = h(\underline{r}) \underline{\kappa} \cdot \underline{\varepsilon}(\underline{r}) \Rightarrow \underline{\sigma}(u,v) = h(u,v) \underline{\kappa} \cdot \underline{\varepsilon}(u,v)$$

dove lo spessore in un generico punto della lastra, di coordinate intrinseche (u,v) , è dato da

$$h(u,v) = \sum_{i=1}^4 h_i m_i(u,v)$$

Ricordando la relazione ottenuta per il vettore $\underline{\varepsilon}$ (3.31) si ha

$$\underline{\sigma}(u,v) = h(u,v) \underline{\kappa} \cdot \widehat{\underline{M}}(u,v) \cdot \underline{U}$$

e sostituendo nell'equazione dei lavori virtuali (3.38)

$$\underline{P}_0 + \underline{P} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h(u,v) \widehat{\underline{M}}^T(u,v) \cdot \underline{\kappa} \cdot \widehat{\underline{M}}(u,v) J(u,v) du dv \cdot \underline{U} \quad (3.41)$$

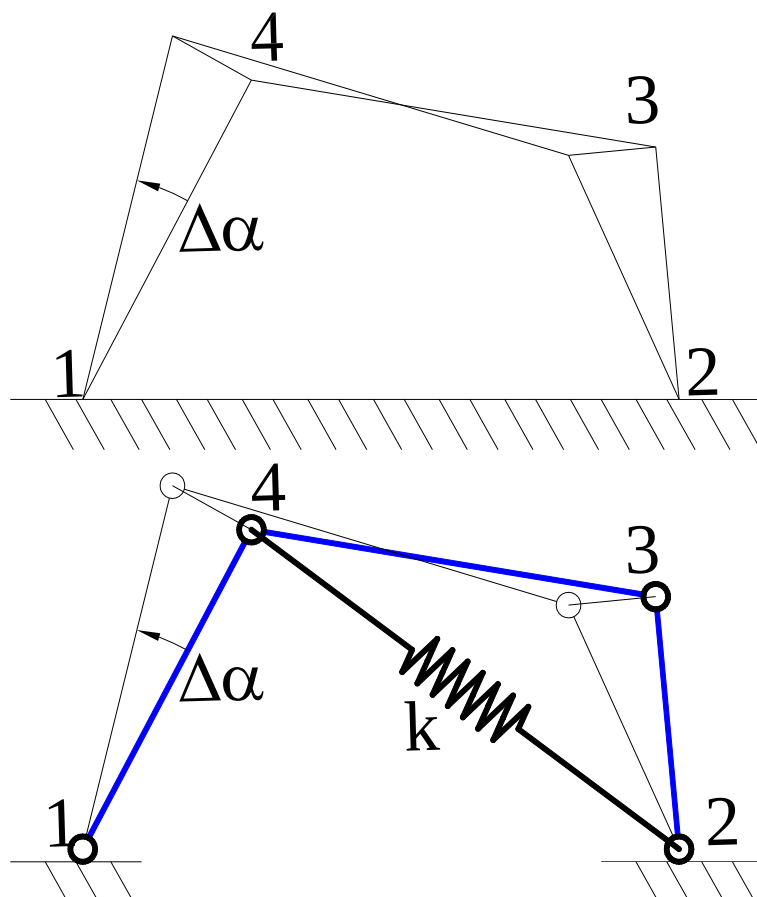


Figura 3.29 – Equivalenza tra modello continuo e meccanico

L'integrale al secondo membro non rappresenta altro che la matrice di rigidezza $\underline{K}$ della lastra. In forma compatta allora si può scrivere:

$$\underline{P}_0 + \underline{P} = \underline{K} \cdot \underline{U} \quad (3.42)$$

Nel caso in esame si sta considerando un solo elemento pertanto si ha $\underline{P} = 0$ e l'equazione appena vista si riduce a

$$\underline{P}_0 = \underline{K} \cdot \underline{U} \quad (3.43)$$

Si vuole ora imporre un campo di spostamenti che attivi la deformazione nel piano della lastra. Si sceglie di vincolare la lastra lungo il lato 1-2, e di imporre un aumento $\Delta\alpha$ dell'ampiezza dell'angolo

al vertice 1, così da ottenere un campo di spostamenti analogo a quello che si ha nell'elemento all'attivarsi del grado di libertà deformativo (fig. 3.29).

Gli spostamenti nodali sono tutti funzione del parametro deformativo $\Delta\alpha$. In particolare, essendo i vertici 1 e 2 vincolati, gli spostamenti nodali che gli competono saranno nulli, mentre quelli degli altri due vertici saranno proporzionali a $\Delta\alpha$, secondo degli opportuni coefficienti, che possono essere ricavati dalla cinematica dell'elemento. Il vettore $\underline{U}$ può quindi essere partizionato, e sarà dato da:

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \Delta\alpha \Rightarrow \underline{P}_0 = \underline{K} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\widetilde{U}} \end{bmatrix} \Delta\alpha$$

Partizionando anche il vettore delle forze nodali e la matrice di rigidezza si ha

$$\begin{bmatrix} \underline{P}_0^1 \\ \underline{P}_0^2 \end{bmatrix} = \Delta\alpha \begin{bmatrix} \underline{K}^{11} & \underline{K}^{12} \\ \underline{K}^{21} & \underline{K}^{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \underline{\widetilde{U}} \end{bmatrix}$$

Ai fini del calcolo della rigidezza del link, vanno calcolate le forze nodali relative ai vertici 3 e 4, ricavate la rigidezza del link che, sottoposta alle stesse forze nodali della lastra, assume la stessa configurazione deformata. La partizione risulta pertanto utile per scartare le prime quattro equazioni che risulterebbero superflue. Il sistema da risolvere si riduce quindi a

$$\underline{P}_0^2 = \Delta\alpha \underline{K}^{22} \cdot \underline{\widetilde{U}} \quad (3.44)$$

La matrice di rigidezza $\underline{K}$ per una lastra piana a 4 nodi è di dimensione 8, e quindi ha 36 termini significativi. La partizione ci

consente di fare riferimento solo alla $\underline{K}^{22}$ che, avendo dimensione 4, ha solo 10 termini significativi.

Il calcolo di questi termini richiede una integrazione numerica. Sviluppiamo e partizioniamo anzitutto l'operatore $\widehat{\underline{M}}$

$$\begin{aligned}\widehat{\underline{M}} &= \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_2 \\ \partial_2 & \partial_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_2 & 0 & m_3 & 0 & m_4 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 & m_2 & 0 & m_3 & 0 & m_4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \partial_1 m_1 & 0 & \partial_1 m_2 & 0 & \partial_1 m_3 & 0 & \partial_1 m_4 & 0 \\ 0 & \partial_2 m_1 & 0 & \partial_2 m_2 & 0 & \partial_2 m_3 & 0 & \partial_2 m_4 \\ \partial_2 m_1 & \partial_1 m_1 & \partial_2 m_2 & \partial_1 m_2 & \partial_2 m_3 & \partial_1 m_3 & \partial_2 m_4 & \partial_1 m_4 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Di questo operatore matriciale 3×8 , ai fini del calcolo dei termini significativi della matrice di rigidezza della lastra, si farà uso solo dei termini che stanno sulla metà destra. E' pertanto utile partizionare la matrice, isolando i termini utili, nella matrice $\widehat{\underline{M}}_2$, da quelli superflui, nella matrice $\widehat{\underline{M}}_1$

$$\widehat{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \widehat{\underline{M}}_1 & \widehat{\underline{M}}_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \widehat{\underline{M}}^T = \begin{bmatrix} \widehat{\underline{M}}_1^T \\ \widehat{\underline{M}}_2^T \end{bmatrix}$$

Sostituendo la partizione di $\widehat{\underline{M}}$ nella relazione che calcola la matrice di rigidezza $\underline{K}$ si ha:

$$\begin{aligned}\widehat{\underline{M}}^T \cdot \underline{\kappa} \cdot \widehat{\underline{M}} &= \widehat{\underline{M}} = \begin{bmatrix} \widehat{\underline{M}}_1^T \\ \widehat{\underline{M}}_2^T \end{bmatrix} \underline{\kappa} \begin{bmatrix} \widehat{\underline{M}}_1 & \widehat{\underline{M}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\underline{M}}_1^T \cdot \underline{\kappa} \\ \widehat{\underline{M}}_2^T \cdot \underline{\kappa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\underline{M}}_1 & \widehat{\underline{M}}_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \widehat{\underline{M}}_1^T \cdot \underline{\kappa} \cdot \widehat{\underline{M}}_1 & \widehat{\underline{M}}_1^T \cdot \underline{\kappa} \cdot \widehat{\underline{M}}_2 \\ \widehat{\underline{M}}_2^T \cdot \underline{\kappa} \cdot \widehat{\underline{M}}_1 & \widehat{\underline{M}}_2^T \cdot \underline{\kappa} \cdot \widehat{\underline{M}}_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\underline{K}^{22} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h(u, v) \widehat{\underline{M}}_2^T(u, v) \cdot \underline{\kappa} \cdot \widehat{\underline{M}}_2(u, v) J(u, v) du dv \cdot \underline{U} \quad (3.45)$$

Si consideri ora la matrice ottenuta dal prodotto

$$\underline{G} = \widehat{\underline{M}}_2^T(u, v) \cdot \underline{\kappa} \cdot \widehat{\underline{M}}_2(u, v)$$

Questa matrice ha dimensione 4 e contiene quindi 10 elementi significativi, che vengono di seguito riportati

$$G_{11} = (\lambda + 2\mu)(\partial_1 m_3)^2 + \mu(\partial_2 m_3)^2 \quad (3.46a)$$

$$G_{12} = \lambda(\partial_1 m_3)(\partial_2 m_3) + \mu(\partial_2 m_3)(\partial_1 m_3) = (\lambda + \mu)(\partial_2 m_3)(\partial_1 m_3) \quad (3.46b)$$

$$G_{13} = (\lambda + 2\mu)(\partial_1 m_3)(\partial_1 m_4) + \mu(\partial_2 m_3)(\partial_2 m_4) \quad (3.46c)$$

$$G_{14} = \lambda(\partial_1 m_3)(\partial_1 m_4) + \mu(\partial_2 m_3)(\partial_1 m_4) \quad (3.46d)$$

$$G_{22} = (\lambda + 2\mu)(\partial_2 m_3)^2 + \mu(\partial_1 m_3)^2 \quad (3.46e)$$

$$G_{23} = \lambda(\partial_2 m_3)(\partial_1 m_4) + \mu(\partial_1 m_3)(\partial_2 m_4) \quad (3.46f)$$

$$G_{24} = (\lambda + 2\mu)(\partial_2 m_3)(\partial_2 m_4) + \mu(\partial_1 m_3)(\partial_1 m_4) \quad (3.46g)$$

$$G_{33} = (\lambda + 2\mu)(\partial_1 m_4)^2 + \mu(\partial_2 m_4)^2 \quad (3.46h)$$

$$G_{34} = \lambda(\partial_1 m_4)(\partial_2 m_4) + \mu(\partial_2 m_4)(\partial_1 m_4) = (\lambda + \mu)(\partial_1 m_4)(\partial_2 m_4) \quad (3.46i)$$

$$G_{44} = (\lambda + 2\mu)(\partial_2 m_4)^2 + \mu(\partial_1 m_4)^2 \quad (3.46l)$$

dove ciascun termine varia a seconda del punto della lastra, ed è quindi funzione solo delle coordinate intrinseche

$$G_{ij} = G_{ij}(u, v)$$

Il generico termine della matrice di rigidezza K_{ij}^{22} sarà pertanto dato da

$$K_{ij}^{22} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 h(u, v) G_{ij}(u, v) J(u, v) du dv \quad (3.47)$$

Questo integrale può essere risolto in forma numerica mediante il metodo della quadratura gaussiana, di gran lungo il più diffuso negli approcci agli elementi finiti, cui questa taratura si ispira.

Il generico termine della matrice $\underline{K}^{22}$ è stato pertanto calcolato mediante la seguente relazione:

$$K_{ij}^{22} = \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N w_p w_q h(u_p, v_q) G_{ij}(u_p, v_q) J(u_p, v_q) \quad (3.48)$$

Il risultato dipende ovviamente dal numero N di punti usati per l'integrazione numerica. Dal momento che le componenti della funzione integranda non sono espressioni polinomiali, la quadratura gaussiana introduce comunque un'approssimazione, che in linea di principio migliora al crescere di N . Peraltro, l'utilizzo di un numero troppo elevato di punti non solo aumenta l'onere computazionale ma produce anche elementi eccessivamente rigidi, soprattutto se la distorsione geometrica è notevole (Corradi Dell'Acqua).

Il numero massimo di punti di fatto impiegato è quello che consente di integrare esattamente l'elemento genitore. Si parla in tal caso di integrazione completa, anche se per elementi distorti il risultato è comunque approssimato. Ad esempio, per elementi a 4 o ad 8 nodi, un'integrazione completa richiede di operare, rispettivamente, su reticoli 2×2 e 3×3 . In alcuni casi può peraltro rivelarsi preferibile ricorrere a integrazioni ridotte, basate su di un minor numero di punti, che compensano l'eccesso di rigidità insito in geometrie distorte.

Nel caso di studio, in cui l'elemento genitore è a 4 nodi, si è adottata un'integrazione completa, pertanto il numero di Gauss è stato scelto pari a 2.

2.4.1.2. Determinazione della rigidezza elastica equivalente del NLink diagonale appartenente al piano dell'elemento

Una volta calcolata la matrice $\underline{K}^{22}$ si può facilmente risalire alle forze nodali che agiscono sui vertici dell'elemento mediante la relazione (3.44), dove

$$\underline{\tilde{U}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{l_4 \sin \alpha_4 \sin \alpha_2}{\sin \alpha_3} \\ -\frac{l_4 \sin \alpha_4 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_3} \\ -l_4 \sin \alpha_1 \\ -l_4 \cos \alpha_1 \end{bmatrix}; \quad \underline{P_0^2} = \begin{bmatrix} P_{01}^2 \\ P_{02}^2 \\ P_{03}^2 \\ P_{04}^2 \end{bmatrix}$$

E' a questo punto opportuno osservare che l'equivalenza del modello continuo con quello discreto può essere imposta con due criteri che comportano comunque lo stesso risultato: uno basato sull'uguaglianza degli spostamenti indotti nei due modelli, ed uno basato sull'uguaglianza delle energie di deformazione accumulate nei due casi.

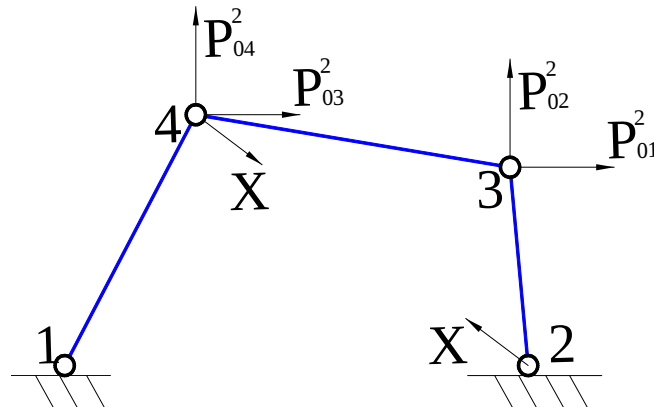


Figura 3.30 – Sistema isostatico equivalente

Il primo approccio è basato sull'uguaglianza del lavoro virtuale esterno che il modello continuo e quello discreto comportano per lo stesso campo di spostamenti virtuali. Una volta applicate le forze nodali al quadrilatero articolato (fig. 3.30), col principio dei lavori virtuali si ricava infatti la reazione X che il link esercita per ogni campo di spostamenti ottenuto per una variazione virtuale dell'ampiezza $\widetilde{\Delta\alpha}$ dell'angolo nel vertice 1.

La differenza tra i lavori virtuali esterni, calcolate nei due casi, deve essere nulla

$$\begin{aligned}
L_{ve} &= \widetilde{\Delta\alpha} \widetilde{\underline{U}}^T \cdot \underline{P}_0^2 - X \frac{l_1 l_4 \sin \alpha_1}{d_2} \widetilde{\Delta\alpha} = 0 \quad \forall \widetilde{\Delta\alpha} \Rightarrow \\
\Rightarrow X \frac{l_1 l_4 \sin \alpha_1}{d_2} &= \widetilde{\underline{U}}^T \cdot \underline{P}_0^2 = \Delta\alpha \widetilde{\underline{U}}^T \underline{K}^{22} \widetilde{\underline{U}}
\end{aligned} \tag{3.49}$$

La forza X può essere vista come quella dovuta all'allungamento della link (fig. 3.31). Infatti si ha:

$$k \frac{l_1 l_4 \sin \alpha_1}{d_2} \Delta\alpha = X \tag{3.50}$$

Sostituendo la (3.49) nella (3.50) si può infine ricavare la rigidezza della link diagonale

$$\begin{aligned}
\Rightarrow k \left(\frac{l_1 l_4 \sin \alpha_1}{d_2} \right)^2 \Delta\alpha &= \Delta\alpha \widetilde{\underline{U}}^T \underline{K}^{22} \widetilde{\underline{U}} \Rightarrow \\
\Rightarrow k &= \left(\frac{d_2}{l_1 l_4 \sin \alpha_1} \right)^2 \widetilde{\underline{U}}^T \underline{K}^{22} \widetilde{\underline{U}}
\end{aligned} \tag{3.51}$$

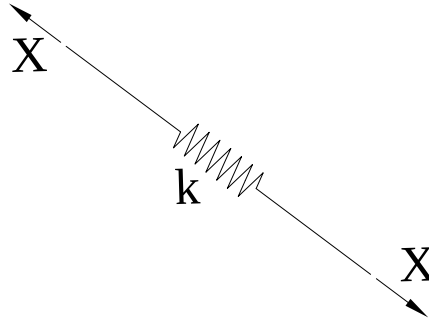


Figura 3.31 – Link diagonale soggetta allo sforzo assiale X

Assegnato un campo di spostamenti determinato da un $\Delta\alpha$, è possibile ricavare le energie di deformazione accumulate nel sistema discreto ed in quello continuo. Nella lastra piana l'energia di deformazione è data da:

$$E_{dc} = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{K} \underline{U} \Delta\alpha^2 \tag{3.52}$$

dove tuttavia si osserva, come nel criterio precedente, che non tutti i termini del vettore degli spostamenti nodali sono diversi da zero. Partizionando opportunamente si ottiene infine_

$$E_{dc} = \frac{1}{2} \widetilde{U}^T K^{22} \widetilde{U} \Delta \alpha^2 \quad (3.53)$$

Nel sistema discreto l'energia di deformazione sarà, più semplicemente, data da:

$$E_{dd} = \frac{1}{2} k \Delta_2^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{d_2}{l_1 l_4 \sin \alpha_1} \right)^2 \Delta \alpha^2 \quad (3.54)$$

dove l'espressione dell'allungamento della seconda diagonale è data dalla seconda delle relazioni cinematiche (7.19). Si uguagliano quindi le energie di deformazione accumulate nei due casi:

$$E_{dc} = E_{dd} \quad (3.55)$$

Esplicitando, e ricavando la rigidezza del link diagonale, si riottiene infine l'espressione (3.51).

2.4.2. La calibrazione del NLink diagonale appartenente al piano dell'elemento nella fase non lineare

Per quanto concerne il comportamento non lineare, si farà riferimento ad un legame elastico perfettamente plastico a deformazione limitata sia a trazione che a compressione.

I limiti di resistenza elastica della molla diagonale sono determinati individuando il livello di distorsione in corrispondenza del quale il primo punto interno alla lastra raggiunge una tensione principale di trazione pari alla resistenza a trazione del materiale.

Lo stato tensionale, in ciascun punto e per ciascun passo dell'analisi, è determinato sovrapponendo allo stato tensionale indotto dallo stato deformativo nel piano della lastra (controllato dalla variazione d'angolo al primo vertice) lo stato di tensione flessomembranale valutabile dagli sforzi nelle molle ortogonali d'interfaccia quali sforzi rappresentativi nelle fibre corrispondenti. Attraverso tale procedura, coerente con la modellazione adottata, si considera l'effetto

dell'azione di confinamento nella valutazione della condizione di prima fessurazione dell'elemento.

2.4.2.1. Deteminazione dello stato tensionale indotto nella lastra dalla deformazione associata alla distorsione angolare $\Delta\alpha$

Lo stato tensionale indotto all'interno dell'elemento corrispondente all'attivazione della distorsione angolare $\Delta\alpha$ si ricava considerando le espressioni riportate precedentemente. Allo scopo di valutare il punto in cui si ha il raggiungimento della tensione limite di trazione si può valutare lo stato tensionale in corrispondenza di una griglia regolare di punti (griglia di riferimento) e sugli stessi determinare lo stato tensionale corrispondente alle azioni membranali.

2.4.2.2. Deteminazione dello stato tensionale indotto nell'elemento dalle azioni flesso-membranali

Noti gli sforzi nei link ortogonali d'interfaccia per ogni fibra corrispondente è possibile individuare lo stato tensionale monoassiale in corrispondenza di giaciture orientate secondo gli assi delle fibre in funzione di una coordinata locale rispetto al suo asse. In particolare per la generica fibra si ha

$$\sigma_i(\zeta_i) = \frac{F_i}{A_i(\zeta_i)}$$

Con riferimento alla griglia di riferimento si possono determinare gli stati tensionali, assunti indipendenti, corrispondenti alle giaciture delle fibre orientate secondo le due direzioni che collegano le interfacce opposte e determinare lo stato tensionale complessivo sommando i due stati tensionali monoassiali derivanti dagli sforzi nelle fibre è lo stato tensionale piano corrispondente associato alla deformazione di distorsione angolare del quadrilatero. Una volta noto lo stato tensionale complessivo si ricavano banalmente le tensioni principali in modo da monitorare nel passo il raggiungimento della tensione limite di trazione e la corrispondente giacitura. La condizione di incipiente fessurazione si assume come il limite del comportamento elastico del link diagonale.

3. Calcolo delle forze nodali equivalenti

Il calcolo delle forze nodali equivalenti richiede un approccio generale per poter considerare la vasta gamma di azioni che possono agire sul nostro elemento. Le azioni considerate si dividono in due classi principali:

- Forze di massa
- Forze esterne

Un'ulteriore classificazione può essere registrata in base alla tipologia del carico. Distinguiamo infatti tra carichi concentrati, carichi distribuiti lungo una linea e carichi distribuiti di area.

L'approccio seguito è analogo a quello del metodo degli elementi finiti, in cui si calcola il lavoro che i carichi applicati compiono per degli spostamenti nodali virtuali. L'unica ipotesi imposta è che il campo di spostamento non dipenda dalla terza coordinata locale dell'elemento, ossia non vari lungo lo spessore dello stesso. Si ha allora:

$$L_{ve} = \iint_S \underline{F}^T(x, y) \underline{\tilde{S}}(x, y) dA \quad (3.56)$$

Occorre quindi conoscere il campo di spostamenti ottenuto a partire da degli spostamenti virtuali. Si sfruttano le relazioni che forniscono lo spostamento nelle tre direzioni principali dei vertici dell'elemento a seguito degli spostamenti dei gradi di libertà scelti. Queste relazioni possono essere scritte in forma matriciale:

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ V_1 \\ W_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (Z_1 - Z_G) & -(Y_1 - Y_G) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -(Z_1 - Z_G) & 0 & (X_1 - X_G) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (Y_1 - Y_G) & -(X_1 - X_G) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \\ \tilde{W} \\ \widetilde{\Phi_x} \\ \widetilde{\Phi_y} \\ \widetilde{\Phi_z} \\ \widetilde{\Delta\alpha} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} U_2 \\ V_2 \\ W_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & (Z_2 - Z_G) & -(Y_2 - Y_G) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -(Z_2 - Z_G) & 0 & (X_2 - X_G) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & (Y_2 - Y_G) & -(X_2 - X_G) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{U} \\ \widetilde{V} \\ \widetilde{W} \\ \widetilde{\Phi}_X \\ \widetilde{\Phi}_Y \\ \widetilde{\Phi}_Z \\ \widetilde{\Delta\alpha} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} U_3 \\ V_3 \\ W_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & Z_3 - Z_G & Y_G - Y_3 & -\frac{l_4 \sin \alpha_4}{\sin \alpha_3} (\sin \alpha_2 i_X + \cos \alpha_2 j_X) \\ 0 & 1 & 0 & Z_G - Z_3 & 0 & X_3 - X_G & -\frac{l_4 \sin \alpha_4}{\sin \alpha_3} (\sin \alpha_2 i_Y + \cos \alpha_2 j_Y) \\ 0 & 0 & 1 & Y_3 - Y_G & X_G - X_3 & 0 & -\frac{l_4 \sin \alpha_4}{\sin \alpha_3} (\sin \alpha_2 i_Z + \cos \alpha_2 j_Z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{U} \\ \widetilde{V} \\ \widetilde{W} \\ \widetilde{\Phi}_X \\ \widetilde{\Phi}_Y \\ \widetilde{\Phi}_Z \\ \widetilde{\Delta\alpha} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} U_4 \\ V_4 \\ W_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & Z_4 - Z_G & Y_G - Y_4 & -l_4 (\sin \alpha_1 i_X - \cos \alpha_1 j_X) \\ 0 & 1 & 0 & Z_G - Z_4 & 0 & X_4 - X_G & -l_4 (\sin \alpha_1 i_Y - \cos \alpha_1 j_Y) \\ 0 & 0 & 1 & Y_4 - Y_G & X_G - X_4 & 0 & -l_4 (\sin \alpha_1 i_Z - \cos \alpha_1 j_Z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{U} \\ \widetilde{V} \\ \widetilde{W} \\ \widetilde{\Phi}_X \\ \widetilde{\Phi}_Y \\ \widetilde{\Phi}_Z \\ \widetilde{\Delta\alpha} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Si individuano quindi quattro relazioni matriciali, che possono essere riassunte in quattro relazioni del tipo

$$\underline{S}_i = \underline{A}_i \cdot \underline{\tilde{U}} \quad \text{con } i=1,2,3,4$$

dove si è indicato con $\underline{S}_i$ il vettore degli spostamenti dell'i-esimo vertice del quadrilatero, con $\underline{\tilde{U}}$ il vettore degli spostamenti nodali virtuali e con $\underline{A}_i$ la matrice che mette in relazione i due vettori, per l'i-esimo vertice del quadrilatero.

Si introduce un sistema di riferimento intrinseco che consentirà di ottenere le forze nodali per integrazione numerica. A partire dagli spostamenti nodali possiamo allora ricavare quelli del generico punto dell'elemento. Si ha infatti:

$$\begin{bmatrix} U(u,v) \\ V(u,v) \\ W(u,v) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} U_i \\ V_i \\ W_i \end{bmatrix} m_i(u,v) = \sum_{i=1}^4 \underline{A}_i \cdot \underline{\tilde{U}} m_i(u,v) = \left[\sum_{i=1}^4 \underline{A}_i m_i(u,v) \right] \cdot \underline{\tilde{U}} \quad (3.57)$$

dove le $m_i(u,v)$ sono le funzioni di forma (2.1), già più volte già impiegate. La matrice in parentesi quadra ha dimensioni 3×7 e può essere indicata con $\underline{A}$. Si ottiene pertanto:

$$\underline{\tilde{S}}(u,v) = \begin{bmatrix} U(u,v) \\ V(u,v) \\ W(u,v) \end{bmatrix} = \underline{A} \cdot \underline{\tilde{U}} \quad (3.58)$$

Riprendendo l'espressione del lavoro esterno si deve solo operare un cambio di variabili, da cartesiane ad intrinseche, e poi risolvere numericamente l'integrale che si ottiene.

$$\begin{aligned} L_{ve} &= \iint_S \underline{F}^T(x,y) \underline{\tilde{S}}(x,y) dA = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{F}^T(u,v) \underline{\tilde{S}}(u,v) J(u,v) dudv \Rightarrow \\ &\Rightarrow L_{ve} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{F}^T(u,v) \underline{A}(u,v) J(u,v) dudv \cdot \underline{\tilde{U}} \quad \forall \underline{\tilde{U}} \end{aligned} \quad (3.59)$$

L'espressione delle forze nodali equivalenti ai carichi applicati $\underline{F}(u,v)$ è data dall'integrale appena ottenuto, cioè da:

$$\begin{aligned}\underline{P}^T &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{F}^T(u, v) \underline{A}(u, v) J(u, v) dudv \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{P} &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \underline{A}^T(u, v) \underline{F}(u, v) J(u, v) dudv\end{aligned}\quad (3.60)$$

Questa espressione generale va però adattata nei particolari casi che possono presentarsi a seconda della tipologia del carico (concentrato, distribuito di area, distribuito di linea). Consideriamo prima il caso più semplice di carico concentrato. Si supponga di avere un numero finito n di forze agenti in altrettanti punti dell'elemento considerato. Si ha:

$$\underline{\mathcal{F}}_j = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_{xj} \\ \mathcal{F}_{yj} \\ \mathcal{F}_{zj} \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.61)$$

Gli spostamenti nei punti di applicazione delle forze, espressi in coordinate intrinseche, saranno dati da:

$$\underline{\widetilde{S}}_j = \begin{bmatrix} U_j \\ V_j \\ W_j \end{bmatrix} = \underline{A}(u_j, v_j) \cdot \underline{\widetilde{U}} \quad (3.62)$$

Il contributo delle forze concentrate al lavoro virtuale esterno sarà pertanto dato da:

$$L_{ve} = \sum_{j=1}^n \underline{\mathcal{F}}_j^T \cdot \underline{\widetilde{S}}_j = \left[\sum_{j=1}^n \underline{\mathcal{F}}_j^T \cdot \underline{A}(u_j, v_j) \right] \cdot \underline{\widetilde{U}} \quad \forall \underline{\widetilde{U}} \quad (3.63)$$

Pertanto si ricava infine il vettore delle forze nodali $\underline{P}_{FC}^T$ equivalenti ai carichi concentrati sull'elemento:

$$\underline{P}_{FC}^T = \sum_{j=1}^n \underline{\mathcal{F}}_j^T \cdot \underline{A}(u_j, v_j) \quad (3.64)$$

Più complesso è il caso dei carichi distribuiti lungo una linea Γ (Figura 3.35). Si supponga di disporre delle espressioni parametriche della linea nel sistema di riferimento locale cartesiano della lastra:

$$\Gamma \rightarrow \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [t_0, t_1]$$

L'espressione parametrica delle tre componenti del carico sarà del tipo:

$$\underline{\mathcal{F}}(t) = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_x(t) \\ \mathcal{F}_y(t) \\ \mathcal{F}_z(t) \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

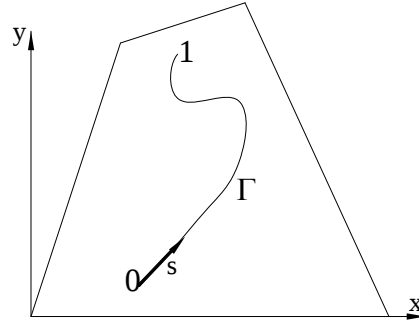


Figura 3.35 – Carico distribuito lungo la linea Γ

mentre l'espressione del lavoro compiuto da questo carico per degli spostamenti nodali virtuali sarà dato da

$$L_{ve} = \int_{\Gamma} \underline{\mathcal{F}}^T(s) \cdot \underline{\tilde{S}}(s) ds \quad (3.66)$$

dove s è l'ascissa curvilinea. Per consentire l'integrazione numerica di quest'integrale occorre però effettuare un cambio di variabili per riportarci nel dominio di integrazione $[-1, 1]$.

Pur essendo questo metodo valido per una linea Γ di forma qualsiasi si suppone, per semplicità, di avere carichi distribuiti lungo una linea retta tra gli estremi di coordinate (x_0, y_0) e (x_1, y_1) . In questo caso, infatti, il cambio di variabili risulta molto agevole. Basta infatti fare la posizione

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \frac{1-t}{2} + x_1 \frac{1+t}{2} \\ y(t) = y_0 \frac{1-t}{2} + y_1 \frac{1+t}{2} \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \quad (3.67)$$

Effettuando il cambio di variabili si ottiene:

$$dx = \frac{x_1 - x_0}{2} dt; \quad dy = \frac{y_1 - y_0}{2} dt$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

da cui

$$ds = \frac{1}{2} \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} dt = \frac{L}{2} dt \quad (3.68)$$

dove L è la distanza tra i due estremi della linea Γ .

Il lavoro compiuto dal carico per un campo di spostamenti virtuali sarà pertanto da:

$$L_{ve} = \int_{-1}^1 \underline{\mathcal{F}}^T(t) \cdot \underline{\tilde{S}}(t) \frac{L}{2} dt = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \underline{\mathcal{F}}^T(t) \cdot \underline{A}[u(t), v(t)] dt \cdot \underline{\tilde{U}} \quad (3.69)$$

Ancora una volta è necessario effettuare un cambio di sistema di riferimento da cartesiano ad intrinseco (fig. 3.36). Le espressioni di $u(t)$ e $v(t)$ saranno stavolta:

$$\begin{cases} u(t) = u_0 \frac{1-t}{2} + u_1 \frac{1+t}{2} \\ v(t) = v_0 \frac{1-t}{2} + v_1 \frac{1+t}{2} \end{cases} \quad t \in [-1, 1] \quad (3.70)$$

dove (u_0, v_0) e (u_1, v_1) saranno i punti, nel sistema di riferimento intrinseco, corrispondenti alla coppia di punti (x_0, y_0) e (x_1, y_1) del sistema di riferimento locale cartesiano.

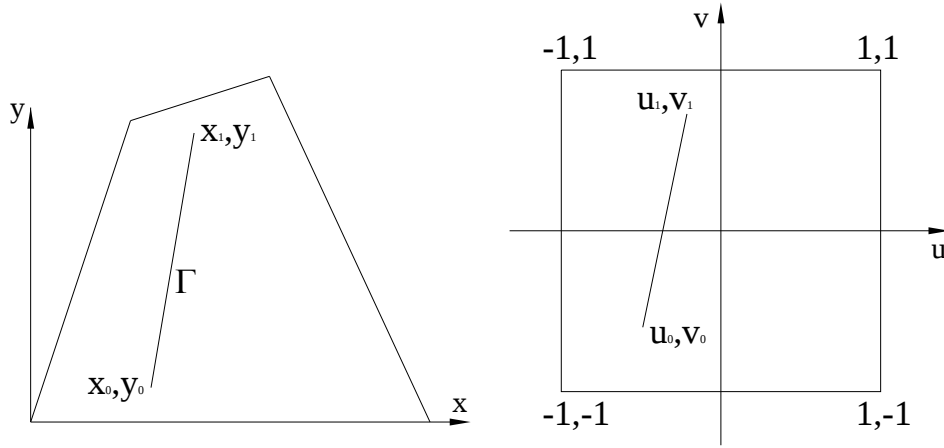


Figura 3.36 – Sistema di riferimento cartesiano del quadrilatero e sistema di riferimento intrinseco

L'espressione del vettore delle forze nodali $\underline{P}_{CL}^T$ equivalenti al carico distribuito di linea sarà infine dato da:

$$\underline{P}_{CL}^T = \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \underline{\mathcal{F}}^T(t) \cdot \underline{A}[u(t), v(t)] dt \quad (3.71)$$

Resta da ricavare il vettore delle forze nodali equivalenti ai carichi distribuiti di area. Noto il vettore dei carichi applicati $\underline{F}(x, y)$ in coordinate cartesiane, occorre ricavare l'equivalente in coordinate intrinseche. Indicando con $P(x, y)$ l'intensità del carico e con $\underline{d}(x, y)$ il versore che ne indica, punto per punto, la direzione si possono ricavare, per il generico punto, le tre componenti del carico dalle espressioni:

$$\begin{cases} F_x(x, y) = P(x, y) \underline{d}(x, y) \cdot \underline{I} \\ F_y(x, y) = P(x, y) \underline{d}(x, y) \cdot \underline{J} \\ F_z(x, y) = P(x, y) \underline{d}(x, y) \cdot \underline{K} \end{cases} \quad (3.72)$$

Pur avendo questo approccio validità generale, per le nostre analisi imporremo che i carichi distribuiti agiscano su tutta la superficie dell'elemento e che, note l'intensità e la direzione del carico ai quattro vertici dell'elemento, il carico in un generico punto dell'elemento venga

ottenuto mediante interpolazione secondo le funzioni di forma $m_i(u, v)$.

Si ha allora:

$$\underline{F}(u, v) = P(u, v) \underline{d}(u, v) \quad (3.73)$$

dove le espressioni a secondo membro sono a loro volta ottenute dalle

$$\begin{aligned} P(u, v) &= \sum_{i=1}^4 P_i m_i(u, v) \\ \underline{d}(u, v) &= \sum_{i=1}^4 \underline{d}_i m_i(u, v) \end{aligned} \quad (3.74)$$

essendo P_i e $\underline{d}_i$ l'intensità del carico e il versore che ne indica la direzione nel generico vertice dell'elemento.

L'espressione del lavoro esterno per carichi distribuiti diventa quindi

$$L_{ve} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^4 P_i m_i(u, v) \left[\sum_{i=1}^4 \underline{d}_i m_i(u, v) \right] \underline{A}(u, v) J(u, v) du dv \cdot \underline{\tilde{U}} \quad \forall \underline{\tilde{U}} \quad (3.75)$$

Il vettore dei carichi nodali $\underline{P}_{CA}^T$ equivalenti al carico di area distribuito sull'elemento sarà infine dato da

$$\underline{P}_{CA}^T = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^4 P_i m_i(u, v) \left[\sum_{i=1}^4 \underline{d}_i m_i(u, v) \right] \underline{A}(u, v) J(u, v) du dv \quad (3.76)$$

Un particolare caso di un carico di area, che merita di essere trattato a parte, è il calcolo delle forze nodali equivalenti al peso proprio. L'espressione delle forze nodali appena ottenuta va adattata al caso specifico in cui la direzione di carico è costante e l'ampiezza del carico in ciascun punto, nell'ipotesi di materiale omogeneo, è proporzionale all'andamento dello spessore. Si ha infatti

$$\underline{F}(u, v) = \rho s(u, v) \underline{g} \quad (3.77)$$

Il vettore accelerazione di gravità $\underline{g}$ ha direzione verticale mentre il suo modulo sarà

$$|\underline{g}| = 9.81 \text{ m/s}^2$$

Il vettore delle forze nodali sarà infine ottenuto dal contributo di ciascuna delle quattro tipologie di carico appena descritte e sarà, in conclusione, dato da:

$$\begin{aligned}
 \underline{P}^T = & \rho \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^4 \underline{g}^T \underline{A}(u, v) s(u, v) J(u, v) du dv + \\
 & + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \sum_{i=1}^4 P_i m_i(u, v) \left[\sum_{i=1}^4 \underline{d}_i m_i(u, v) \right] \underline{A}(u, v) J(u, v) du dv + \\
 & + \frac{L}{2} \int_{-1}^1 \underline{\mathcal{F}}^T(t) \cdot \underline{A}[u(t), v(t)] dt + \sum_{j=1}^n \underline{\mathcal{F}}_j^T \cdot \underline{A}(u_j, v_j)
 \end{aligned} \tag{3.78}$$

dove i singoli contributi sono rispettivamente dati da forze di massa, carichi distribuiti su superfici, carichi disposti su linee, carichi concentrati.

Bibliografia

- [1] L. Corradi dell'Acqua, "*Meccanica delle strutture – Le teorie strutturali e il metodo degli elementi finiti*", "Il metodo degli elementi finiti: approccio agli spostamenti", 1992

Capitolo 4

APPLICAZIONI

Il macro-elemento descritto nei precedenti capitoli è stato inserito in un software dedicato alla modellazione per macro-elementi denominato 3DMacro. Tale piattaforma di sviluppo ha avuto origine a partire dalla versione piana del macro-elemento, concepita per la simulazione della risposta non-lineare delle murature soggette ad azioni nel proprio piano (Caliò et al., 2004), e successivamente arricchita con l'inserimento del macro-elemento spaziale concepito per lo studio della risposta nel piano e fuori piano degli edifici in muratura (Pantò, 2007 e Caliò et al., 2008).

Le applicazioni contenute nel presente capitolo rappresentano le prime significative modellazioni effettuate con il nuovo elemento pensato per strutture murarie a geometria curva.

Allo scopo di procedere ad una validazione dell'approccio di modellazione proposto sono stati effettuati alcuni confronti sia in campo elastico che inelastico.

In particolare il capitolo è stato suddiviso in tre sezioni.

Nella prima parte verranno presentati alcuni casi significativi di volte a semplice e doppia curvatura in campo elastico. I confronti sono stati effettuati con risultati noti in letteratura, per i quali esistono soluzioni in forma chiusa, e con soluzioni numeriche ottenute attraverso una modellazione agli elementi finiti lineari piani mediante il noto software SAP2000 ver. 14, disponibile in commercio e correntemente usato sia in ambiente accademico che nel più incisivo ambito professionale.

Nella seconda sezione sono stati considerati alcuni esempi di volte semplici e composte, studiate anche in campo non lineare, per le quali

sono disponibili risultati ottenuti da prove sperimentali, da applicazioni col metodo agli elementi finiti non lineari e con procedure numeriche di analisi limite.

Nella terza sezione, infine, verrà presentato un caso di studio puramente immaginario le cui peculiarità possono tuttavia considerarsi rappresentative di un'ampia varietà di edifici a carattere storico e monumentale. Tale applicazione serve a fornire una prima valutazione circa la possibilità di applicare l'approccio di modellazione proposto per la stima della vulnerabilità sismica di edifici storici a carattere monumentale.

1. Validazione della modellazione proposta in regime elastico lineare

L'approccio di modellazione per macro-elementi presentato nella tesi si propone l'ambizioso obiettivo di rappresentare un'alternativa agli elementi finiti non lineari per la simulazione della risposta alle azioni sismiche degli edifici storici a carattere monumentale. Prima di verificare l'efficacia del modello proposto in ambito non lineare si ritiene necessario effettuare dei confronti con soluzioni esatte ed altre metodi di modellazione nel più semplice ambito elastico lineare. A tal proposito, con riferimento ad alcuni casi fondamentali, di cui si conoscono soluzioni in forma chiusa, verranno effettuati dei confronti tra il metodo proposto e il metodo degli elementi finiti.

I casi di studio presi in considerazione sono relativi ad elementi strutturali a semplice e doppia curvatura. Tali semplici casi di studio risultano significativi per valutare l'efficacia del modello proposto sia per gli aspetti cinematici che per quelli meccanici.

Sono stati indagati il regime tensionale e il campo di spostamenti indotti dal peso proprio di schemi a volta in diverse configurazioni geometriche. I risultati del modello proposto sono stati confrontati con quelli ottenuti col metodo degli elementi finiti, e, limitatamente al campo tensionale, con delle soluzioni in forma chiusa disponibili in letteratura relativamente ad un regime membranale (Pfluger, 1966).

In alcuni casi è stata inoltre valutata la sensibilità del modello proposto alla mesh.

Gli esempi di volte presi in considerazione sono:

- *cupola sferica*;
- *volta cilindrica a direttrice circolare*;
- *volta cilindrica a direttrice parabolica*;
- *volta cilindrica a direttrice circolare e spessore variabile*.

1.1. Cupola sferica

Geometria e caratteristiche dei materiali

La cupola sferica è una calotta di apertura $\pi/2$ e raggio r . Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro della semisfera, le coordinate della superficie media della cupola, con riferimento alla figura 4.1, valgono:

$$x = r \sin \varphi \sin \vartheta$$

$$y = r \sin \varphi \cos \vartheta$$

$$z = r \cos \vartheta$$

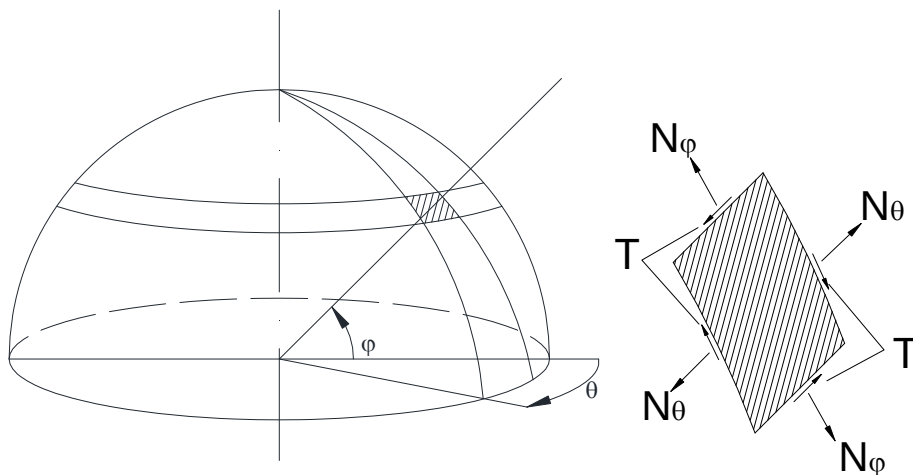


Figura 4.1. Schema geometrico di una cupola sferica

L'esempio preso in considerazione è caratterizzato dai seguenti dati geometrici:

$$r = 750 \text{ cm}$$

$$t = 20 \text{ cm}$$

Caratteristiche dei materiali

$$E = 3350 \text{ kN/cm}^2$$

$$\nu = 0.2$$

$$\gamma = 25e-6 \text{ kN/cm}^3$$

Confronto analitico e numerico

Sono stati predisposti modelli numerici con due diversi approcci: il primo è quello per macro-elementi proposto nel presente lavoro e implementato nel software *3DMacro*, l'altro è quello mediante elementi finiti piani (SHELL di SAP2000). I modelli sono considerati incastrati alla base e supposti soggetti al solo peso proprio, Figura 4.2.

Sono inoltre state considerate due differenti mesh: la prima, più rada, che prevede una suddivisione della calotta sferica in 320 elementi, 10 lungo ciascun meridiano per 32 fusi (i modelli che fanno uso di questa mesh verranno indicati come 'modelli 32x10'); la seconda, più fitta, prevede 20 elementi per ciascuno dei 64 fusi, per un totale di 1280 elementi (tali modelli verranno indicati come 'modelli 64x20').

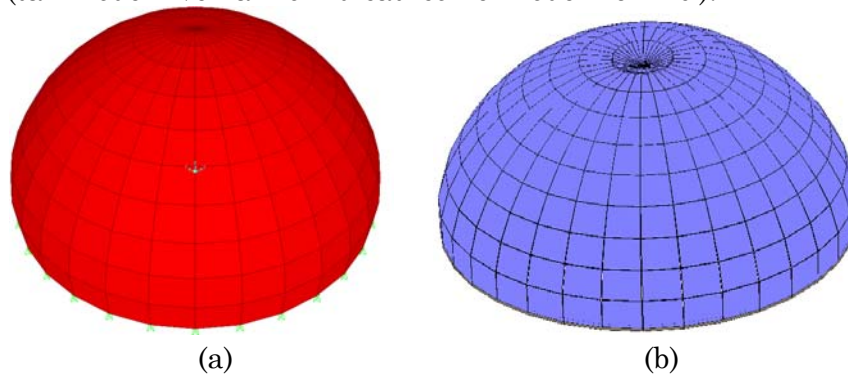


Figura 4.2. Modellazioni numeriche, configurazioni deformate dei modelli 32x10: (a) SAP2000, (b) 3DMacro

I risultati ottenuti dai modelli numerici sono stati confrontati tra di loro, e limitatamente al confronto in termini di sforzi, con una soluzione analitica, valutata con riferimento ad un regime di azioni esclusivamente membranale. L'approssimazione commessa nell'utilizzare tale soluzione appare trascurabile per la geometria e le condizioni di carico considerate ($t \ll r$).

Di seguito si riporta il confronto tra i due approcci numerici in termini di spostamenti verticale e orizzontale al variare del complementare φ dell'angolo azimutale.

Dall'osservazione della figura si evince come la modellazione proposta, in regime elastico lineare, riesca a cogliere la risposta in termini di spostamenti con un'accuratezza paragonabile a quella ottenuta con il metodo degli elementi finiti. Con riferimento alla mesh più rada la soluzione ottenuta con il macro-elemento sovrastima gli spostamenti verticali in corrispondenza dei punti posti a ridosso della chiave della volta.

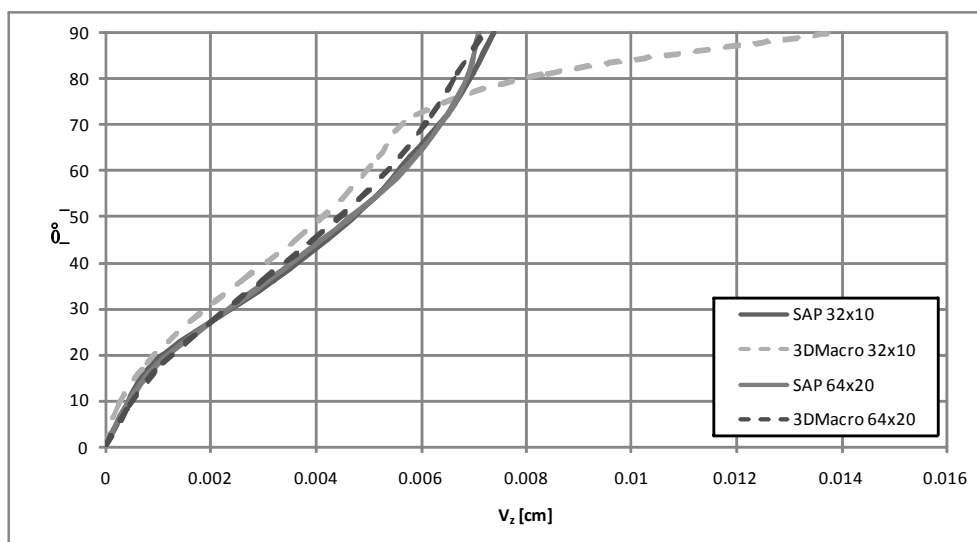


Figura 4.3. Spostamenti verticali

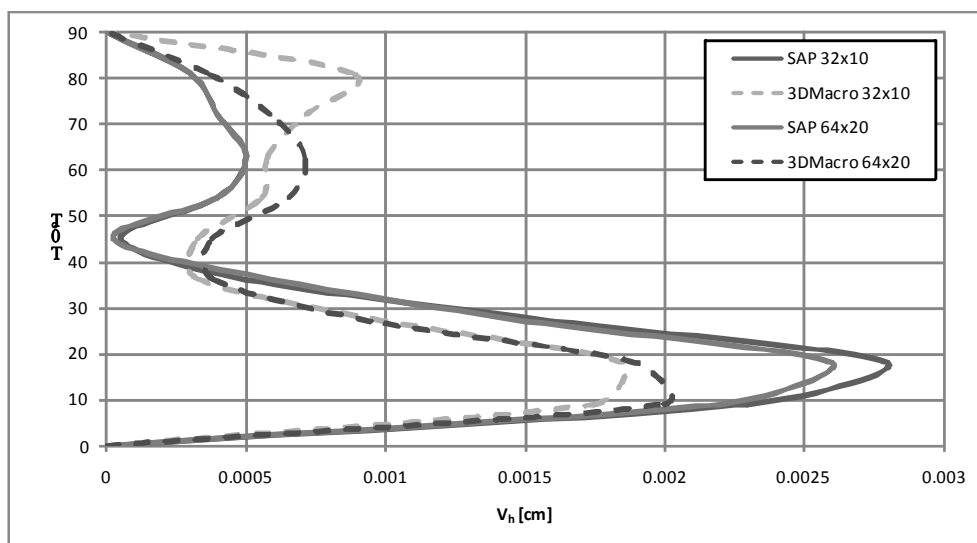


Figura 4.4. Spostamenti orizzontali

Tabella 1. Spostamenti in una cupola sferica soggetta a peso proprio (in cm)

$\phi [^\circ]$	V_z				V_h			
	SAP 32x10	SAP 64x20	3DMacro 32x10	3DMacro 64x20	SAP 32x10	SAP 64x20	3DMacro 32x10	3DMacro 64x20
0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0.0004	0.0004	0.00024	0.00046	0.0023	0.0022	0.00175	0.00200
18	0.0009	0.0010	0.00078	0.00108	0.0028	0.0026	0.00185	0.00190
27	0.0020	0.0020	0.00160	0.00200	0.0016	0.0015	0.00100	0.00095
36	0.0032	0.0031	0.00260	0.00300	0.0005	0.0006	0.00033	0.00038
45	0.0042	0.0041	0.00360	0.00395	0.000052	0.000027	0.00032	0.00038
54	0.0051	0.0051	0.00450	0.00484	0.0004	0.0004	0.00056	0.00065
63	0.0058	0.0059	0.00520	0.00560	0.0005	0.0005	0.00058	0.00071
72	0.0065	0.0065	0.00590	0.00620	0.0004	0.0004	0.00071	0.00059
81	0.0070	0.0069	0.00840	0.00669	0.0003	0.0003	0.00088	0.00036
90	0.0074	0.0071	0.0140	0.00720	0	0	0	0

La figura 4.4 riporta l'andamento degli spostamenti orizzontali al variare del complementare φ dell'angolo azimutale. Nell'esempio considerato la soluzione in termini di spostamento ottenuta con l'approccio proposto sembra risultare più sensibile alla risoluzione della mesh rispetto ad una modellazione agli elementi finiti.

Per la valutazione delle tensioni normali, i modelli numerici sono stati messi a confronto con la teoria classica dei gusci in regime membranale. In particolare sono state valutate le tensioni normali agenti lungo i paralleli e quelle lungo i meridiani secondo l'approccio proposto da Beyer (1956). L'espressione degli sforzi normali lungo i meridiani assume la seguente forma (Figura 4.1):

$$N_{\theta} = \frac{\gamma \cdot r \cdot t}{1 + \sin \varphi}$$

mentre quella relativa agli sforzi lungo i paralleli è

$$N_{\varphi} = \gamma \cdot r \cdot t \left(\frac{1}{1 + \sin \varphi} - \sin \varphi \right)$$

Le tensioni normali corrispondenti a questi sforzi possono essere facilmente ottenute dividendoli per lo spessore.

In figura 4.5 le tensioni normali lungo i meridiani ottenute secondo i diversi approcci considerati sono riportati a confronto. E' interessante notare come la soluzione ottenuta con l'approccio proposto con riferimento alla mesh più fitta restituisce risultati più accurati rispetto al metodo degli elementi finiti.

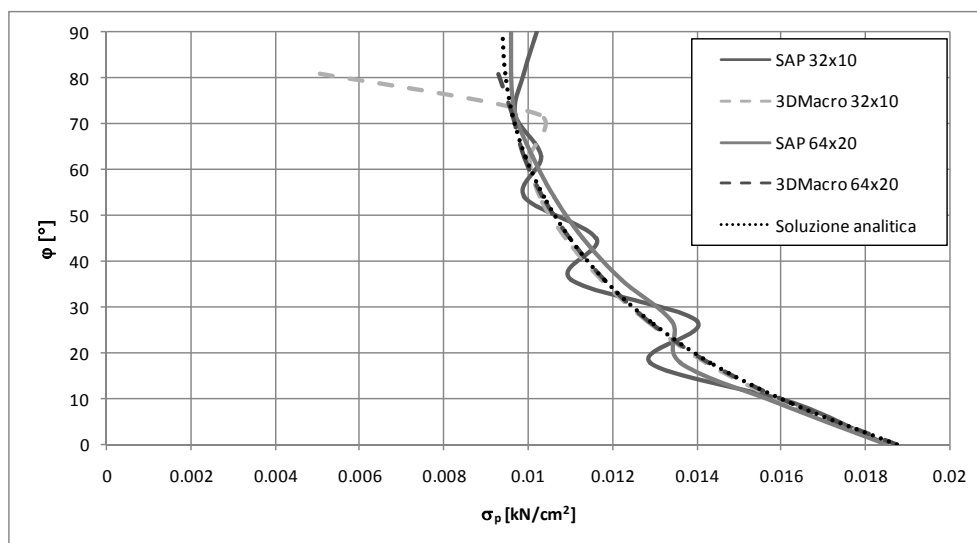


Figura 4.5. Tensioni normali lungo i meridiani

Tabella 2. Tensioni agenti lungo i meridiani in una cupola sferica soggetta a peso proprio (in kN/cm²)

$\varphi [^\circ]$	σ_φ								
	Soluzione analitica	SAP 32x10	Δ [%]	SAP 64x20	Δ [%]	3DMacro 32x10	Δ [%]	3DMacro 64x20	Δ [%]
0	0.0187	0.0185	1.33	0.0185	1.33	0.0186	0.46	0.0187	0.05
9	0.0162	0.0163	0.53	0.0159	1.93	0.0161	0.55	0.0162	0.02
18	0.0143	0.0129	9.93	0.0136	5.05	0.0142	0.83	0.0142	0.35
27	0.0129	0.0140	8.56	0.0134	3.91	0.0128	0.66	0.0128	0.21
36	0.0118	0.0110	6.84	0.0122	3.31	0.0117	0.64	0.0117	0.11
45	0.0109	0.0116	5.61	0.0113	2.88	0.0108	0.82	0.0109	0.14
54	0.0103	0.0099	4.48	0.0106	2.26	0.0102	0.87	0.0103	0.19
63	0.0099	0.0103	3.87	0.0101	1.86	0.0100	0.99	0.0098	0.17
72	0.0096	0.0097	0.93	0.0097	0.93	0.0102	6.68	0.0096	0.02
81	0.0094	0.0099	4.94	0.0096	1.76	0.0049	47.26	0.0092	1.67
90	0.0094	0.0102	8.80	0.0096	2.40	-	-	-	-

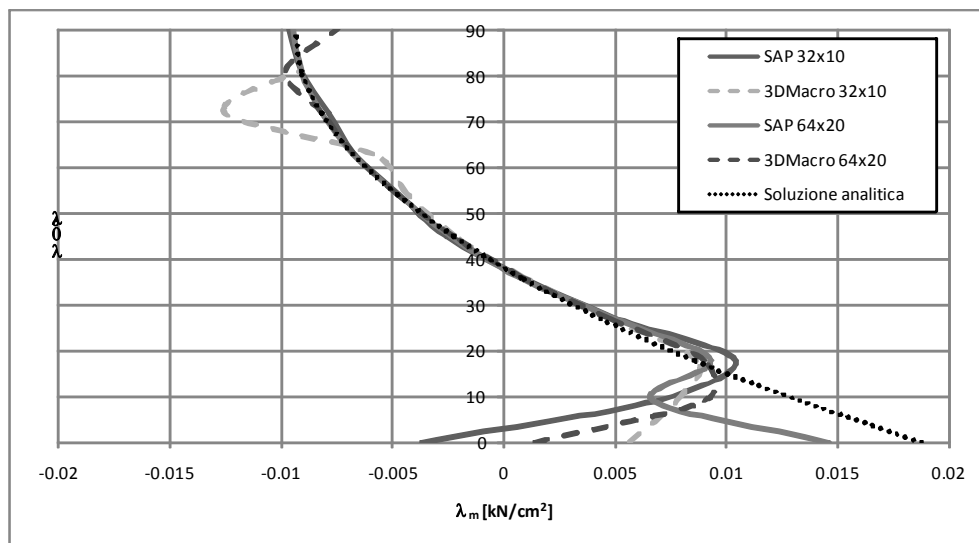


Figura 4.6. Tensioni normali circonferenziali

La figura 4.6 riporta i confronti in termini di tensioni normali lungo i paralleli. Si osserva un buon accordo tra modellazione in 3DMacro e metodo degli elementi finiti, le differenze con la soluzione esatta in corrispondenza dei punti vicino alle imposte della volta sono probabilmente dovute al fatto che la soluzione esatta si riferisce ad un regime puramente membrana e pertanto nella soluzione esatta la volta non trasferisce né taglio né momento.

Tabella 3. Tensioni agenti lungo i paralleli in una cupola sferica soggetta a peso proprio (in kN/cm²)

$\varphi[^\circ]$	σ_m								
	Soluzione analitica	SAP 32x10	Δ [%]	SAP 64x20	Δ [%]	3DMacro 32x10	Δ [%]	3DMacro 64x20	Δ [%]
0	0.0187	-0.0037	119.73	0.0146	22.13	0.0056	69.95	0.0013	92.60
9	0.0132	0.0069	48.04	0.0067	49.55	0.0077	41.63	0.0090	31.95
18	0.0085	0.0104	21.93	0.0093	9.03	0.0086	1.93	0.0090	5.70
27	0.0043	0.0051	16.35	0.005	14.07	0.0048	10.62	0.0047	9.11
36	0.0007	0.0008	1.53	0.0007	11.16	0.0008	11.02	0.0008	5.22
45	-0.0022	-0.0026	14.30	-0.0024	5.51	-0.0022	2.68	-0.0022	0.74
54	-0.0048	-0.0047	2.17	-0.0048	0.09	-0.0043	9.23	-0.0047	0.22
63	-0.0067	-0.0067	1.34	-0.0068	0.13	-0.0058	13.39	-0.0067	0.73
72	-0.0082	-0.0079	3.92	-0.0082	0.27	-0.0125	52.58	-0.0081	0.54
81	-0.0090	-0.0091	0.15	-0.0091	0.15	-0.0091	0.92	-0.0097	7.75
90	-0.0093	-0.0097	3.47	-0.0095	1.33	-	-	-0.0075	19.90

1.2. Volta a botte

Geometria e caratteristiche dei materiali

La volta a botte è una superficie cilindrica con curva generatrice semi-circolare di raggio r e lunghezza L . Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano con origine nel centro della prima curva generatrice e asse y coincidente con la retta direttrice s , le coordinate della superficie media della volta a botte, con riferimento alla figura seguente, valgono:

$$x = r \sin \varphi$$

$$y = s$$

$$z = r \cos \varphi$$

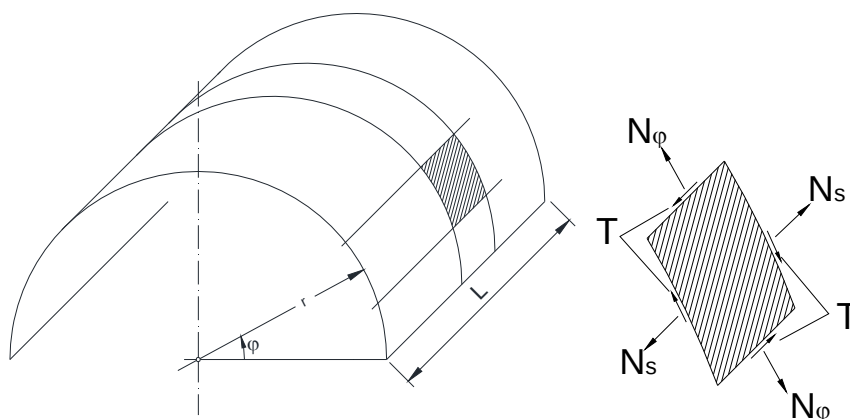


Figura 4.7. Schema geometrico di una volta a botte

L'esempio considerato è relativo ai seguenti dati geometrici:

$$r = 750 \text{ cm}$$

$$L = 1000 \text{ cm}$$

$$t = 20 \text{ cm}$$

Caratteristiche dei materiali

$$E = 3350 \text{ kN/cm}^2$$

$$\nu = 0.2$$

$$\gamma = 25e-6 \text{ kN/cm}^3$$

Confronto analitico e numerico

Sono stati predisposti modelli numerici con due diversi approcci: il primo è quello per macro-elementi proposto nel presente lavoro e implementato nel software *3DMacro*, l'altro è quello mediante elementi finiti piani (SHELL di SAP2000). I modelli sono considerati incastrati alla base e supposti soggetti al solo peso proprio, Figura 4.8.

Sono inoltre state considerate due differenti mesh: la prima, più rada, che prevede una suddivisione della volta a botte in 320 elementi, con 20 suddivisioni lungo la retta direttrice e 16 per ciascuna di queste suddivisioni (i modelli che fanno uso di questa mesh verranno indicati come

‘modelli 16x20’); la seconda, più fitta, prevede 32 elementi per ciascuna delle 40 suddivisioni lungo la retta direttrice, per un totale di 1280 elementi (tali modelli verranno indicati come ‘modelli 32x40’).

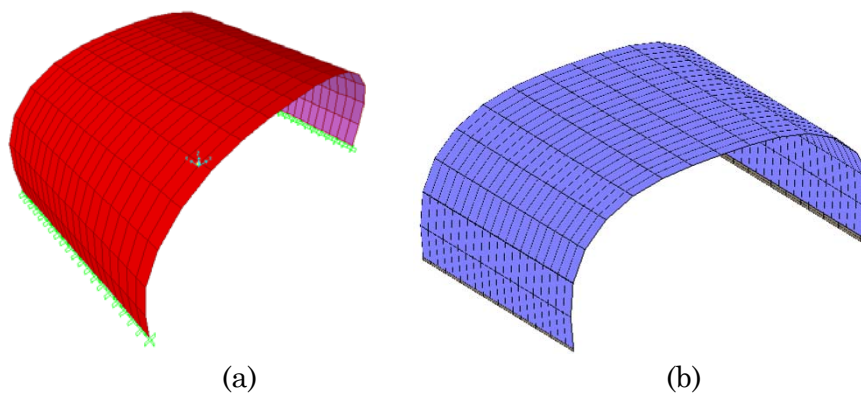


Figura 4.8. Modellazioni numeriche, configurazioni deformate dei modelli 16x20: (a) SAP2000, (b) 3DMacro

I risultati ottenuti dai modelli numerici verranno confrontati tra di loro, e limitatamente al confronto in termini di sforzi, con una soluzione analitica.

Di seguito si riporta il confronto tra i due approcci numerici in termini di spostamenti verticale e orizzontale al variare del complementare φ dell'angolo azimutale.

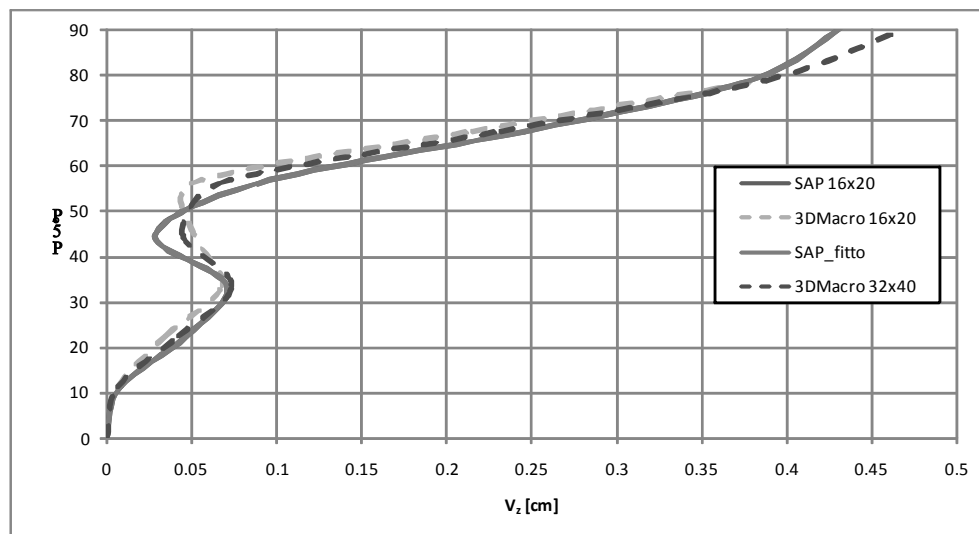


Figura 4.9. Spostamenti verticali

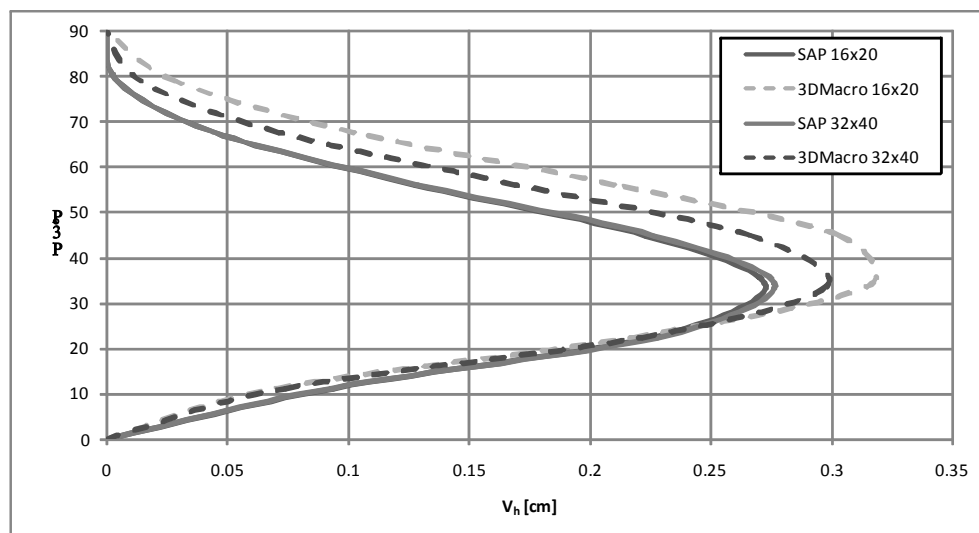


Figura 4.10. Spostamenti orizzontali

Tabella 4. Spostamenti in una volta a botte soggetta a peso proprio (in cm)

$\varphi[^\circ]$	u_z				u_h			
	SAP 16x20	SAP 32x40	3DMacro 16x20	3DMacro 32x40	SAP 16x20	SAP 32x40	3DMacro 16x20	3DMacro 32x40
0	0	0	0	0	0	0	0	0
11.25	0.0081	0.0081	0.0063	0.0063	0.0941	0.0931	0.0708	0.0743
22.5	0.0469	0.0469	0.0350	0.0418	0.2259	0.2283	0.218	0.222
33.75	0.0707	0.0707	0.0680	0.0734	0.2726	0.2766	0.315	0.298
45	0.0289	0.0289	0.0510	0.0448	0.2231	0.2262	0.303	0.266
56.25	0.0888	0.0889	0.0499	0.0664	0.1274	0.1285	0.21	0.169
67.5	0.2458	0.2460	0.2150	0.2320	0.0443	0.0443	0.102	0.071
78.75	0.3787	0.3790	0.3870	0.3880	0.0046	0.0046	0.0287	0.0142
90	0.4306	0.4309	-	0.4690	0	0	0	0

La soluzione in termini di spostamenti sia verticali che orizzontali mostra come i risultati ottenuti con la macro-modellazione proposta sono paragonabili a quelli ottenuti con il metodo degli elementi finiti.

Per la valutazione delle tensioni normali, i modelli numerici sono stati messi a confronto con la teoria classica degli archi.

Con riferimento alla figura sottostante si considerino le seguenti assunzioni:

- H è la spinta in chiave;
- $W(\varphi)$ è il peso risultante della parte di volta compresa tra un taglio in corrispondenza di un angolo φ e la sezione di chiave;
- $R(\varphi)$ è l'intensità della forza scambiata nella sezione in corrispondenza di un angolo φ ;
- $R_x(\varphi)$ e $R_z(\varphi)$ sono le componenti della forza $R(\varphi)$ rispettivamente nella direzione orizzontale e verticale;
- β indica l'inclinazione della forza $R(\varphi)$ e vale

$$\beta = \arccos \frac{R_x(\varphi)}{R(\varphi)}$$

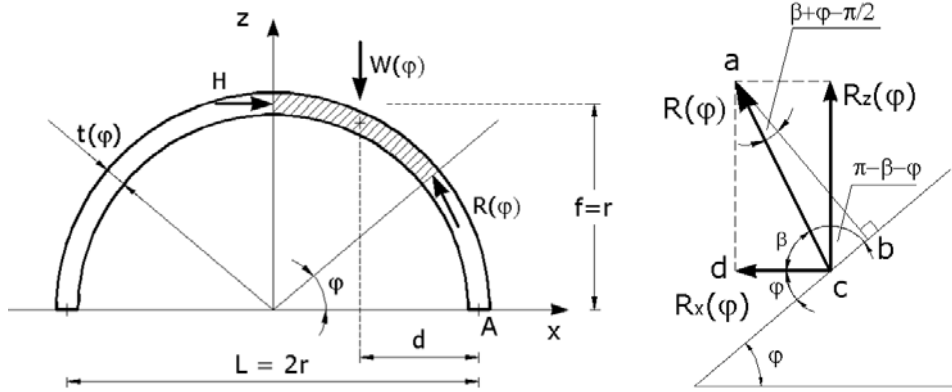


Figura 4.11. Schema geometrico e meccanico della volta a botte.

Dall'equilibrio alla rotazione attorno al punto A si ha:

$$H = \frac{W(0) \cdot d}{r}$$

essendo d la distanza tra la base della volta e la retta di applicazione della risultante del peso, che è data da:

$$d = \frac{1}{W(0)} \int_0^{\pi/2} \gamma \cdot t \cdot r \cdot x_r(\varphi) \cdot d\varphi$$

La funzione $x_r(\varphi)$ indica l'ascissa di un generico punto della volta rispetto al punto A (Figura 4.11) e risulta pari a

$$x_r(\varphi) = r \cdot (1 - \cos \varphi)$$

mentre $W(\varphi)$ vale

$$W(\varphi) = \gamma \cdot r \cdot t \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \Rightarrow W(0) = \gamma \cdot r \cdot t \cdot \frac{\pi}{2}$$

Sostituendo le quantità introdotte, e risolvendo l'integrale, la spinta in chiave risulta pari a

$$H = \gamma \cdot r \cdot t \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$$

L'equilibrio alla traslazione della parte di struttura sovrastante un taglio in corrispondenza dell'angolo φ assicura che:

$$\begin{cases} R_x(\varphi) = H \\ R_z(\varphi) = W(\varphi) \end{cases} \Rightarrow R(\varphi) = \sqrt{H^2 + [W(\varphi)]^2} = \gamma \cdot r \cdot t \cdot \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)^2}$$

Proiettando la forza $R(\varphi)$ nella direzione tangente alla curva generatrice si può ottenere la sollecitazione $N(\varphi)$ introdotta in figura 4.7, che può quindi essere espressa come segue

$$N(\varphi) = R(\varphi) \cdot \cos\left(\beta + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$N(\varphi) = \gamma \cdot r \cdot t \cdot \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^2} \cdot \cos\left[\arccos \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)^2}} + \varphi - \frac{\pi}{2}\right]$$

Analogamente al caso di cupola sferica, dividendo per lo spessore è possibile ottenere le tensioni normali corrispondenti.

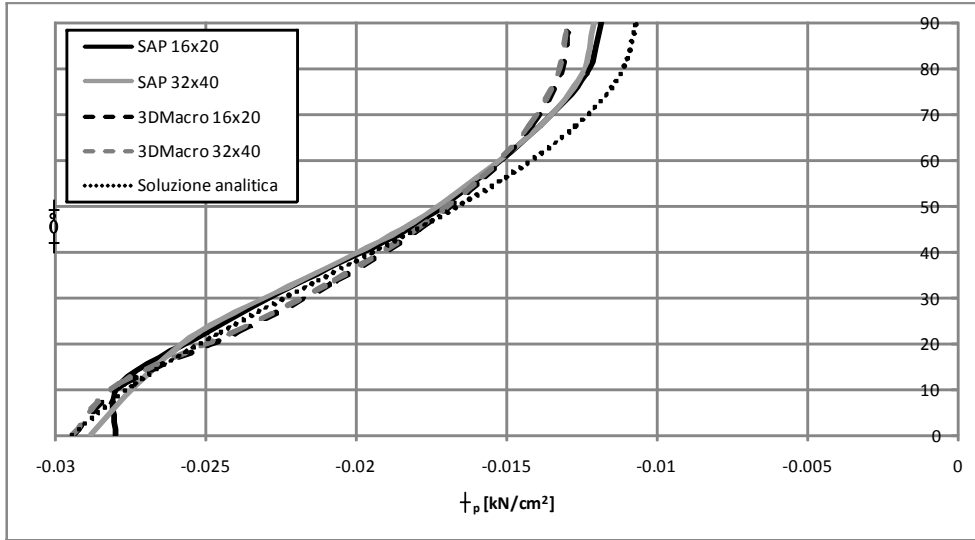


Figura 4.12. Tensioni normali lungo i meridiani

Tabella 5. Tensioni agenti lungo i meridiani in una volta a botte soggetta a peso proprio (in kN/cm²)

$\varphi [^\circ]$	σ_φ								
	Soluzione analitica	SAP 16x20	Δ [%]	SAP 32x40	Δ [%]	3DMacro 16x20	Δ [%]	3DMacro 32x40	Δ [%]
0	-0.0294	-0.0280	4.93	-0.0288	2.05	-0.0294	0.16	-0.0294	0.04
11.2	-0.0273	-0.0278	1.69	-0.0272	0.38	-0.0276	1.23	-0.0278	1.84
22.5	-0.0245	-0.0249	1.82	-0.0252	2.84	-0.0239	2.41	-0.0240	1.83
33.7	-0.0212	-0.0217	2.35	-0.0218	2.82	-0.0206	2.93	-0.0207	2.35
45	-0.0179	-0.0182	1.50	-0.0184	2.61	-0.0178	0.51	-0.0179	0.08
56.2	-0.0150	-0.0159	5.75	-0.0159	6.39	-0.0157	4.61	-0.0158	5.22
67.5	-0.0127	-0.0138	9.24	-0.0138	9.32	-0.0141	11.51	-0.0142	12.14
78.7	-0.0112	-0.0123	10.12	-0.0125	11.46	-0.0132	17.95	-0.0133	18.61
90	-0.0107	-0.0119	11.19	-0.0121	13.06	-0.0129	20.66	-0.0129	21.32

Si riportano infine, limitatamente ai modelli numerici, le tensioni all'estradosso e all'intradosso della volta.

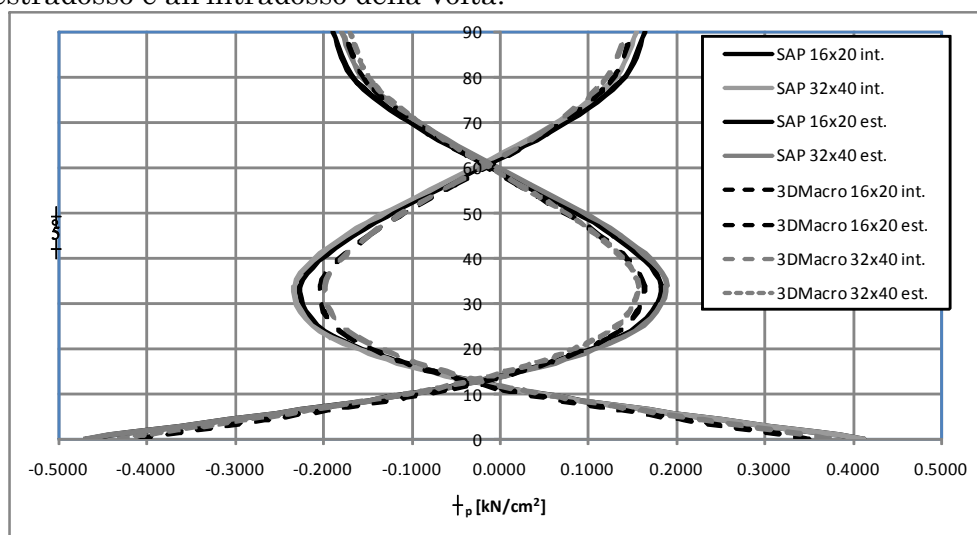


Figura 4.13. Tensioni all'intradosso e all'estradosso della volta

I risultati in termini di tensioni riportati nelle figure 4.12 e 4.13 mostrano come anche in termini di tensioni la soluzione ottenuta con la

macro-modellazione proposta fornisce risultati in ottimo accordo sia con la soluzione analitica che con il metodo degli elementi finiti.

Tabella 6. Tensioni agenti all'intradosso e all'estradosso di una volta a botte soggetta a peso proprio (in kN/cm²)

φ [°]	<i>Tensioni all'intradosso</i>				<i>Tensioni all'estradosso</i>			
	SAP 16x20	SAP 32x40	3DMacro 16x20	3DMacro 32x40	SAP 16x20	SAP 32x40	3DMacro 16x20	3DMacro 32x40
0	0.4115	0.4108	0.3496	0.3727	-0.4675	-0.4685	-0.4084	-0.4315
11.25	0.0074	0.0067	-0.0041	0.0126	-0.0630	-0.0612	-0.0513	-0.0683
22.5	-0.1867	-0.1916	-0.1720	-0.1611	0.1368	0.1412	0.1241	0.1129
33.75	-0.2258	-0.2324	-0.2038	-0.1981	0.1823	0.1887	0.1626	0.1566
45	-0.1647	-0.1731	-0.1480	-0.1467	0.1282	0.1362	0.1122	0.1108
56.25	-0.0573	-0.0663	-0.0500	-0.0523	0.0255	0.0343	0.0185	0.0207
67.5	0.0546	0.0450	0.0508	0.0458	-0.0824	-0.0728	-0.0792	-0.0743
78.75	0.1367	0.1263	0.1241	0.1175	-0.1614	-0.1513	-0.1505	-0.1441
90	0.1657	0.1558	0.1507	0.1435	-0.1895	-0.1800	-0.1765	-0.1695

1.3. Volta cilindrica parabolica

Geometria e caratteristiche dei materiali

La volta considerata è una superficie cilindrica con curva generatrice parabolica di luce L e freccia f . Con riferimento alla figura 4.14 l'equazione della parabola è esprimibile nella seguente forma:

$$z = f \left(1 - \frac{4x^2}{L^2} \right)$$

la derivata prima fornisce la tangente alla parabola

$$z' = -\frac{8f}{L^2} x^2$$

inoltre risulta

$$z' = -\tan \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)$$

dove φ è l'angolo che individua la normale alla superficie media della volta. Pertanto si ottiene

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{8f}{L^2} x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{L^2}{8f} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano con origine posta nell'asse di simmetria della prima curva generatrice all'altezza della base della parabola e asse y coincidente con la retta direttrice s , le coordinate della superficie media della volta, con riferimento alla figura, valgono:

$$x = \frac{L^2}{8f} \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

$$y = s$$

$$z = f \cdot \left[1 - \frac{L^2 \cdot \tan^2\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{16 \cdot f^2} \right]$$

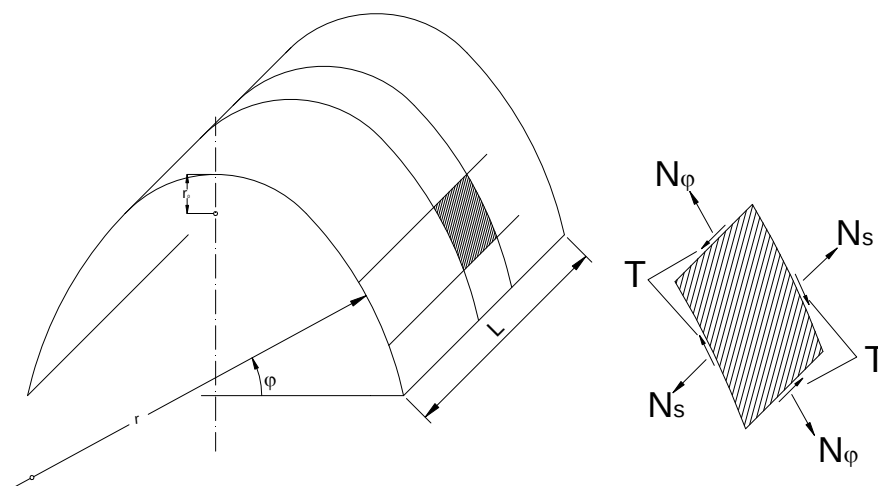


Figura 4.14. Schema geometrico cilindrica a direttrice parabolica

Si considerano i seguenti dati geometrici:

$$L = 2000 \text{ cm}$$

$$f = 300 \text{ cm}$$

$$t = 20 \text{ cm}$$

Caratteristiche dei materiali

$$E = 3350 \text{ kN/cm}^2$$

$$\nu = 0.2$$

$$\gamma = 25e-6 \text{ kN/cm}^3$$

Confronto analitico e numerico

Anche in questo caso sono stati predisposti modelli numerici con due diversi approcci: il primo è quello per macro-elementi proposto nel presente lavoro e implementato nel software *3DMacro*, l'altro è quello mediante elementi finiti piani (SHELL di SAP2000). I modelli sono considerati incastrati alla base e supposti soggetti al solo peso proprio. In questo caso è stata considerata un'unica mesh di 300 elementi, con 10 suddivisioni lungo la retta direttrice e 30 elementi per ciascuna di queste suddivisioni (Figura 4.15).

I risultati ottenuti dai modelli numerici verranno confrontati tra di loro, e limitatamente al confronto in termini di sforzi, con una soluzione analitica ottenuta da considerazioni di puro equilibrio.

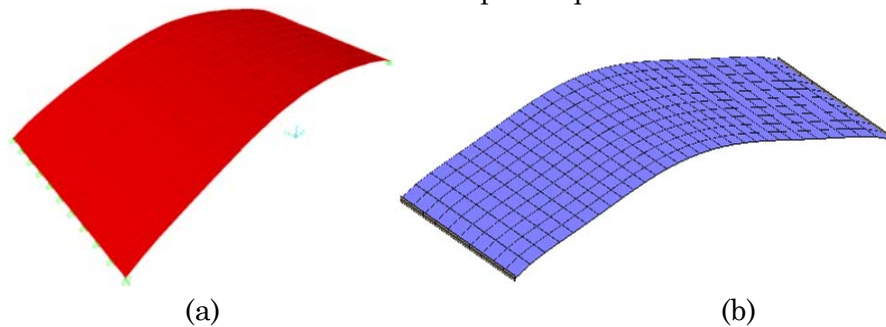


Figura 4.15. Modellazioni numeriche in configurazione deformata: (a) SAP2000; (b) 3DMacro

Di seguito si riporta il confronto tra i due approcci numerici in termini di spostamenti verticale e orizzontale al variare dell'angolo φ .

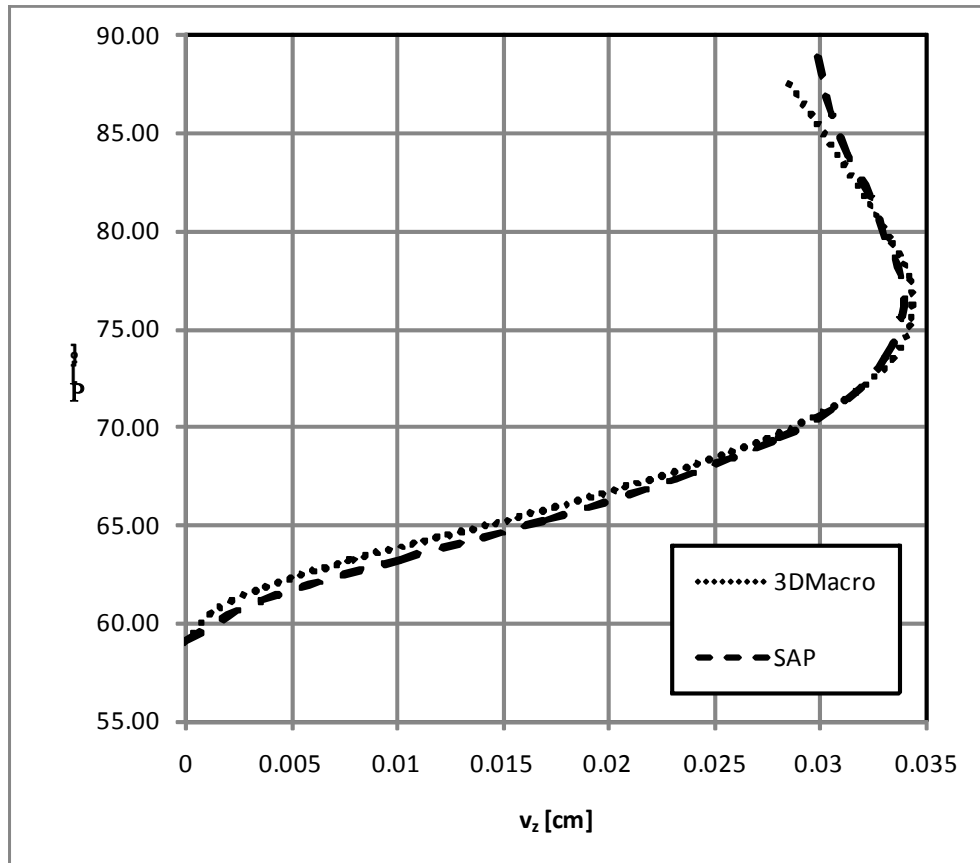


Figura 4.16. Spostamenti verticali

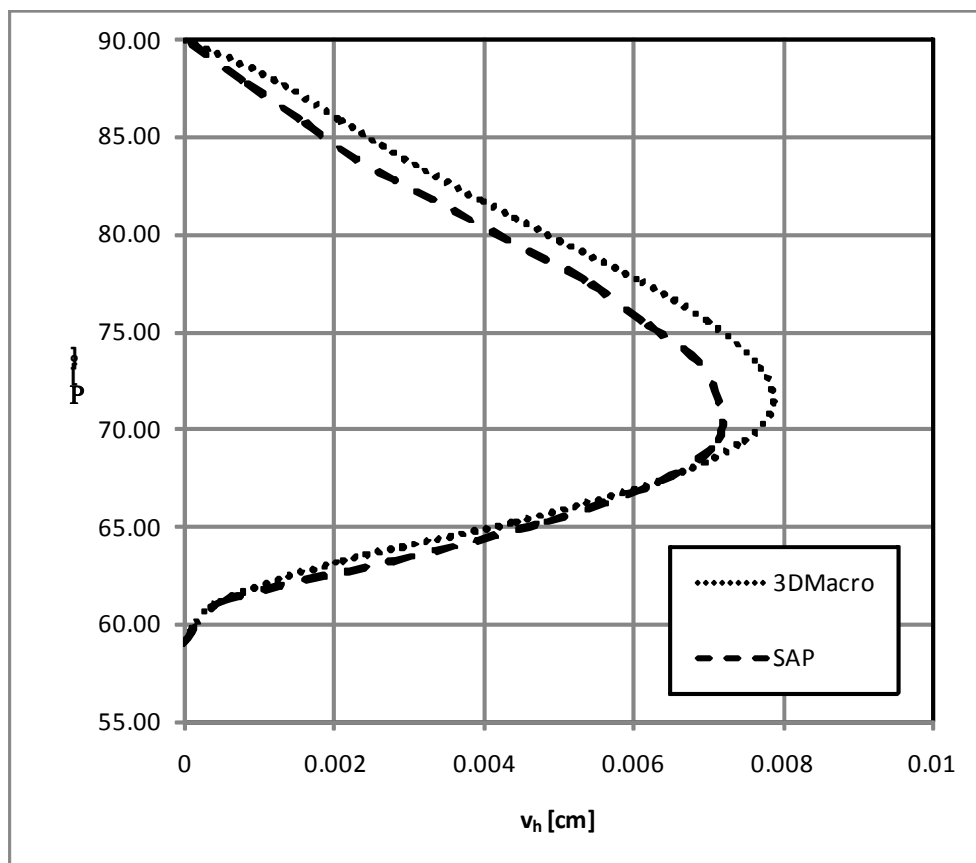


Figura 4.17. Spostamenti orizzontali

Dall'osservazione delle figure 4.16 e 4.17 che riportano il confronto della soluzione in termini di spostamenti si osserva un ottimo accordo tra la modellazione proposta ed il metodo degli elementi finiti.

Per la valutazione delle tensioni normali, i modelli numerici sono stati messi a confronto con la teoria classica degli archi.

Tabella 7. Spostamenti in una volta a botte soggetta a peso proprio (in cm)

$\varphi [^\circ]$	v_z		v_h	
	SAP	3DMacro	SAP	3DMacro
59.04	0	0	0	0
61.10	0.0035	0.0022	0.0005	0.0004
63.16	0.0101	0.0079	0.0028	0.0021
65.23	0.0170	0.0152	0.0048	0.0044
67.29	0.0231	0.0220	0.0063	0.0063
69.36	0.0280	0.0275	0.0071	0.0075
71.42	0.0313	0.0312	0.0071	0.0078
73.49	0.0331	0.0335	0.0068	0.0076
75.55	0.0338	0.0343	0.0061	0.0069
77.61	0.0338	0.0342	0.0053	0.0060
79.68	0.0331	0.0333	0.0043	0.0050
81.74	0.0323	0.0321	0.0033	0.0039
83.81	0.0313	0.0308	0.0022	0.0029
85.87	0.0305	0.0296	0.0015	0.0020
87.94	0.0300	0.0282	0.0007	0.0011
90.00	0.0298	-	0	0

Con riferimento alla figura sottostante si considerino le seguenti assunzioni:

- H è la spinta in chiave;
- $r_0 = \frac{L^2}{8 \cdot f}$ è il raggio di curvatura della parabola in corrispondenza del vertice;
- $r = \frac{r_0}{\sin^3 \varphi}$ è il raggio di curvatura della parabola in un generico punto individuato dall'angolo φ ;
- $W(\varphi)$ è il peso risultante della parte di volta compresa tra un taglio in corrispondenza di un angolo φ e la sezione di chiave;

- $R(\varphi)$ è l'intensità della forza scambiata nella sezione in corrispondenza dell'angolo φ ;
- $R_x(\varphi)$ e $R_z(\varphi)$ sono le componenti della forza $R(\varphi)$ rispettivamente nella direzione orizzontale e verticale;
- β indica l'inclinazione della forza $R(\varphi)$ e vale

$$\beta = \arccos \frac{R_x(\varphi)}{R(\varphi)}$$

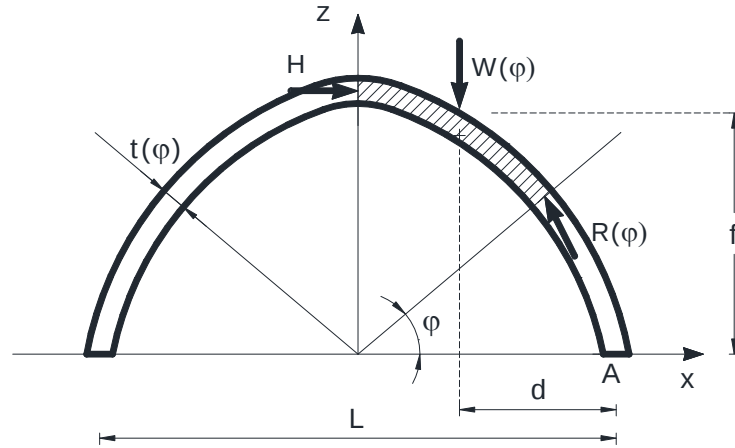


Figura 4.18. Schema geometrico di una volta cilindrica parabolica

Dall'equilibrio alla rotazione attorno alla base di mezza volta si ha:

$$H = \frac{W(\varphi_0) \cdot d}{f}$$

essendo d la distanza tra la base della volta e la retta di applicazione della risultante del peso, che è data da:

$$d = \frac{1}{W(\varphi_0)} \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \gamma \cdot t \cdot r(\varphi) \cdot x_r(\varphi) \cdot d\varphi$$

con

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{4f}{L}$$

La funzione $x_r(\varphi)$ indica l'ascissa di un generico punto della volta rispetto al punto A (Figura 4.17) e risulta pari a

$$x_r(\varphi) = \frac{L}{2} - x(\varphi) = \frac{L}{2} - \frac{L^2}{8 \cdot f} \cdot \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$$

mentre $W(\varphi)$ vale

$$W(\varphi) = \gamma \cdot r_0 \cdot \int_{\varphi}^{\pi/2} \frac{1}{\sin^3 \varphi} d\varphi = \gamma \cdot r_0 \cdot \left\{ \frac{\cos \varphi}{2 \cdot \sin^2 \varphi} - \frac{\ln\left[\tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]}{2} \right\}$$

Sostituendo le quantità introdotte, e risolvendo l'integrale, è possibile ottenere la spinta in chiave H . L'equilibrio della parte di struttura soprastante un taglio in corrispondenza dell'angolo φ assicura che:

$$\begin{cases} R_x(\varphi) = H \\ R_z(\varphi) = W(\varphi) \end{cases} \Rightarrow R(\varphi) = \sqrt{H^2 + [W(\varphi)]^2}$$

In definitiva risulta

$$R_x(\varphi) = H = \frac{W(\varphi_0) \cdot d}{f} = \frac{d}{f} \left\{ \frac{\cos \varphi_0}{2 \cdot \sin^2 \varphi_0} - \frac{\ln\left[\tan\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right]}{2} \right\}$$

Proiettando la forza $R(\varphi)$ nella direzione tangente alla curva generatrice si può ottenere la sollecitazione $N(\varphi)$ introdotta in figura 4.14, che può quindi essere espressa come segue

$$N(\varphi) = R(\varphi) \cdot \cos\left(\beta + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Analogamente ai casi precedenti, dividendo per lo spessore è possibile ottenere le tensioni normali corrispondenti.

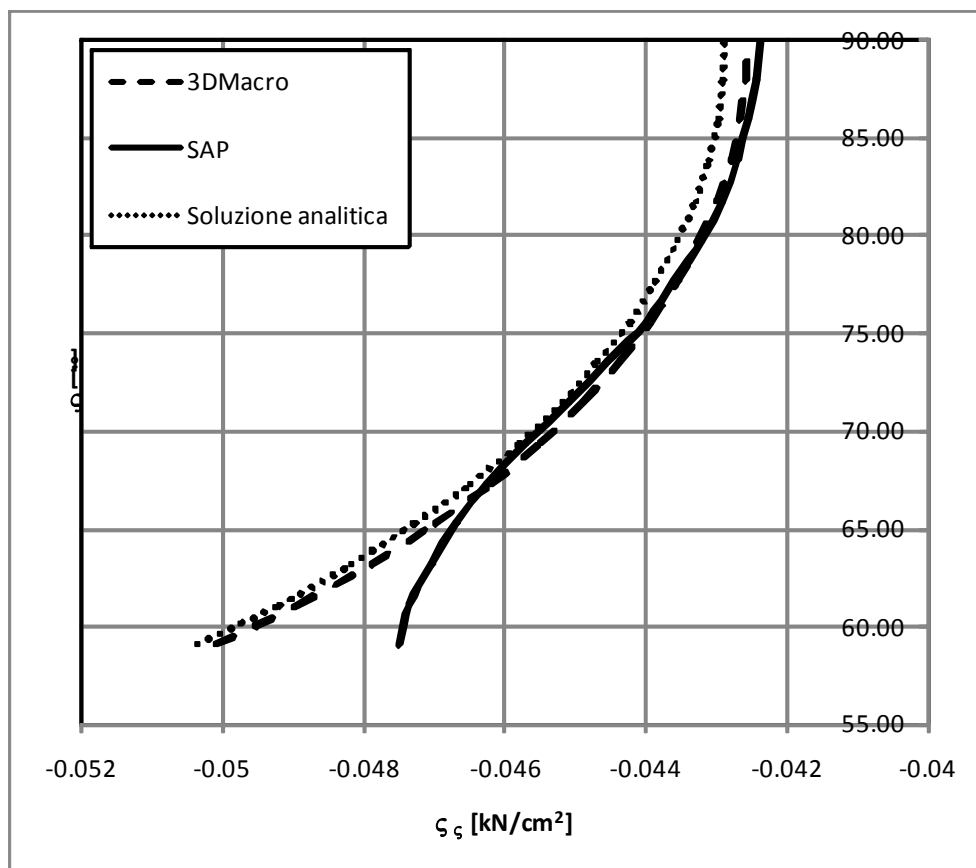


Figura 4.18. Tensioni normali lungo i meridiani

Si osservi come nel caso considerato la soluzione in termini di tensioni normali lungo i meridiani ottenuta con la modellazione proposta è più accurata della soluzione ottenuta con la modellazione adottata agli elementi finiti.

Tabella 8. Tensioni agenti lungo i meridiani in una volta a botte soggetta a peso proprio (in kN/cm²)

$\phi[^\circ]$	σ_ϕ				
	Soluzione analitica	SAP	Δ [%]	3DMacro	Δ [%]
59.04	-0.05036	-0.0475	5.68	-0.0501	0.53
61.10	-0.04919	-0.0473	3.75	-0.0489	0.55
63.16	-0.04817	-0.0470	2.32	-0.0478	0.57
65.23	-0.04726	-0.0467	1.19	-0.0469	0.59
67.29	-0.04647	-0.0462	0.48	-0.0461	0.61
69.36	-0.04578	-0.0457	0.19	-0.0455	0.63
71.42	-0.04519	-0.0451	0.19	-0.0448	0.65
73.49	-0.04467	-0.0445	0.27	-0.0443	0.66
75.55	-0.04423	-0.0440	0.51	-0.0439	0.67
77.61	-0.04386	-0.0436	0.58	-0.0435	0.69
79.68	-0.04355	-0.0432	0.80	-0.0432	0.70
81.74	-0.0433	-0.0429	0.93	-0.0430	0.70
83.81	-0.04311	-0.0427	0.96	-0.0428	0.71
85.87	-0.04298	-0.0425	1.00	-0.0426	0.71
87.94	-0.0429	-0.0424	1.05	-0.0425	0.72
90.00	-0.04288	-0.0424	1.11	-0.0425	0.72

Si riportano infine, limitatamente ai modelli numerici, le tensioni all'estradosso e all'intradosso della volta. Si osserva un ottimo accordo tra le soluzioni ottenute secondo i due diversi approcci.

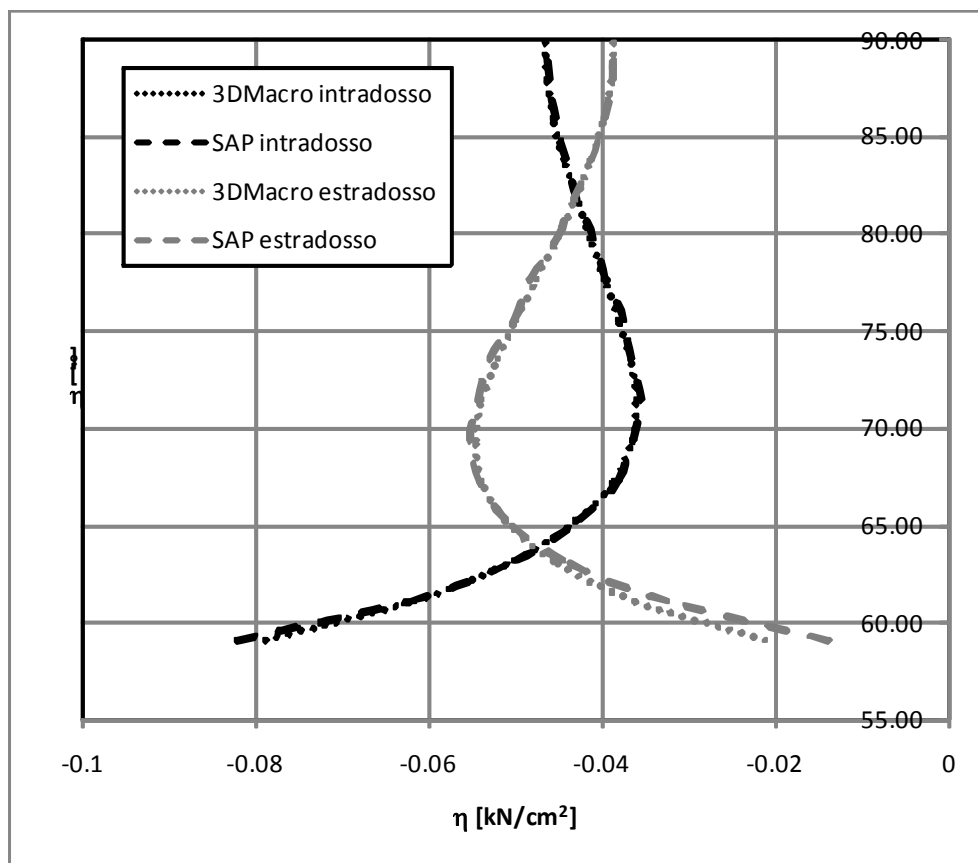


Figura 4.19. Tensioni all'intradosso e all'estradosso della volta

Tabella 9. Tensioni agenti all'intradosso e all'estradosso di una volta cilindrica parabolica soggetta a peso proprio (in kN/cm²)

$\phi[^\circ]$	Tensioni all'intradosso		Tensioni all'estradosso	
	SAP	3DMacro	SAP	3DMacro
59.04	-0.0821	-0.07887	-0.014	-0.02121
61.10	-0.062	-0.06166	-0.0325	-0.03613
63.16	-0.0499	-0.05008	-0.0444	-0.04569
65.23	-0.0425	-0.04272	-0.0511	-0.05127
67.29	-0.0381	-0.03846	-0.0541	-0.05395

69.36	-0.0365	-0.03646	-0.0553	-0.05457
71.42	-0.0355	-0.03605	-0.0542	-0.05378
73.49	-0.0366	-0.03671	-0.053	-0.05208
75.55	-0.0374	-0.03802	-0.0502	-0.04987
77.61	-0.0395	-0.03968	-0.0481	-0.04745
79.68	-0.0409	-0.04143	-0.0452	-0.04507
81.74	-0.0429	-0.0429	-0.0433	-0.0431
83.81	-0.0441	-0.04452	-0.0411	-0.04108
85.87	-0.0455	-0.04561	-0.0398	-0.03972
87.94	-0.0461	-0.04629	-0.0388	-0.03888
90.00	-0.0466	-0.04652	-0.0385	-0.03859

1.4. Volta a botte a spessore variabile

Geometria e caratteristiche dei materiali

Si consideri infine una volta a botte a spessore variabile. Si consideri allora la superficie cilindrica con curva generatrice semi-circolare di raggio R e lunghezza L con lo spessore $t(\varphi)$ variabile. Le coordinate della superficie media e il sistema di riferimento vengano scelti coerentemente con quanto esposto per la volta a botte a spessore costante.

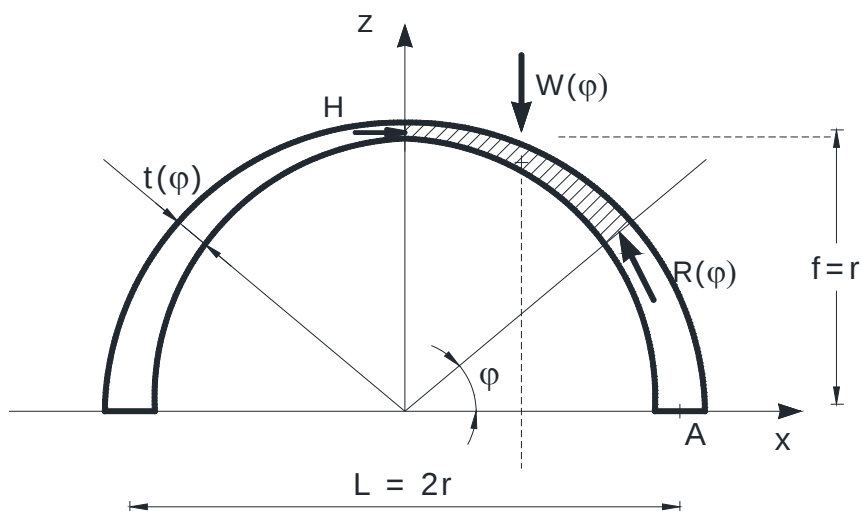


Figura 4.20. Schema geometrico di una volta a botte a spessore variabile

Si considerano i seguenti dati geometrici:

$$R = 750 \text{ cm}$$

$$L = 1000 \text{ cm}$$

$$t_0 = 40 \text{ cm}$$

$$t_C = 10 \text{ cm}$$

Lo spessore della superficie vari con legge lineare rispetto all'angolo φ , in accordo con la seguente legge analitica

$$t(\varphi) = t_0 + \frac{t_C - t_0}{\pi/2}$$

Caratteristiche dei materiali

$$E = 3350 \text{ kN/cm}^2$$

$$\nu = 0.2$$

$$\gamma = 25e-6 \text{ kN/cm}^3$$

Confronto analitico e numerico

Sono stati predisposti due modelli numerici con mesh differenti con l'approccio per macro-elementi proposto e implementato nel software *3DMacro*. I modelli sono considerati incastrati alla base e supposti soggetti al solo peso proprio. In questo caso non è stato possibile effettuare il confronto col software *SAP2000* poiché questo supporta solo elementi piani a spessore costante, e non consente una modellazione agevole e accurata di strutture piane a spessore variabile.

La prima mesh, più rada, prevede una suddivisione della volta a botte in 320 elementi, con 20 suddivisioni lungo la retta direttrice e 16 per ciascuna di queste suddivisioni (il modello che fa uso di questa mesh verrà indicato come '16x20'); la seconda, più fitta, prevede 32 elementi per ciascuna delle 40 suddivisioni lungo la retta direttrice, per un totale di 1280 elementi (tale modello verrà indicato come '32x40').

I risultati ottenuti dai modelli numerici verranno confrontati tra di loro, e limitatamente al confronto in termini di sforzi, con una soluzione analitica ottenuta esclusivamente da considerazioni di equilibrio.

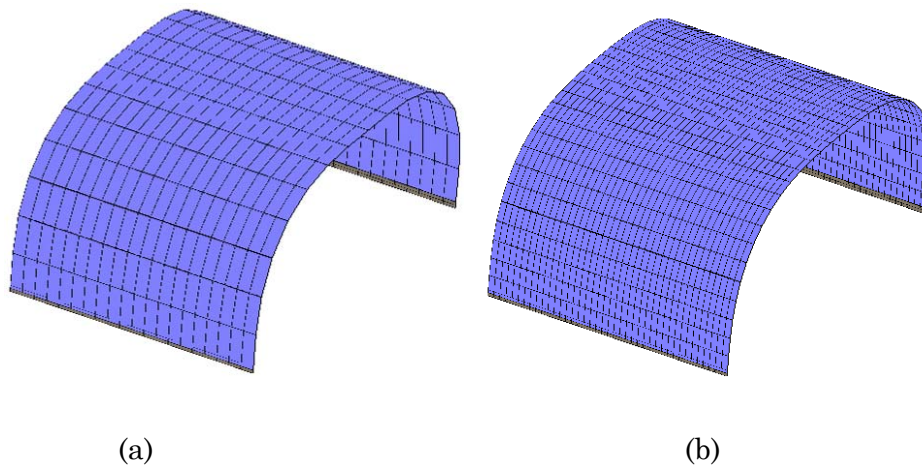


Figura 4.21. Modellazioni numeriche mediante 3DMacro in configurazione deformata: (a) modello 16×20 ; (b) modello 32×40

Di seguito si riporta il confronto tra i due approcci numerici in termini di spostamenti verticale e orizzontale al variare del complementare φ dell'angolo azimutale.

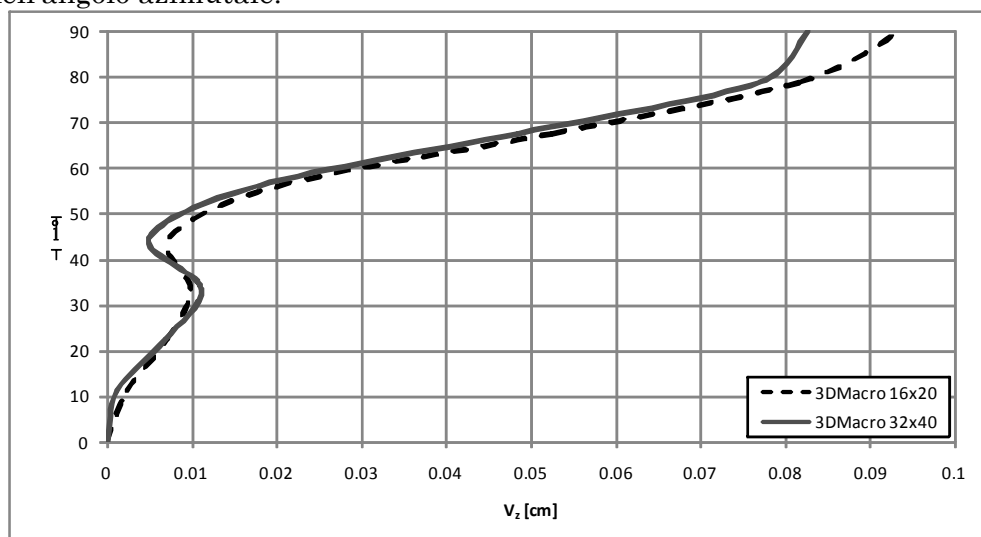


Figura 4.22. Spostamenti verticali

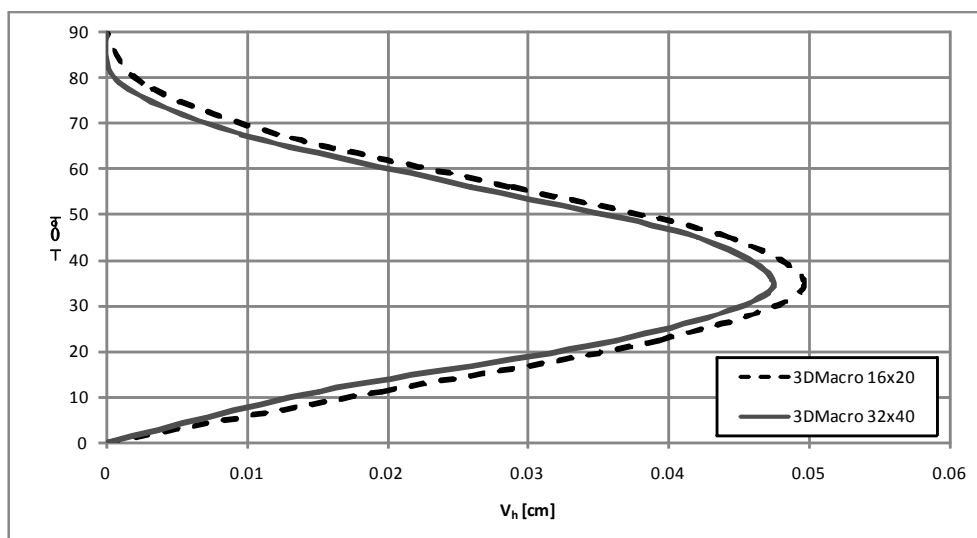


Figura 4.23. Spostamenti orizzontali

Tabella 10. Spostamenti in una volta a botte soggetta a peso proprio (in cm)

$\phi [^\circ]$	v_z		v_h	
	3DMacro 16x20	3DMacro 32x40	3DMacro 16x20	3DMacro 32x40
0	0	0	0	0
11.25	0.0024	0.0013	0.0197	0.0152
22.5	0.0072	0.0069	0.0394	0.0364
33.75	0.0100	0.0112	0.0496	0.0474
45	0.0075	0.0051	0.0444	0.0421
56.25	0.0202	0.0178	0.0287	0.026
67.5	0.0525	0.0485	0.0122	0.0096
78.75	0.0818	0.0770	0.0026	0.001
90	0.0937	0.0828	0	0

Per la valutazione delle tensioni normali, i modelli numerici sono stati messi a confronto con la teoria classica degli archi.

Con riferimento allo stesso schema considerato per la volta a botte a spessore costante (Figura 4.11) si considerino le seguenti assunzioni:

- H è la spinta in chiave;
- $W(\varphi)$ è il peso risultante della parte di volta compresa tra un taglio in corrispondenza di un angolo φ e la sezione di chiave;
- $t(\varphi)$ è lo spessore della volta in corrispondenza di un angolo φ ;
- $R(\varphi)$ è l'intensità della forza scambiata nella sezione in corrispondenza di un angolo φ ;
- $R_x(\varphi)$ e $R_z(\varphi)$ sono le componenti della forza $R(\varphi)$ rispettivamente nella direzione orizzontale e verticale;
- β indica l'inclinazione della forza $R(\varphi)$ e vale

$$\beta = \arccos \frac{R_x(\varphi)}{R(\varphi)}$$

Dall'equilibrio alla rotazione attorno alla base di mezza volta si ha:

$$H = \frac{W(0) \cdot d}{r}$$

essendo d la distanza tra la base della volta e la retta di applicazione della risultante del peso, che è data da:

$$d = \frac{1}{W(0)} \int_0^{\pi/2} \gamma \cdot t(\varphi) \cdot R \cdot x_r(\varphi) \cdot d\varphi$$

La funzione $x_r(\varphi)$ indica l'ascissa di un generico punto della volta rispetto al punto A e risulta pari a

$$x_r(\varphi) = r \cdot (1 - \cos \varphi)$$

mentre $W(\varphi)$ vale

$$W(\varphi) = \int_{\varphi}^{\pi/2} \gamma \cdot R \cdot t(\varphi) \cdot d\varphi = \gamma \cdot R \cdot \left[t_0 \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + \frac{t_c - t_0}{\pi/2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi^2}{4} - \varphi^2 \right) \right]$$

Sostituendo le quantità introdotte, e risolvendo l'integrale, la spinta in chiave risulta pari a:

$$H = \gamma \cdot R \cdot \left(t_0 \cdot \frac{\pi^2 - 8}{4 \cdot \pi} + t_c \cdot \frac{\pi^2 - 4 \cdot \pi + 8}{4 \cdot \pi} \right)$$

L'equilibrio della parte di struttura soprastante un taglio in corrispondenza dell'angolo φ assicura che:

$$\begin{cases} R_x(\varphi) = H \\ R_z(\varphi) = W(\varphi) \end{cases} \Rightarrow R(\varphi) = \sqrt{H^2 + [W(\varphi)]^2}$$

Proiettando la forza $R(\varphi)$ nella direzione tangente alla curva generatrice si può ottenere la sollecitazione $N(\varphi)$ introdotta in figura 4.20, che può quindi essere espressa come segue

$$N(\varphi) = R(\varphi) \cdot \cos\left(\beta + \varphi - \frac{\pi}{2}\right)$$

Analogamente ai casi visti in precedenza, dividendo per lo spessore è possibile ottenere le tensioni normali corrispondenti.

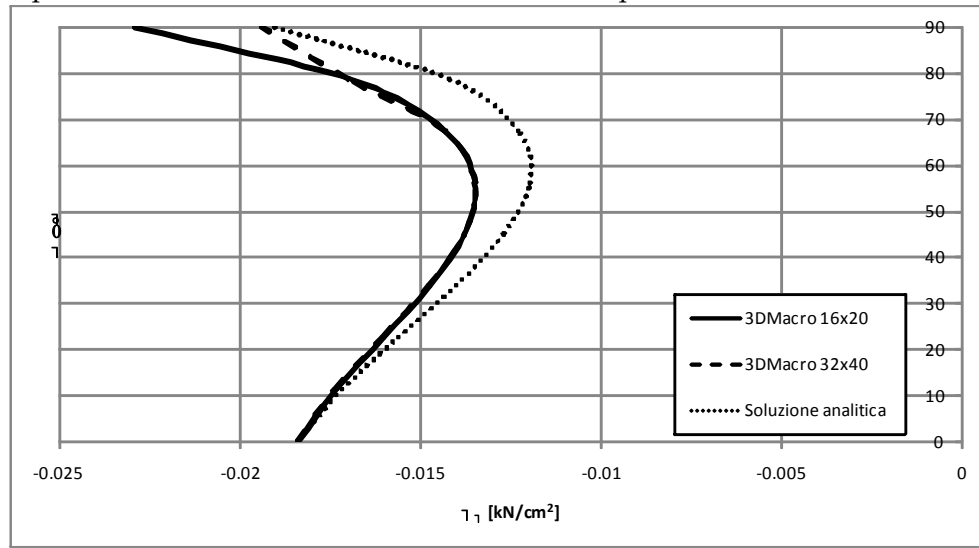


Figura 4.24. Tensioni normali lungo i meridiani

Tabella 11. Tensioni agenti lungo i meridiani in una volta a botte soggetta a peso proprio (in kN/cm²)

$\varphi[^\circ]$	σ_φ				
	Soluzione analitica	3DMacro 16x20	Δ [%]	3DMacro 32x40	Δ [%]
0	-0.01841	-0.01838	0.15	-0.01840	0.04
11.25	-0.01715	-0.01733	1.05	-0.01735	1.16
22.5	-0.01559	-0.01602	2.76	-0.01604	2.89
33.75	-0.01400	-0.01473	5.21	-0.01475	5.36
45	-0.01268	-0.01377	8.57	-0.01378	8.65
56.25	-0.01197	-0.01348	12.58	-0.01349	12.66
67.5	-0.01228	-0.01432	16.59	-0.01434	16.75
78.75	-0.01422	-0.01698	19.38	-0.01700	19.52
90	-0.01907	-0.02294	20.29	-0.01941	1.78

Quest'esempio si ritiene particolarmente significativo in quanto mostra come con il modello proposto si possano rappresentare agevolmente anche strutture a geometria curva e a spessore variabile.

2. Validazione della modellazione proposta in campo non lineare

Il modello proposto, è stato validato in campo statico in regime elastico lineare con riferimento ad alcuni casi significativi attraverso il confronto con soluzioni analitiche e soluzioni numeriche ottenute mediante il metodo degli elementi finiti. Nel presente paragrafo ci si propone di effettuare alcuni confronti anche in ambito non lineare facendo uso di risultati sperimentali e numerici già disponibili nella letteratura o derivanti dall'applicazione del metodo degli elementi finiti in ambito nonlineare.

In particolare sono stati considerati alcuni esempi di volte semplici e composte. In particolare i casi di studio considerati riportano il confronto tra:

- *prove sperimentali;*
- *metodo agli elementi finiti non lineari;*

- *analisi limite.*

Nonostante l'esigua entità dei risultati disponibili in letteratura, i casi oggetti di studio appaiono rappresentativi di diverse tipologie strutturali e condizioni di carico. In particolare sono stati analizzati:

- *una cupola sferica simmetricamente caricata;*
- *una volta a crociera caricata asimmetricamente.*

In entrambi i casi sono considerate analisi statiche incrementali.

2.1. Cupola sferica

Il caso di studio considerato è relativo ad una prova sperimentale eseguita su una cupola semisferica nel 2006. I risultati di questa sperimentazione sono stati pubblicati da Foraboschi (2006) e successivamente sono stati oggetto di ulteriori studi. In particolare Creazza et al. (2002) hanno condotto alcune simulazioni numeriche agli elementi finiti non lineari considerando analisi incrementali associate a due diverse ipotesi costitutive, Milani et al. (2008) hanno effettuato analisi numeriche basate su approccio di analisi limite. Entrambi gli approcci sono stati dettagliatamente descritti nel capitolo 1.

Lo schema geometrico della cupola oggetto di indagini è riportato in figura 4.25, consiste in una cupola semisferica, con raggio interno pari a 2.2 m e spessore pari a 12 cm, mentre il diametro del foro è di circa 40 cm. La simulazione prevede l'applicazione di una forza verticale crescente distribuita su un'area limitata, in posizione centrata.

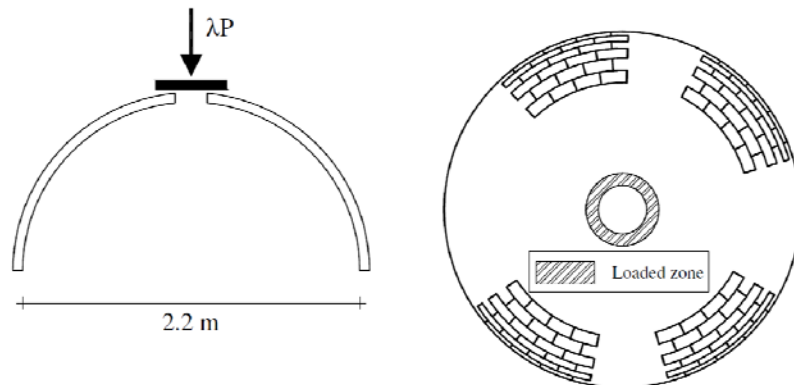


Figura 4.25. Schema geometrico della prova sperimentale simulata (da Milani et al., 2008)

I confronti sono stati eseguiti in termini di spostamenti verticali in corrispondenza del perimetro del foro, con riferimento a:

- *Simulazione numerica condotta da Creazza et al.*
- *Simulazione numerica condotta da Milani et al.*
- *Simulazione numerica condotta con l'approccio proposto.*

Per potere effettuare simulazioni numeriche sulla base dell'approccio per macro-elementi sviluppato nella presente tesi occorre stabilire le proprietà dei materiali in relazione ai risultati sperimentali sugli stessi ed inoltre occorre stabilire il livello di discretizzazione che si vuole adottare sia in termini di risoluzione della mesh e di rappresentazione per fibre del comportamento flesso-membranale, governato dai link ortogonali d'interfaccia.

Nel predisporre il modello numerico è stata considerato che la tessitura muraria consiste in una disposizione di filari secondo cerchi sempre più piccoli quanto più si avvicinano alla zona sommitale della cupola. Nel tener conto di questa circostanza, la mesh è stata predisposta considerando una griglia secondo i meridiani e i paralleli della superficie sferica rappresentativa dell'andamento della struttura. In totale il modello numerico è composto di 640 elementi (disposti con 32 elementi per ciascuno dei 20 paralleli) per un totale di 4480 gradi di libertà (Figura 4.26).

I links ortogonali d'interfaccia sono stati disposti in modo tale da garantire un interasse massimo di 5 cm sia nella direzione longitudinale che trasversale dell'interfaccia.

Le caratteristiche dei materiali (omogeneizzati), che sono stati adottati nella simulazione della prova sono riportati nella tabella seguente.

Tabella 12. Parametri meccanici utilizzati per la modellazione della cupola semi-sferica

w	1800 kg/m ³
Proprietà meccaniche del materiale	
E	140 kN/cm ²
G	56 kN/cm ²
σ_c	0.18 kN/cm ²
σ_t	0.01 kN/cm ²
$\varepsilon_u / \varepsilon_y$	10
γ_u	0.4 %
Comportamento a scorrimento	
c	0.003 kN/cm ²
$\tan \phi$	0.1

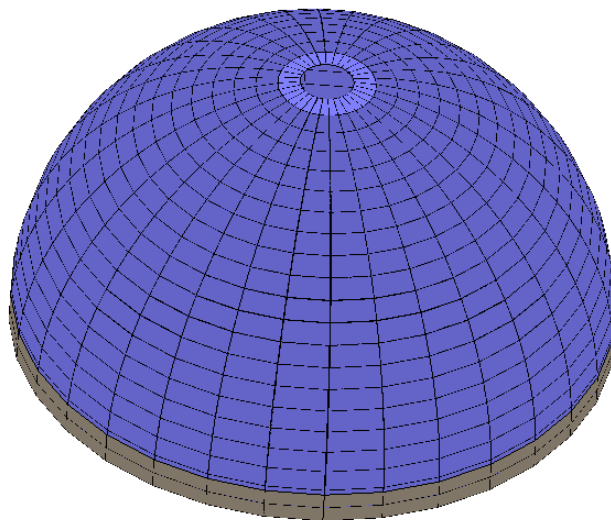


Figura 4.26. Modello numerico della cupola semi-sferica sviluppato in *3DMacro*

- Confronti tra i diversi approcci ed i risultati sperimentali.

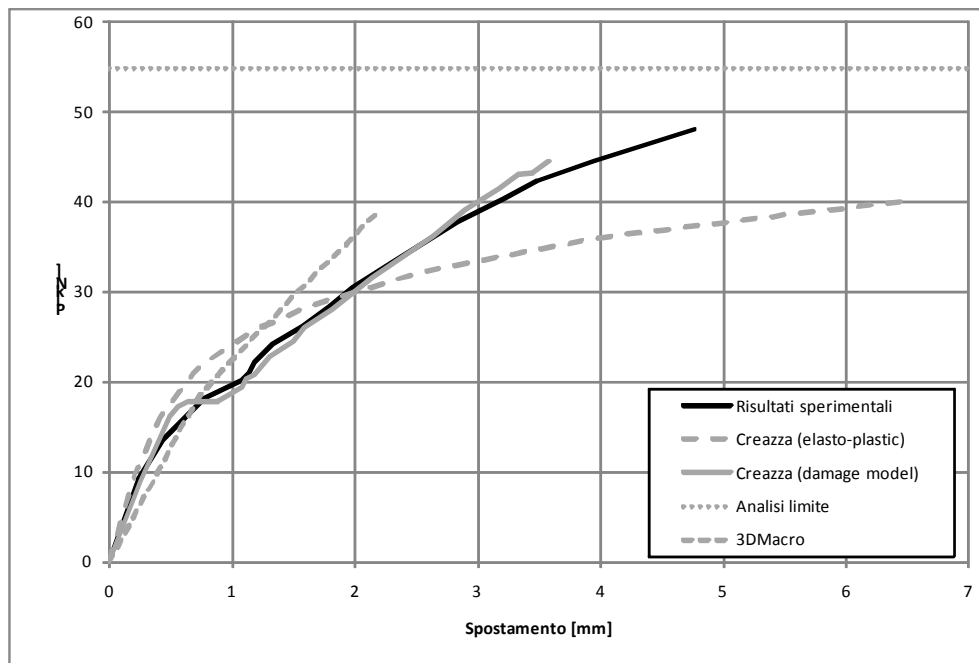


Figura 4.27. Confronto in termini di curve carico-spostamento

Le immagini successive mostrano il confronto tra i meccanismi di collasso ottenuti mediante il modello proposto (figura 4.28), e quelli ottenuti con i modelli proposti in letteratura (figura 4.29). Il meccanismo di collasso si manifesta con il cedimento della parte sommitale della cupola con un meccanismo combinato flessionale e a scorrimento.

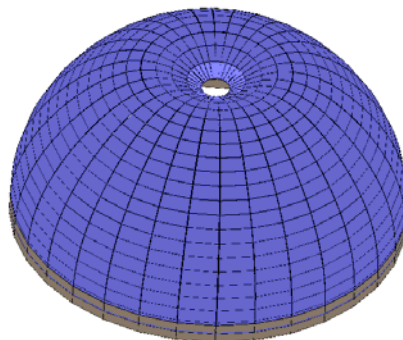


Figura 4.28. Confronto in termini di meccanismi di collasso: *3DMacro*

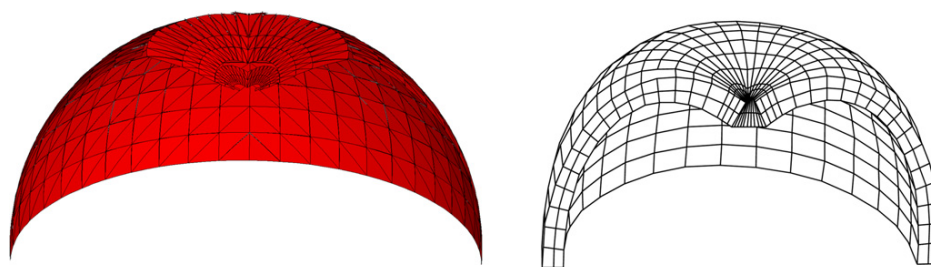


Figura 4.29. Confronto in termini di meccanismi di collasso: analisi limite (Milani et al., 2008) e modello con danneggiamento (Creazza et al., 2002)

Dal confronto dei meccanismi di collasso risulta buono l'accordo con gli altri modelli considerati.

2.2. Volta a crociera

Il caso di studio considerato è relativo ad una prova sperimentale eseguita su una volta a crociera nel 1999. I risultati di questa sperimentazione sono stati pubblicati da Faccio e Foraboschi (2000) e sono successivamente stati oggetto di ulteriori studi. In particolare sono stati riprodotti utilizzando il metodo degli elementi finiti non lineari da Creazza et al. (2002) e, più recentemente, utilizzando un approccio originale di analisi limite da Milani et al. (2008).

Lo schema della prova è quello riportato in figura 4.30 e prevede l'applicazione di una forza verticale distribuita su un'area limitata, in posizione non centrata. La volta è rinforzata mediante due archi diagonali e i quattro archi perimetrali in corrispondenza delle unghie.

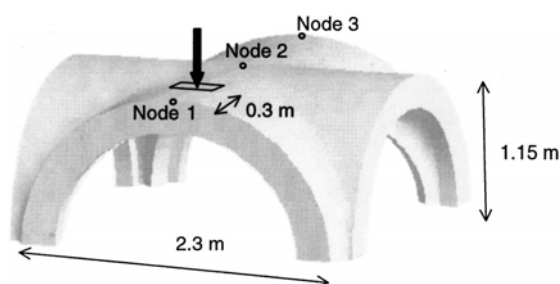


Figura 4.30. Schema geometrico della prova sperimentale simulata (Creazza et al., 2002)

Sono stati monitorati gli spostamenti verticali di tre punti significativi della volta, come mostrato in figura 4.31.

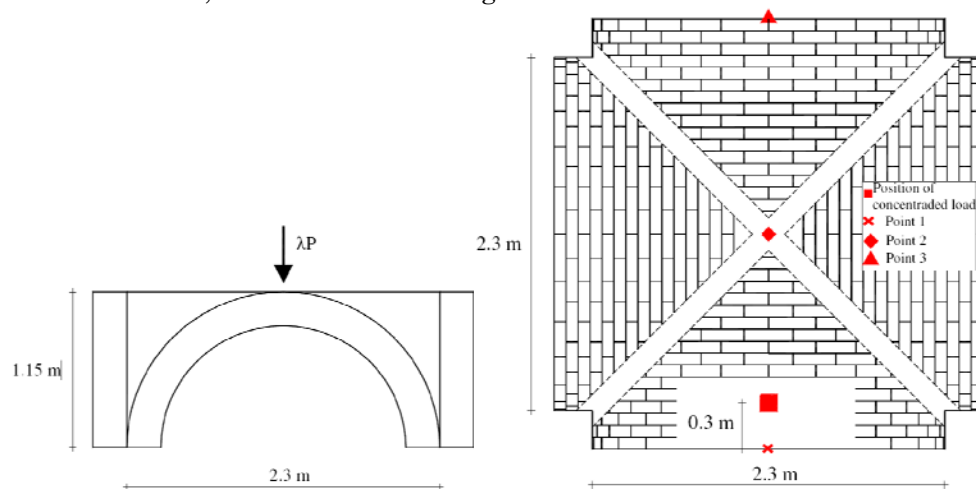


Figura 4.31. Punti di controllo (Milani et al., 2008)

In figura 4.32 è infine riportata un'immagine della volta strumentata, in cui sono evidenti anche le nervature della volta.

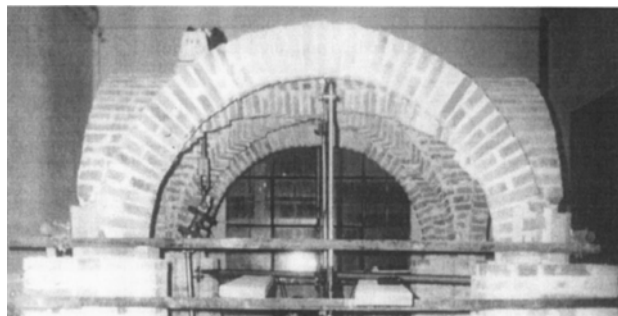


Figura 4.32. Prova sperimentale: strumentazione (Faccio e Foraboschi, 2000)

Le caratteristiche dei materiali (omogeneizzati), che sono stati adottati nella simulazione della prova sono riportati nella tabella seguente.

Tabella 13. Parametri meccanici utilizzati per la modellazione della volta a crociera

w	15 kN/m ³
Proprietà meccaniche del materiale	
E	120 kN/cm ²
G	48 kN/cm ²
σ_c	0.23 kN/cm ²
σ_t	0.005 kN/cm ²
$\varepsilon_u / \varepsilon_y$	2.4
γ_u	0.4 %
Scorrimento	
c	0.006 kN/cm ²
$\tan \phi$	0.45

Il modello messo a punto nell'ambito di questa validazione (Figura 4.33) tiene conto di tutti gli aspetti che sono stati citati. In particolare è stata posta attenzione alla presenza delle nervature, e all'ampiezza dell'impronta del carico. Tali dettagli sono apparsi decisivi nella simulazione del corretto comportamento riscontrato sperimentalmente. Si è inoltre reso necessario l'impiego di una mesh piuttosto fitta dettata anche dalla necessità di modellare gli archi di rinforzo. In particolare il modello è caratterizzato da 433 elementi quadrangolari e 64 triangolari, cui corrisponde un numero complessivo di gradi di libertà pari a 3415.

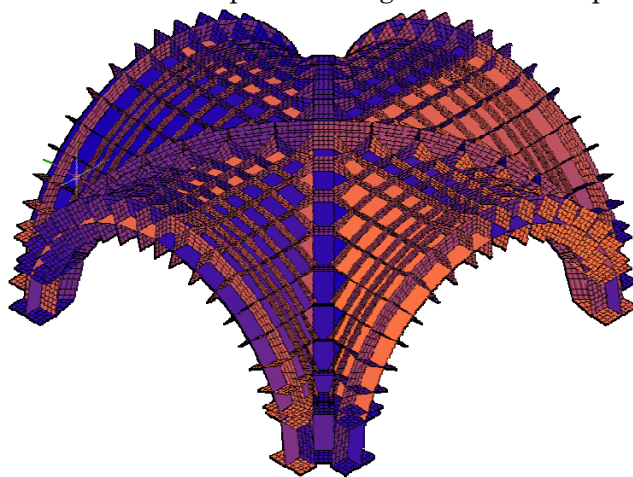


Figura 4.33 – Modello numerico della volta a crociera sviluppato in *3DMacro* con evidenziata la discretizzazione in fibre adottata.

Il confronto tra la modellazione proposta e i risultati disponibili, come evidenziato dalla figura 4.34, appare ottimo sia in termini di forza ultima, che di storia della risposta, per ciascuno dei tre punti di controllo considerati.

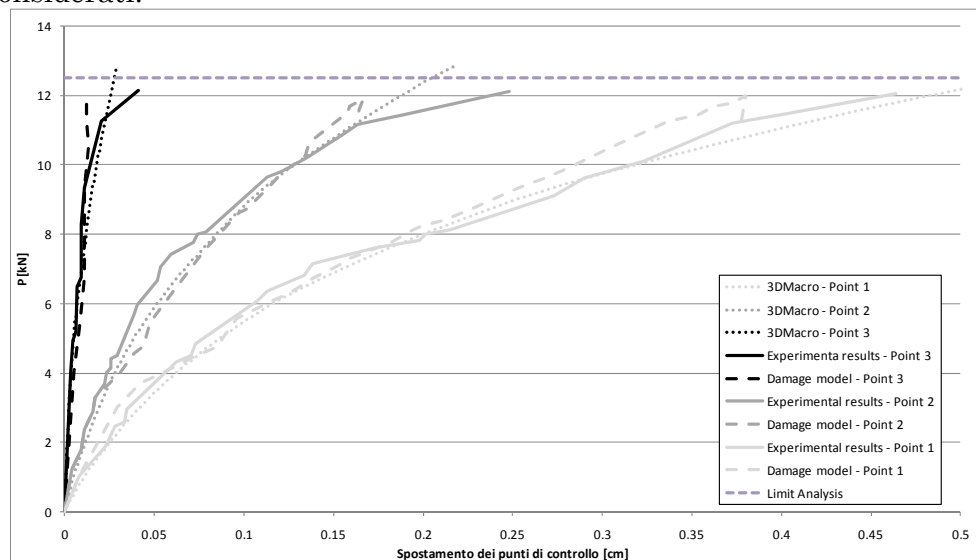


Figura 4.34. Confronto in termini di curve carico-spostamento

Le immagini successive mostrano il confronto tra i meccanismi di collasso ottenuti mediante il modello proposto (Figura 4.35a), e quelli ottenuti con i modelli proposti in letteratura (figura 4.35b e c). Il meccanismo di collasso ottenuto mostra l'apertura di una fessura lungo la direttrice che congiunge il punto di applicazione del carico con il concio di chiave della volta. È inoltre evidente come l'unghia opposta a quella in cui è applicato il carico risenta solo in maniera lieve del carico stesso.

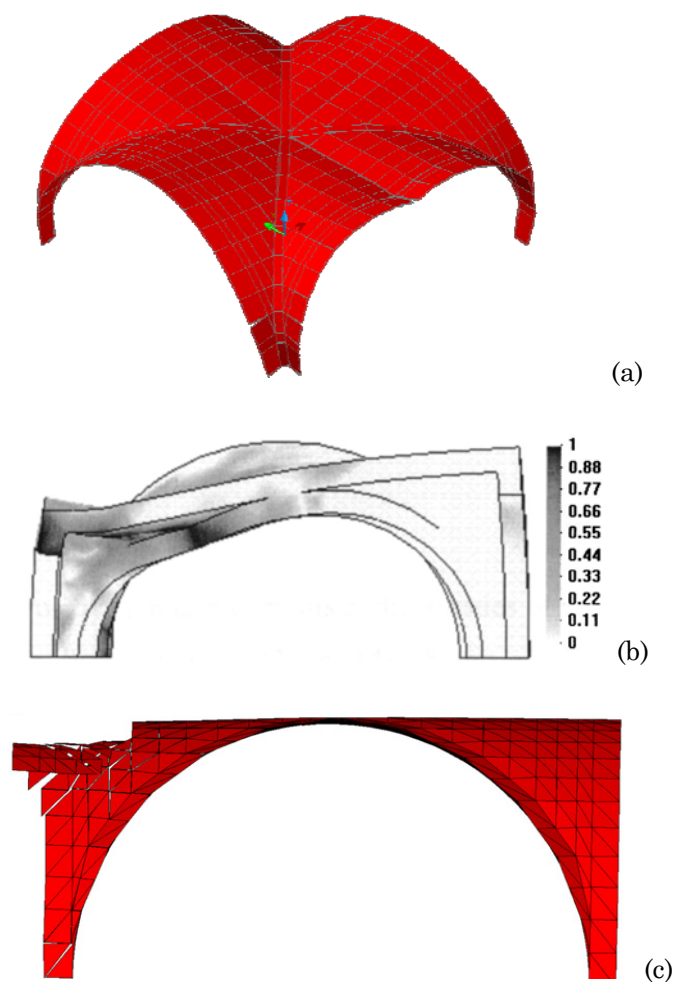


Figura 4.35. Confronto in termini di meccanismi di collasso: (a) 3DMacro; (b) metodo agli elementi finiti non lineari Creazza et al.; (c) analisi limite Milani et al.

Dal confronto dei meccanismi di collasso si rileva un buon accordo con quello ottenuto utilizzando il metodo degli elementi finiti non lineari, mentre differenze significative si riscontrano con il meccanismo di collasso ottenuto con l'approccio basato sull'analisi limite.

3. Applicazione dell'approccio proposto allo studio di una volta crollata a seguito dell'evento sismico Aquilano del 6 Aprile 2009

A seguito del rovinoso evento sismico occorso nell'aquilano il 6 aprile 2009, alle perdite di vite umane si sono aggiunti gravissimi danni a tutto il patrimonio storico-architettonico della città. Sono stati soprattutto palazzi storici e chiese a subire i maggiori danni, in alcuni casi irreversibili.

Molte università hanno fornito un contributo alle attività di emergenza nella forma di studi su edifici storici significati. In particolare, l'unità di ricerca di Catania si è occupata dell'edificio denominato Palazzo Gualtieri (Figura 4.36). In Calì et al. (2010) sono stati analizzati i danni subiti dall'edificio anche allo scopo di giustificarne il danneggiamento subito attraverso l'uso di modelli numerici di previsione che possano risultare utili in termini di valutazione del rischio sismico del patrimonio storico-monumentale.



Figura 4.36. Prospetto settentrionale

I danni più significativi si sono verificati in corrispondenza dei due saloni posti al primo livello dell'edificio e sormontati da volte a schifo con la parte centrale affrescata. Entrambe le volte hanno subito gravi danneggiamenti, ma una in particolare ha subito il crollo totale della parte centrale affrescata, come si evince dalle fotografie riportate in figura 4.37, e dal rilievo del quadro fessurativo di figura 4.38. Allo scopo di giustificare attraverso simulazioni numeriche il danneggiamento ri-

levato sono state realizzate col modello proposto delle simulazioni numeriche relative all'intero vano, considerando i muri perimetrali e la volta a schifo sovrastante (Figura 4.39).



Figura 4.37. Immagini della volta parzialmente crollata

In particolare sono state condotte analisi statiche non lineari considerando due diverse direzioni di carico, una verticale ed una orizzontale, entrambe proporzionali alla massa.

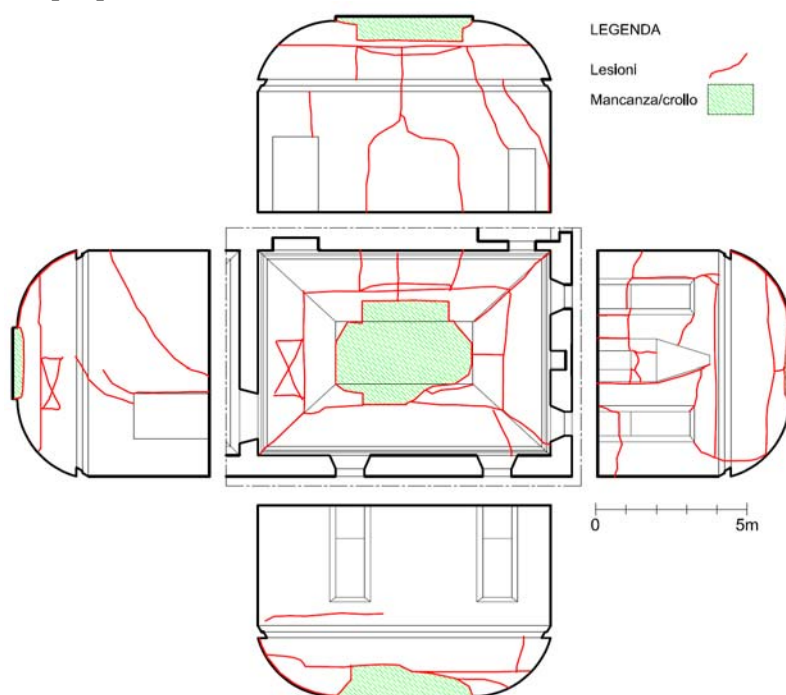


Figura 4.38. Restituzione grafica del quadro fessurativo della volta parzialmente crollata

I risultati delle analisi sono stati espressi in termini di deformate a collasso e curve di capacità. Le curve di capacità sono state espresse in termini di risultante delle forze applicate in funzione dello spostamento di un punto della sommità della volta. Le proprietà meccaniche assunte alla base della modellazione sono riportate nella tabella sottostante.

Tabella 14. Parametri meccanici utilizzati per la modellazione numerica

w	1700 kg/m ³
Proprietà meccaniche del materiale	
E	120 kN/cm ²
G	48 kN/cm ²
σ_c	0.3 kN/cm ²
σ_t	0.01 kN/cm ²
γ_u	0.4 %
Scorrimenti inibiti	

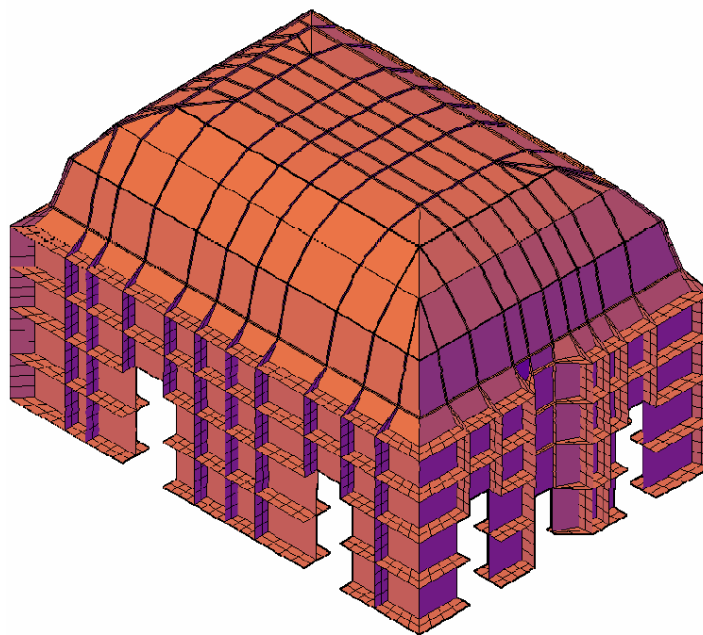


Figura 4.39. Vista assonometrica del modello strutturale ai macro-elementi

I risultati sono riportati nella figura sottostante. Per la direzione trasversale, i cui risultati sono riportati di seguito, è possibile notare una resistenza massima pari al 45% del peso della struttura ed un comportamento scarsamente duttile. La deformata e il quadro fessurativo al collasso mostrano una concentrazione del danno in corrispondenza della volta e della zona della parete corrispondente alla canna fumaria, caratterizzata da un forte restringimento della sezione muraria.

Per la direzione verticale i risultati in termini di curva di capacità evidenziano un ridotto margine di sicurezza nei confronti degli incrementi dei carichi verticali (circa 1.2). La deformata e il quadro fessurativo al collasso evidenziano come la parte sommitale della volta (quella effettivamente crollata) rappresenti la zona soggetta agli spostamenti massimi.

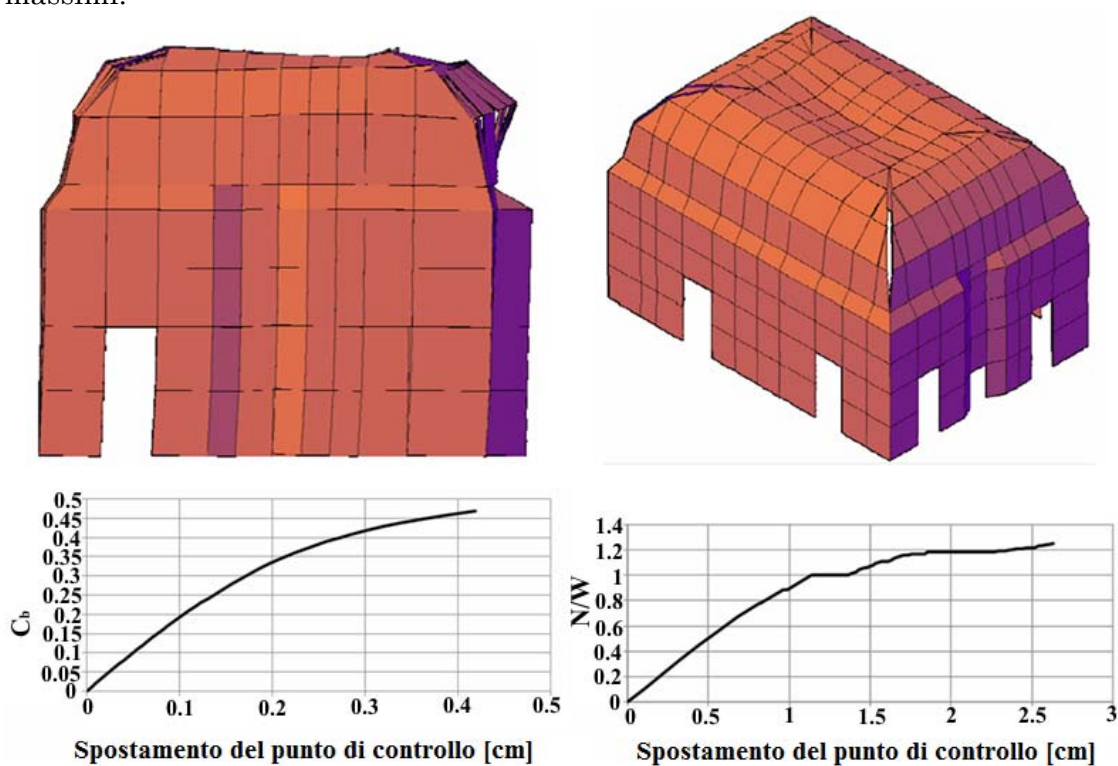


Figura 4.40. Curve di capacità e deformate a collasso: direzioni trasversale e verticale

4. Applicazione dell'approccio proposto ad un ipotetico edificio di culto

Allo scopo di verificare l'applicabilità del modello proposto ad interi edifici senza esprimere giudizi su edifici esistenti è stato individuato un caso di studio puramente immaginario. Tale caso di studio non trova riscontro nella realtà, ma appare rappresentativo di un'ampia classe di edifici di culto, e soprattutto può essere assunto come esempio utile a valutare le potenzialità del modello proposto.

Si riportano di seguito alcune immagini del modello numerico con i dati relativi alla dimensioni geometriche e alle proprietà meccaniche adottate per i materiali.

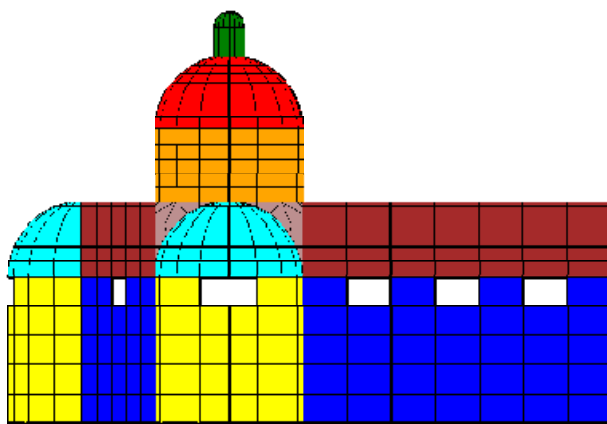


Figura 4.41 – Caso di studio: prospetto laterale

Il caso di studio considerato è rappresentativo di una chiesa ad una navata con pianta a croce latina che può approssimativamente essere inscritta in un rettangolo di lati $36 \times 30 \text{ m}$. La facciata principale è sormontata da un timpano che si erge fino a quota $+17.00 \text{ m}$, mentre la copertura è costituita da volte a botte, sia sulla navata che sui transetti e sull'abside, che si chiudono a quota $+15.00 \text{ m}$. Sia in corrispondenza dei transetti che dell'abside, queste volte si chiudono con delle semicupole. Infine una cupola sormontata da una lanterna (che svetta fino a quota $+27.00 \text{ m}$) chiude la copertura poggiandosi su quattro pennacchi che scaricano sia sulle volte di copertura che sulle pareti perimetrali.

Alcuni dettagli sulla geometria dell'edificio sono riportati nelle figure seguenti.

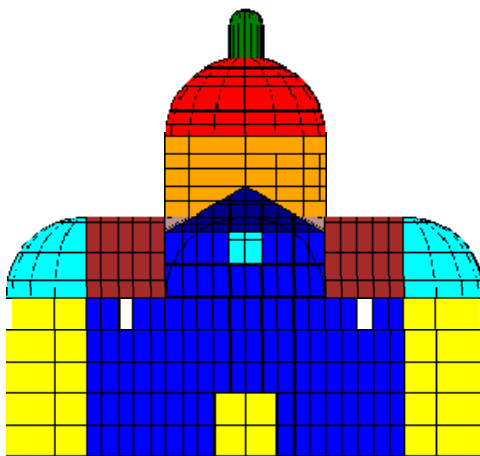


Figura 4.42 – Caso di studio: prospetto principale

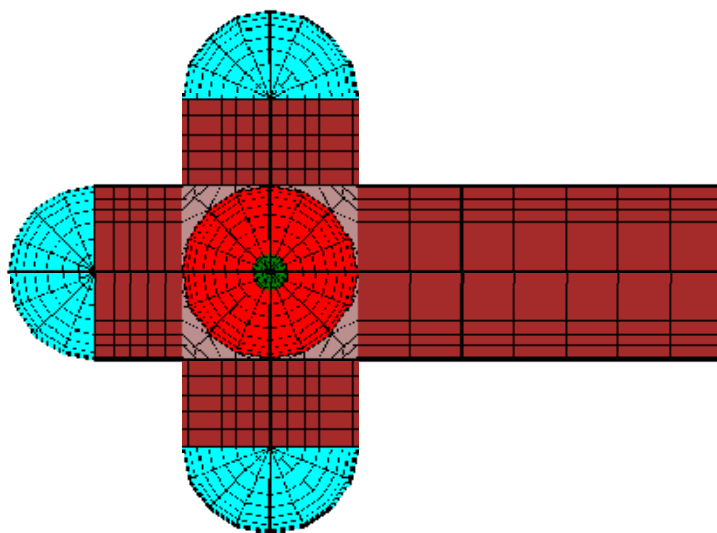


Figura 4.43 – Caso di studio: vista in pianta

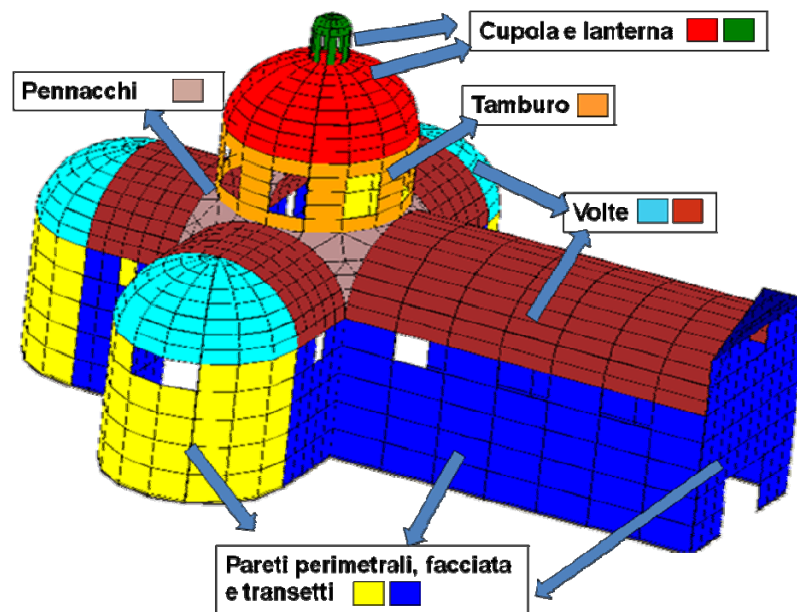


Figura 4.44 – Caso di studio: vista assonometrica

Sono state assegnate sia le caratteristiche dei materiali, sia gli spessori, considerando la funzione dei singoli elementi costruttivi, suddividendo l'edificio secondo la mappa di colore riportata in figura 4.44. Le caratteristiche dei materiali e gli spessori, ritenuti credibili per tipologia muraria ed epoca di costruzione, sono riassunti nella seguente tabella.

Tabella 14 – Tipologie murarie

	E [kN/cm ²]	G [kN/cm ²]	σ_t [kN/cm ²]	σ_c [kN/cm ²]	w [kg/m ³]	$Spes.$ [cm]
<i>Pareti perimetrali, facciata e transetti</i>	240	78	9	40	1800	120
<i>Volte</i>	90	30	2.8	14	1400	40
<i>Pennacchi</i>	240	78	9	40	1800	120
<i>Tamburo</i>	240	78	9	40	1800	80
<i>Cupola e lanterna</i>	240	78	9	40	1800	40

Sul modello implementato sono state condotte analisi statiche non lineari nelle due direzioni principali (Figura 4.45) corrispondenti agli assi della croce latina. Si riportano di seguito i risultati relative alle analisi statiche non lineari condotte sul modello (Figure 4.47, 4.48, 4.49). I risultati sono riportati in termini di deformata a collasso e curva di capacità (spostamento dei punti di controllo, taglio alla base normalizzato rispetto al peso dell'edificio, che è stato stimato in 34843 kN).

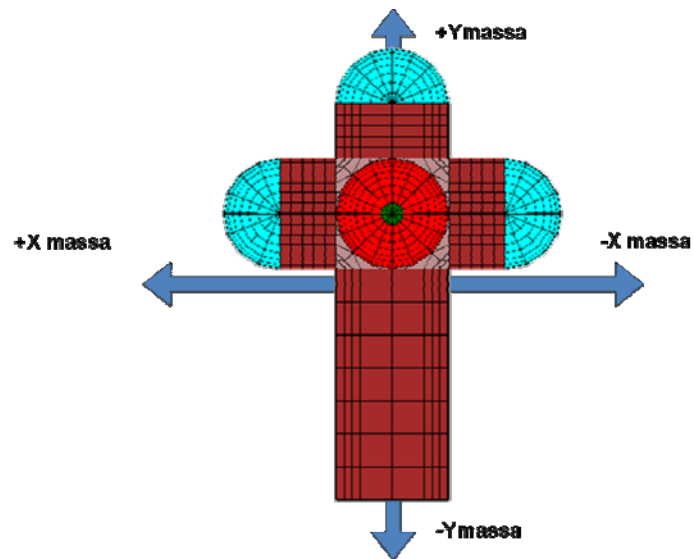


Figura 4.45 – Direzioni di carico

Come punti di controllo sono stati scelti i punti in cima alle coperture (quota $+15.00\text{ m}$), quello in cima al timpano (quota $+17.00\text{ m}$), e i punti alla base della lanterna (quota $+24.90\text{ m}$) come mostrato in figura 4.46.

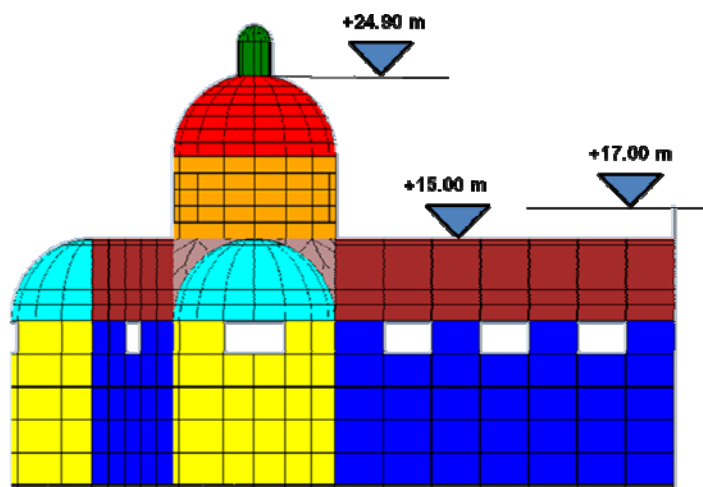


Figura 4.46 – Punti di controllo

Per entrambe le direzioni di carico è stata adottata una distribuzione di forze orizzontale proporzionale alla massa. Nella direzione trasversale le analisi in direzione positiva e negativa sono uguali, essendo l'edificio simmetrico rispetto all'asse longitudinale, pertanto nel seguito si farà riferimento, per tali analisi, genericamente alla direzione X, senza fare distinzioni di segno.

Per la direzione trasversale, i cui risultati sono riportati di seguito, è possibile notare un coefficiente di taglio alla base massimo pari a circa 0.17 (fig. 4.47). La deformata mostra una concentrazione del danno in corrispondenza della volta a botte di copertura della navata, con il coinvolgimento della parete su cui essa scarica.

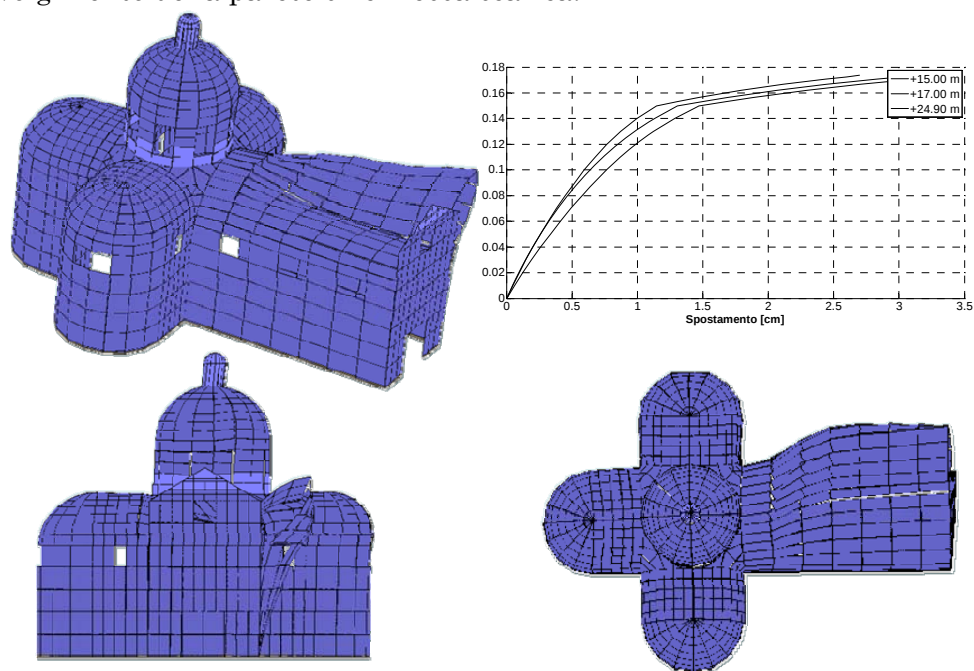


Figura 4.47 – Direzione X: deformate a collasso e curve di capacità

Per la direzione longitudinale il collasso coinvolge, in entrambi i casi la facciata principale. Tuttavia, mentre nella direzione positiva la facciata è spinta contro il resto dell'edificio, nella direzione opposta la facciata tende a distaccarsi. Questo comporta una maggiore resistenza nel-

la direzione +Y, al punto che nel collasso, in questo caso, viene coinvolta anche la cupola. E' inoltre possibile verificare, in queste analisi, come sia evidente lo spanciamento delle pareti laterali, a causa dell'effetto spingente della volta di copertura, già per carichi verticali. Dall'osservazione delle figure corrispondenti ai meccanismi di collasso di nota inoltre nella direzione -Y la l'impegno flessionale della facciata con formazione di cerniere cilindriche sia in corrispondenza dei cantonali che in corrispondenza dell'asse verticale centrale della facciata.

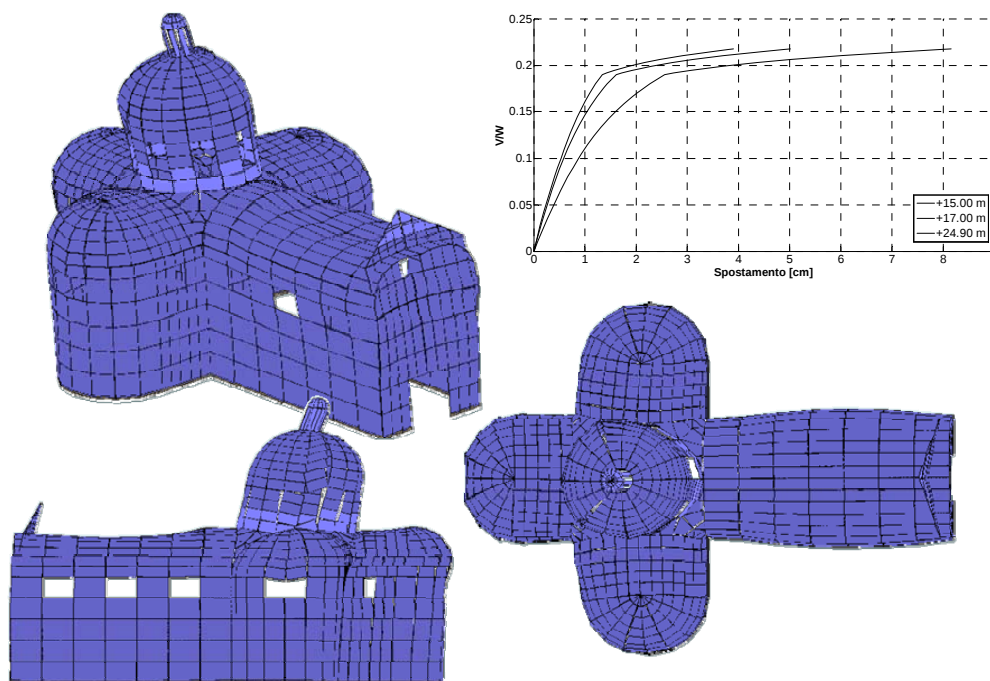


Figura 4.48 – Direzione +Y: deformate a collasso e curve di capacità

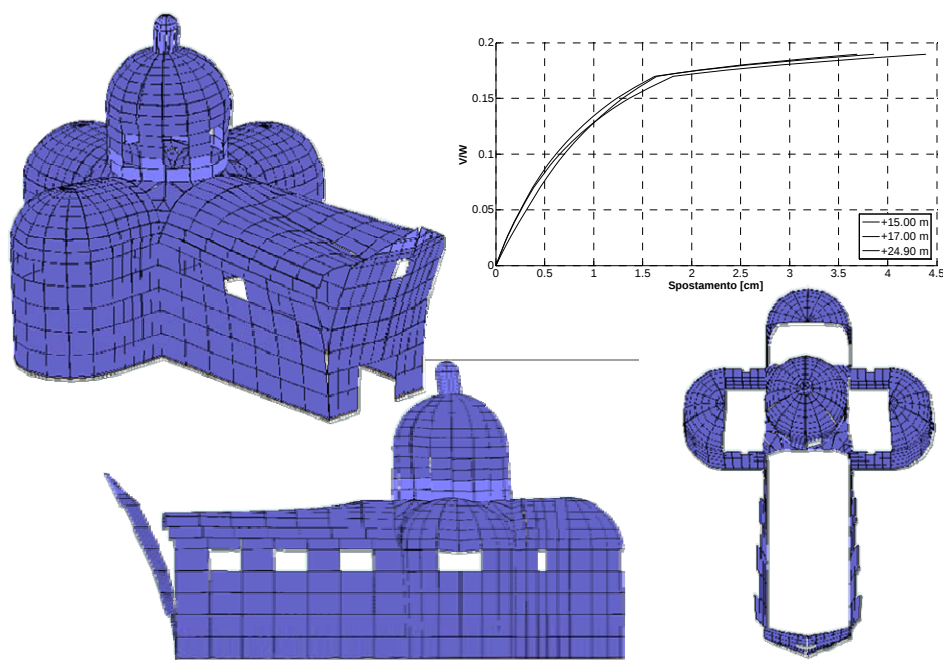


Figura 4.49 – Direzione -Y: deformato a collasso e curve di capacità

In figura 4.50 è riportato un confronto tra le curve di capacità nelle diverse direzioni di carico, dal quale appare immediato riscontrare le direzioni di carico più resistenti, e quelle più duttili. Tuttavia è parso utile fornire una rappresentazione tridimensionale di tali risultati, riportando spazialmente le curve in base alla direzione di carico corrispondente, e poi collegando le curve con delle superfici colorate sulla base del taglio alla base riscontrato per ciascun punto della curva. Tale rappresentazione prende il nome di *capacity dominium* [10] e, per il caso in esame, è riportato in figura 4.48. E' evidente come una vista laterale indica le direzioni di maggiore e minore resistenza, mentre la vista in pianta del dominio fornisce indicazioni sulle direzioni di carico che presentano maggiori e minori duttilità.

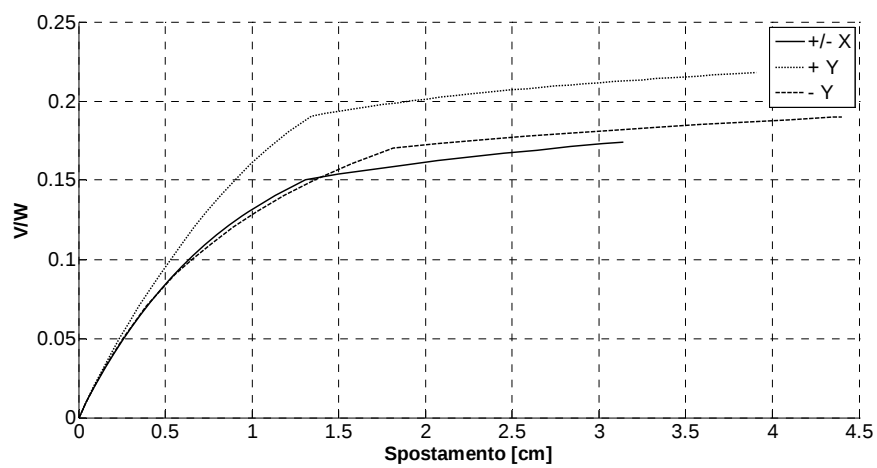


Figura 4.50 – Curve di capacità al variare della direzione di carico

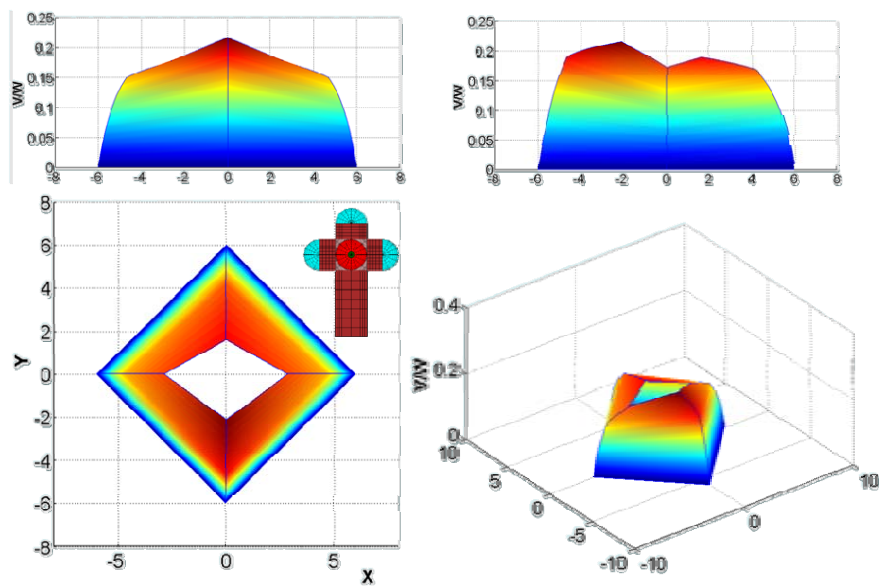


Figura 4.51 – Capacity dominium

Bibliografia

- [1] Beyer, K., 1956, *“Die Statik im Stahlbetonbau”*, 2. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg.
- [2] Calì, I., Marletta, M., Pantò, B., 2004. *“Un semplice macro-elemento per la valutazione della vulnerabilità sismica di edifici in muratura”*, 11th Convegno Nazionale ‘L’Ingegneria Sismica in Italia’, 25 -29 Gennaio, Genova.
- [3] Calì, I., Marletta, M., Pantò, B., 2008. *“A discrete element approach for the evaluation of the seismic response of masonry buildings”*, 14th World Conference of Earthquake, October 12 -17, Beijing, China.
- [4] Calì, I., Cannizzaro, F., Caponetto, R., Intelisano, M., Lepidi, M., Margani, G., Marletta, M., Pantò, B., 2010, *“Palazzo Gualtieri”*, Report sui casi di studio di edifici storici danneggiati dal terremoto Aquilano, Coordinatore: Marchetti, L., Vice Commissario Delegato per la Tutela dei Beni Culturali.
- [5] Creazza, G., Matteazzi, R., Saetta, A., Vitaliani, R., 2002, *“Analyses of Masonry Vaults: A Macro Approach Based on Three-Dimensional Damage Model”*, Journal of Structural Engineering, DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2002)128:5(646)
- [6] Faccio, P., Foraboschi, P., 2000, *“Volte a crociera”*, L’Edilizia, 7/8, 48-51.
- [7] Milani, E., Milani, G., Tralli, A., 2008, *“Limit analysis of masonry vaults by means of curved shell finite elements and homogenization”*, International Journal of Solids and Structures 45, 5258-5288.
- [8] Pantò, B., 2007, *“La modellazione sismica degli edifici in muratura. Un approccio innovativo basato su un macro-elemento spaziale”*, Tesi di Dottorato in Ingegneria delle Strutture, Tutor: Prof. Calì, I., Ing. Marletta, M.
- [9] Pflüger, A., 1966, *“Elements de Statique des Coques”*, Dunod, Paris.
- [10] I. Calì, F. Cannizzaro, E. D’Amore, M. Marletta, B. Pantò. “Un Nuovo approccio ai Macro-Elementi per la stima della resistenza sismica di edifici in struttura mista muratura - calcestruzzo armato: applicazioni ad un caso di studio. Contenuto in: Valutazione e riduzione della vulnerabilità sismica di edifici esistenti in cemento armato, a cura di E.

Cosenza, G. Manfredi, G. Monti. Editore Polimetria (International Scientific Publisher). ISBN 978-88-7699-130-1.

Conclusioni

La presente tesi si inserisce nel contesto più ampio di un filone di studi sul comportamento sismico degli edifici esistenti in muratura.

Nell'ambito dei criteri di modellazione esistono ancora numerosi problemi aperti e di difficile soluzione su cui lavorano diversi gruppi di ricerca sia in ambito nazionale che internazionale. Negli ultimi quattro anni l'unità di Catania ha introdotto un metodo di modellazione ai macro-elementi che consente di valutare gli effetti del terremoto sulle strutture in muratura considerandone la risposta sia nel piano (meccanismi di secondo modo) che fuori-piano (meccanismi di primo modo). Pur rappresentando un notevole contributo per lo studio del comportamento non lineare degli edifici esistenti in muratura, tale approccio di modellazione non consente ancora di cogliere certi comportamenti tipici di edifici storici.

Questo lavoro, nel tentativo di estendere allo studio degli edifici in muratura a carattere storico e monumentale, arricchisce tale approccio di modellazione e costituisce un'estensione del macro-elemento spaziale, pensato per le pareti piane, allo studio delle strutture a geometria curva come sua naturale evoluzione. Oltre alle problematiche legate alla non linearità del materiale muratura, anche la complessità geometrica ha richiesto studi approfonditi che hanno condotto ad una modellazione *a fibre*. A tal fine, è stato introdotto un modello discreto equivalente atto a descrivere il comportamento non-lineare di una generica porzione di una superficie voltata che, per assemblaggio, può simulare il comportamento sismico di qualsiasi struttura in muratura a geometria curva.

Il presente lavoro rappresenta dunque un contributo ad una ricerca che punta ad un'efficace modellazione del comportamento non lineare di un qualsiasi edificio in muratura.

L'uso dei macro-elementi consente di cogliere il comportamento non-lineare di un edificio con un costo computazionale estremamente ridotto rispetto ad una modellazione agli elementi finiti e rappresenta in questo momento il percorso più efficace verso la modellazione dinamica di strutture in muratura comunque complesse soggette ad azioni sismiche.

Il macro-elemento introdotto consente la simulazione di tutti i principali meccanismi di crisi delle murature, riesce a cogliere il comportamento globale della struttura e l'interazione tra gli elementi spingenti e quelli portanti; inoltre, già con discretizzazioni rade riesce a cogliere con sufficiente precisione sia il livello di resistenza che il meccanismo di collasso della struttura.

Per la taratura del modello sono inoltre sufficienti pochi parametri immediatamente ricavabili dall'interpretazione di comuni prove sperimentali.

La validazione del modello proposto, implementato in un software di calcolo (3DMacro), è stata condotta, sia in campo lineare che non lineare, mediante simulazioni numeriche i cui risultati sono stati confrontati con quelli disponibili in letteratura.

Tuttavia, l'introduzione di questo elemento non rappresenta un punto di arrivo, ma apre piuttosto nuove prospettive su ulteriori sviluppi dello stesso e, più in generale, sulla modellazione tridimensionale delle strutture.

In particolare, affinché il modello possa essere in futuro migliorato, si sono individuati i seguenti ulteriori spunti di approfondimento:

- Estensione del modello anche al campo dinamico non lineare mediante l'introduzione di opportuni legami ciclici;
- introduzione degli effetti geometrici del secondo ordine;
- introduzione di un nuovo elemento solido per la macro-modellazione di elementi murari a geometria particolare (pilastri murari, muri tozzi, ecc...).

Il motivo per cui la macro-modellazione risulta spesso insufficiente nella simulazione di tutti i possibili meccanismi di crisi delle murature, risiede probabilmente nel fatto che essi, a volte, nascono esclusivamente su basi matematiche, e non fisiche. La semplicità di funzionamento dell'elemento proposto ha invece consentito la modellazione di strutture complesse mantenendo inalterata l'idea originaria del comportamento meccanico. È questa probabilmente la ragione per cui il macro-elemento proposto rappresenta, allo stato attuale, il primo esempio di macro-elemento pensato per la modellazione di strutture murarie a carattere storico e monumentale, anche in presenza di elementi a geometria curva.